Technische Universität Dresden

Skript:

# Analysis I & II

Version vom 2022-12-01


Verfasser

Franziska Kühn
überarbeitet durch Benedikt Bartsch
Typos und Fehler gerne und bitte an Benedikt Bartsch.
E-Mail-Adresse siehe:
https://myfsr.de/dokuwiki/doku.php?id=fsr:mitglieder


Daten

Prof. Dr. Jürgen Voigt
Wintersemester 2008/09 + Sommersemester 2009
Grundstudium

# Inhaltsverzeichnis


**I Analysis I** **8**

**1 Natürliche Zahlen + Induktion** **9**
1.1 Peano-Axiome(1889) . . . 9
1.1.1 Addition . . . 9
1.1.2 Satz: Assoziativität der Addition . . . 9
1.1.3 Kommutativität der Addition . . . 10
1.1.4 Multiplikation . . . 10
1.1.5 Relation . . . 10
1.2 Prinzip der vollständigen Induktion . . . 10
1.2.1 Satz: Gauß'sche Summenformel . . . 11
1.3 Fakultät . . . 11
1.3.1 Satz: Permutationen . . . 11
1.4 Binomialkoeffizient . . . 12
1.4.1 Hilfssatz . . . 12
1.5 Satz: Binomischer Lehrsatz . . . 12
1.6 Mengen . . . 14
1.7 Abbildungen . . . 14
1.8 Satz: Wohlordnungssatz . . . 15

**2 Körperaxiome der reellen Zahlen** **17**
2.1 Axiome der Addition . . . 17
2.1.1 Folgerungen . . . 17
2.2 Axiome der Multiplikation . . . 18
2.2.1 Folgerungen . . . 19
2.3 Axiom der Distributivität . . . 19
2.3.1 Folgerungen . . . 19

**3 Ordnungsaxiome** **21**
3.1 Ordnungsaxiome . . . 21
3.1.1 Folgerungen . . . 22
3.2 Satz: $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ . . . 23
3.3 Absolutbetrag und Vorzeichenfunktion/Signumfunktion . . . 23
3.3.1 Folgerungen . . . 24
3.4 Satz: Dreiecksungleichung . . . 24
3.5 Archimedisches Axiom . . . 24

**4 Folgen und Vollständigkeitsaxiom** **25**
4.1 Folgen und Konvergenz . . . 25
4.1.1 Folge . . . 25
4.1.2 Konvergenz . . . 26
4.1.3 Satz: Eindeutigkeit des Grenzwertes . . . 27
4.2 Folgerungen . . . 27
4.3 Cauchy-Folge . . . 29
4.3.1 Satz: Konvergenz $\Rightarrow$ Cauchy-Folge . . . 29
4.3.2 Vollständigkeitsaxiom . . . 29

4.4 Beschränktheit . . . 30
4.4.1 Satz: Konvergenz ⇒ Beschränktheit . . . 30

**5 Supremum von Mengen, Satz von Bolzano-Weierstraß** **32**
5.1 Supremum & Infimum . . . 32
5.1.1 Satz: Existenz des Supremums . . . 32
5.2 Folgerung: Eindeutigkeit der Wurzel . . . 33
5.3 Monotonie . . . 33
5.3.1 Satz: Konvergenz von monotonen beschränkten Folgen . . . 34
5.4 Hilfssatz: Monotone Teilfolge . . . 34
5.5 Satz von Bolzano-Weierstraß . . . 34
5.6 Häufungswert . . . 34
5.6.1 Satz: Häufungswert & konvergente Teilfolge . . . 35
5.7 Limes superior/inferior . . . 35

**6 Reihen** **36**
6.1 Geometrische Reihe . . . 37
6.2 Satz: Linearkombination . . . 37
6.3 Konvergenzkriterien . . . 38
6.3.1 Satz: Allgemeines Cauchy'sches Konvergenzkriterium . . . 38
6.3.2 Satz: Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen . . . 38
6.3.3 Satz: Reihen mit positiven Gliedern . . . 39
6.3.4 Satz: Majoranten-Kriterium . . . 39
6.4 Absolute Konvergenz . . . 40
6.4.1 Folgerung: Absolute Konvergenz ⇒ Konvergenz . . . 40
6.4.2 Satz: Quotientenkriterium . . . 40
6.4.3 Satz: Wurzelkriterium . . . 41
6.5 Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen . . . 41
6.5.1 Satz: Konvergenz von Dezimalbrüchen . . . 41
6.5.2 Satz: Reihenentwicklung einer reellen Zahl . . . 41
6.5.3 Folgerung: Dezimalbruchentwicklung . . . 42

**7 Überabzählbarkeit von Mengen** **43**
7.1 Satz: Vereinigung von abzählbaren Mengen . . . 43
7.2 Satz: Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ . . . 44
7.3 Satz: Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ . . . 44
7.3.1 Folgerung: Abzählbarkeit irrationaler Zahlen . . . 44

**8 Umordnung von Reihen** **45**
8.1 Satz: Umordnung absolut konvergenter Reihen . . . 45
8.2 Satz: Großer Umordnungssatz . . . 45
8.3 Folgerung: Cauchy-Produkt . . . 47

**9 Exponentialreihe** **48**
9.1 Satz: Konvergenz . . . 48
9.2 Satz: Funktionalgleichung . . . 48
9.3 Folgerungen . . . 48

**10 Metrische Räume** **50**
10.1 Definition . . . 50
10.1.1 Hilfssatz . . . 50
10.1.2 Komplexe Zahlen . . . 51
10.1.3 Beispiel: Die metrischen Räume $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{R}^n$ . . . 52
10.2 Konvergenz . . . 53
10.2.1 Satz: Konvergenz im $\mathbb{K}^n$ . . . 54
10.3 Satz: Vollständigkeit des $\mathbb{R}^n$ . . . 54
10.4 Kugeln . . . 54

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

10.4.1 Satz: Abgeschlossenheit & Konvergenz . . . 55
10.4.2 Häufungswert im Metrischen Raum . . . 55

**11 Stetigkeit** **56**
11.1 Definition . . . 56
11.1.1 Grundbegriffe . . . 56
11.1.2 Stetigkeit . . . 57
11.1.3 Satz: Folgenstetigkeit . . . 58
11.2 Satz: Addition + Multiplikation von stetigen Funktionen . . . 58
11.3 Satz: Stetigkeit der Komposition . . . 59

**12 Sätze über stetige Funktionen** **60**
12.1 Satz: Zwischenwertsatz . . . 60
12.2 Folgerung . . . 60
12.3 Satz vom Maximum . . . 60
12.4 Folgenkompaktheit . . . 61
12.4.1 Satz: Beschränktheit & Abgeschlossenheit $\Leftrightarrow$ Folgenkompaktheit . . . 61
12.5 Übertragung der Folgenkompaktheit . . . 62
12.5.1 Korrollar: Satz vom Maximum . . . 62
12.5.2 Lipschitz-Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit . . . 62
12.6 Satz: Folgenkompaktheit + gleichmäßige Stetigkeit . . . 62

**13 Monotone Funktionen, Umkehrfunktionen, Potenz, Logarithmus** **64**
13.1 Satz: Monotonie & Stetigkeit . . . 64
13.2 Satz: Injektivität & Umkehrfunktion . . . 64
13.2.1 Wurzelfunktion . . . 65
13.2.2 Natürlicher Logarithmus . . . 65
13.2.3 Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$: $a^x$ . . . 65
13.3 Satz: Funktionalgleichung . . . 67
13.4 Abschluss . . . 67
13.5 Grenzwert in Metrischen Räumen . . . 68

**14 Komplexe Exponentialfunktion, trigonometrische Funktionen** **69**
14.1 Satz: Majorantenkriterium . . . 69
14.2 Satz: Quotientenkriterium . . . 69
14.2.1 Beispiel: Exponentialfunktion . . . 69
14.2.2 Trigonometrische Funktionen . . . 70
14.3 Satz: Stetigkeit der trigonometrischen Funktionen . . . 70
14.4 Satz: Additionstheoreme . . . 71
14.5 Satz: Reihenentwicklung . . . 71
14.6 Satz: Nullstelle von cos . . . 71
14.7 Hilfssatz: $\cos 2$ . . . 71
14.8 Hilfssatz: $\sin x > 0$ in $(0, 2]$ . . . 72
14.9 Hilfssatz: Monotonie von cos in $[0, 2]$ . . . 72
14.9.1 Beweis Satz 14.6 & Definition von $\pi$ . . . 72
14.10 Satz: spezielle Werte der komplexen Exponentialfunktion . . . 72
14.11 Folgerung: Periodizität . . . 73
14.12 Folgerung: Nullstellen von sin und cos . . . 73
14.12.1 (Co)Tangens . . . 74
14.12.2 Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen . . . 74
14.13 Satz: Polardarstellung . . . 74
14.14 Fundamentalsatz der Algebra . . . 75

**15 Differentiation** **76**
15.1 Satz: Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion . . . 77
15.2 Folgerung: Differenzierbarkeit von cos, sin . . . 77
15.3 Satz: Weierstraßsche Zerlegungsformel . . . 78



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

15.4 Satz: Produkt-/Quotienten-/Summenregel . . . 78
15.5 Satz: Kettenregel . . . 79
15.6 Satz: Ableitung der Umkehrfunktion . . . 80
15.7 Ableitungen höherer Ordnungen . . . 81

**16 Lokale Extrema, Mittelwertsatz** **82**
16.1 Satz: Ableitung an der Stelle des Extremums . . . 82
16.2 Satz von Rolle . . . 82
16.3 Folgerung: Mittelwertsatz . . . 83
16.4 Folgerung: Monotonie . . . 83
16.5 Folgerung: striktes Extrema . . . 83
16.6 Folgerung: Verallgemeinerter Mittelwertsatz . . . 84
16.7 Folgerung: Regel von de l'Hôpital . . . 84

**17 Das Riemann-Integral** **86**
17.1 Definition . . . 86
17.1.1 Treppenfunktion . . . 86
17.1.2 Integral . . . 86
17.1.3 Satz: Linearität . . . 87
17.1.4 Riemann-Integrierbarkeit . . . 88
17.2 Satz: Riemann-Integrierbarkeit von stetigen Funktionen . . . 88
17.3 Satz: Riemann-Integrierbarkeit von monotonen Funktionen . . . 89
17.4 Satz: Riemann-Summen . . . 90
17.5 Hilfssatz: Rechenregeln für Ober-/Unterintegrale . . . 91
17.6 Satz: Linearität des Integrals . . . 92
17.7 Folgerung: Positiv-/Negativteil . . . 93
17.8 Satz: „Aufsplitten“ von Integralen . . . 93

**18 Integration und Differentiation, der „Hauptsatz“** **94**
18.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, I . . . 94
18.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, II . . . 95
18.3 Satz: Substitutionsregel (Kettenregel rückwärts) . . . 97
18.4 Satz: Partielle Integration . . . 97

**19 Uneigentliche Integrale** **99**
19.1 Satz: Integralvergleichskriterium für Reihen . . . 100
19.2 Satz: (Euler'sche) Gamma-Funktion . . . 100

**20 Gleichmäßige Konvergenz, Potenzreihen** **102**
20.1 Satz: Gleichmäßige Konvergenz + Stetigkeit . . . 102
20.2 Satz: Konvergenzkriterium von Weierstraß . . . 103
20.3 Potenzreihe . . . 104
20.3.1 Satz: Konvergenzradius . . . 104
20.4 Satz: Vertauschbarkeit von Limes und Integral . . . 105
20.5 Satz: Vertauschbarkeit von Limes und Differentiation . . . 106
20.6 Folgerung: Differentiation der Potenzreihe . . . 106
20.7 Folgerung: beliebige Differenzierbarkeit der Potenzreihe . . . 107

**II Analysis II** **108**

**21 Taylor'sche Formel und Taylor-Reihe** **109**
21.1 Satz: Erweiterung der Weierstraß'schen Zerlegungsformel . . . 109
21.2 Satz: Taylor'sche Formel . . . 110
21.3 Folgerung: Polynom . . . 110
21.4 Satz: Integralrestglied . . . 111
21.5 Taylor-Reihe . . . 111



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

21.6 Satz: Logarithmusreihe . . . 112
21.7 Satz: Arcus-Tangens-Reihe . . . 113
21.8 Satz: Binomische Reihe . . . 113
21.9 Folgerung: Absolutbetrag . . . 114

**22 Topologie metrischer Räume, Kompaktheit** **116**
22.1 Satz: Eigenschaften offener Mengen . . . 116
22.2 Komplement, Inneres, Rand, Abschluß . . . 117
22.2.1 Satz: Eigenschaften . . . 117
22.3 Kompaktheit . . . 118
22.3.1 Satz: Kompaktheit & Folgenkompaktheit . . . 118
22.4 Satz von Heine-Borel . . . 119

**23 Kurven im $\mathbb{R}^n$** **120**
23.1 Rektifizierbarkeit . . . 121
23.1.1 Satz: Rektifizierbarkeit stetig differenzierbarer Funktionen . . . 121
23.2 Hilfssatz: „Mittelwertsatz“ . . . 122
23.3 Parametertransformation . . . 124

**24 Partielle Ableitungen** **125**
24.1 Lemma von Schwarz . . . 127
24.2 Folgerung: Vertauschen partieller Ableitungen . . . 128

**25 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$** **131**
25.1 Satz: Berechnung der Jacobi-Matrix . . . 132
25.2 Satz: Totale Differenzierbarkeit . . . 133
25.3 Satz: Kettenregel . . . 134

**26 Normierte Räume, lineare Abbildungen** **137**
26.1 Satz: Stetigkeit linearer Abbildungen . . . 138
26.2 Satz: Mittelwertsatz/Schrankensatz . . . 139
26.3 Satz: Konvexe Funktion . . . 141
26.4 Folgerung . . . 142
26.5 Satz: Höldersche Ungleichung . . . 142
26.6 Satz: Minkowskische Ungleichung . . . 143

**27 Taylorformel, lokale Extrema** **145**
27.1 Multinomialtheorem . . . 145
27.2 Hilfssatz . . . 145
27.3 Satz: Taylorsche Formel . . . 146
27.4 Folgerung: Restglied Taylorformel . . . 147
27.5 Satz: Notwendiges Kriterium für Extremum . . . 149
27.6 Satz: Hinreichende Kriterien für Extrema . . . 150

**28 Implizite Funktionen, 1. Auflösungssatz** **153**
28.1 Satz: Banach'scher Fixpunktsatz . . . 153
28.2 Satz über implizite Funktionen, 1. Auflösungssatz . . . 154
28.3 Satz: Differenzierbarkeit impliziter Funktionen . . . 157
28.4 Satz: Stetige Differenzierbarkeit impliziter Funktionen (Zusatz zu 28.2) . . . 158

**29 Lokale Invertierbarkeit, Lagrange-Multiplikatoren** **159**
29.1 Satz: Satz der lokalen Invertierbarkeit, 2. Auflösungssatz . . . 159
29.2 Satz: Notwendige Bedingung für lokales Extremum unter Nebenbedingung . . . 160

**31 Integral von Treppenfunktionen im $\mathbb{R}^n$** **163**
31.1 Satz: Eigenschaften des Integrals . . . 164
31.2 Folgerung: Positivität des Integrals . . . 166

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

31.3 Satz: Weitere Treppenfunktionen . . . 166
31.4 Hilfssatz . . . 166

**32 Das $n$-dimensionale Riemann-Integral 167**
32.1 Hilfssatz: Rechenregeln Ober- und Unterintegral . . . 167
32.2 Satz: Linearität des Riemann-Integrals . . . 168
32.3 Satz: Riemannsches Integrierbarkeitskriterium . . . 168
32.4 Satz: Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen . . . 168
32.4.1 Kompakte Träger . . . 169
32.5 Satz: Fundamentale Ungleichung . . . 169
32.5.1 Jordan-Messbarkeit . . . 170

**33 Satz von Fubini, Berechnung von Integralen 172**
33.1 Satz von Fubini . . . 172
33.2 Folgerung: Berechnung von Integralen . . . 172
33.3 Folgerung: Prinzip von Cavalieri . . . 173
33.4 Satz: Stetigkeit bei iterierten Integralen . . . 174
33.5 Satz: Jordan-Messbarkeit . . . 174
33.6 Hilfssatz: Jordan-Messbarkeit kartesisches Produkt . . . 174

**34 Transformationsformel 180**
34.1 Satz: Urform der Transformationsformel . . . 180
34.2 Satz: Transformationsformel . . . 181
34.3 Satz: Riemann-Integrierbarkeit auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . . . 184
34.4 Beweis: Satz 34.2 . . . 185

**35 Beweis der Transformationsformel 186**
35.1 Hilfssatz: Transformationsformel auf Produkt von Diffeomorphismen . . . 186
35.2 Hilfssatz: Induktion . . . 187
35.3 Satz: Zerlegung des Diffeomorphismus . . . 187
35.4 Satz: Partition der Eins (leichte Form) . . . 188
35.5 Beweis: Satz 34.1 . . . 189

**36 Fourier-Reihen 190**
36.1 Hilfssatz: Orthogonalitätsrelation . . . 191
36.2 Satz: Dirichlet-Kerne . . . 193
36.3 Satz: Cesàro-Mittel . . . 194
36.4 Satz von Fejér . . . 195
36.5 Satz: Approxiomationssatz von Weierstraß . . . 196
36.5.1 2-Norm . . . 196
36.6 Hilfssatz . . . 197
36.7 Hilfssatz . . . 197
36.8 Satz: Parsevalsche Gleichung . . . 197

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# Teil I

# Analysis I

# 1 Natürliche Zahlen + Induktion

## 1.1 Peano-Axiome(1889)

Peano (1858-1932)/Dedekind (1831-1916)

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bilden eine Menge mit folgenden Eigenschaften:

1. Jedem $n \in \mathbb{N}$ ist genau ein $n' \in \mathbb{N}$ zugeordnet, genannt der Nachfolger von $n$.
2. Es gibt ein Element in $\mathbb{N}$ – von uns bezeichnet mit 1 –, das nicht Nachfolger ist.
3. Sind $m, n \in \mathbb{N}$, $(m \neq n)$, dann gilt $n' \neq m'$.
4. Ist $M \subseteq \mathbb{N}$, $1 \in M$ und für alle $n \in M$ gilt $n' \in M$, dann ist $M = \mathbb{N}$. (Induktionsaxiom)

Es gilt: Zwei Mengen mit den Eigenschaften 1 bis 4 sind im wesentlichen gleich.

### 1.1.1 Addition

Definition: Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren (für $n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}
k+1 &:= k' \\
k+n' &:= (k+n)' \\
\Rightarrow k+2 &= (k+1)' = (k')' \\
k+3 &= (k+2)' = ((k')')' \\
k+4 &= (k+3)' = (((k')')')' \\
k+5 &= (k+4)' = ((((k')')')')'
\end{aligned}$$

(rekursive Definition)

### 1.1.2 Satz: Assoziativität der Addition

Für alle $k$, $m$, $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(k+m)+n = k+(m+n)$

Beweis:

- Sei $k$, $m \in \mathbb{N}$. Sei
$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid (k+m)+n = k+(m+n)\}$$
Dann gilt $1 \in M$, da:
$$\begin{aligned}
(k+m)+1 &= (k+m)' \\
&= k+m' \\
&= k+(m+1)
\end{aligned}$$

- Aus $n \in M$ folgt $n' \in M$, da: laut Voraussetzung bedeutet $n \in M$: $(k+m)+n = k+(m+n)$. Daher:

$$\begin{aligned}(k+m)+n' &= ((k+m)+n)' \\ &\overset{IV}{=} (k+(m+n))' \\ &= k+(m+n)' \\ &= k+(m+n')\end{aligned}$$

  Also $n' \in M$ und damit nach Axiom 4: $M = \mathbb{N}$.

### 1.1.3 Kommutativität der Addition

ähnlich wie Addition zu beweisen (siehe Übung 1)

Für alle $m$, $n \in \mathbb{N} : m + n = n + m$

### 1.1.4 Multiplikation

Definition: Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}k \cdot 1 &:= k \\ k \cdot n' &:= k \cdot n + k\end{aligned}$$

(rekursive Definition)

Daraus folgen die üblichen Rechenregeln, z.B. Distributivgesetz:

$$k \cdot (n + m) = k \cdot n + m \cdot k$$

### 1.1.5 Relation

Definition: Seien $m$, $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren: $m \leq n$ wenn $m = n$ oder wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $m + k = n$ (auch $n \geq m$).

## 1.2 Prinzip der vollständigen Induktion

außer $\mathbb{N} : \mathbb{N}_0 := 0, 1, 2, \ldots$

Um eine Aussage $A(n)$ (von $n$ abhängig) für alle $n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$) zu beweisen, genügt es zu zeigen:

1. $A(n_0)$ ist richtig (Induktionsanfang)
2. Für beliebiges $n \geq n_0$ gilt: Ist $A(n)$ richtig (Induktionsvoraussetzung), so ist auch $A(n + 1)$ richtig. (Induktionsschritt)

Beweis mit Hilfe des Induktionsaxioms: Setze $M := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid A(n_0 + n) \text{ richtig}\}$
$\longrightarrow$ Dann $M = \mathbb{N}_0$ nach Induktionsaxiom

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 1.2.1 Satz: Gauß'sche Summenformel

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\
\sum_{k=1}^{n} k &:= 1 + 2 + \ldots + n \\
&:= 0 \qquad (n = 0) \\
\sum_{k=1}^{n'} k &:= \sum_{k=1}^{n} k + n'
\end{aligned}$$

(rekursive Definition)

Beweis: Induktion nach $n$

- Induktionsanfang: $n = 0 \quad \text{l.S.} = 0 \quad \text{r.S.} = 0 \cdot 1 = 0$
- Induktionsschritt: $n \longrightarrow n'(= n + 1)$

  Induktionsvoraussetzung:

  $$2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k = n \cdot (n+1)$$

  dann:

  $$\begin{aligned}
  2 \cdot \sum_{k=1}^{n+1} k &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k + 2 \cdot (n+1) \\
  &= n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1) \\
  &= (n+1) \cdot (n+2)
  \end{aligned}$$

## 1.3 Fakultät

Für $n \in \mathbb{N}$ wird definiert (rekursive Definition):

$$\begin{aligned}
n! &:= \prod_{k=1}^{n} k = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n & n \geq 1 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \\
(n+1)! &:= n! \cdot (n+1) \\
0! &:= 1
\end{aligned}$$

### 1.3.1 Satz: Permutationen

Die Anzahl der möglichen Anordnungen (Permutationen) einer $n$-elementigen Menge ist $n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Induktion nach $n$

- Induktionsanfang: $n = 1$ – logischerweise 1 Anordnung
- Induktionsschritt: Induktionsvoraussetzung: $n$-elementige Mengen haben $n!$ Anordnungen

  Anordnungen einer $(n+1)$-elementigen Menge $1, 2, \ldots, n+1$ zerfallen in $(n+1)$ disjunkte Teilmengen $K_1$, $K_2, \ldots, K_{n+1}$:
  $K_k :=$ Menge der Permutationen mit dem Element $k$ an 1. Stelle



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

In $K_k$ liegen $n!$ Elemente (nach Induktionsvoraussetzung)

Also Gesamtzahl: $n! \cdot (n+1) \overset{\text{Def.}}{=} (n+1)!$

### 1.4 Binomialkoeffizient

Für $n$, $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &:= \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k} \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)\cdots(1)}{(n-k)(n-k-1)\cdots(1)} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \\
\binom{n}{0} &:= 1
\end{aligned}$$

Wir setzen dabei voraus, dass wir mit reellen Zahlen rechnen können. Dass alle $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ sind, folgt aus Hilfssatz 1.4.1.

#### 1.4.1 Hilfssatz

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Beweis siehe Übung 2

### 1.5 Satz: Binomischer Lehrsatz

Seien $x$, $y$ reelle Zahlen und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k \\
0^0 &:= 1
\end{aligned}$$

für $x$ reell: $x^0 := 1$ für $n \in \mathbb{N}$: $x^{n+1} := x^n \cdot x$

Beweis: Induktion nach $n$

- Induktionsanfang: $n = 0$ , $(x+y)^0 = \binom{0}{0} \cdot x^0 \cdot y^0 = 1$
- Induktionsschritt:
  - Induktionsvoraussetzung:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

– Induktionsbeweis:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n \cdot (x+y) \\
&\overset{IV}{=} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k \right) \cdot (x+y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k+1} \cdot y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^{k+1} \\
&\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k+1} \cdot y^k + \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} \cdot x^{n-l+1} \cdot y^l \\
&\overset{\text{ausklammern}}{=} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \cdot x^{n-k+1} \cdot y^k + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k
\end{aligned}
$$

Bemerkung:

- $(x+y)^0 = 1$
- $(x+y)^1 = x+y$
- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
- $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$
- usw. (Faktoren zu finden im Pascal'schen Zahlendreieck)

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\
\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$\longrightarrow$ Folgerungen aus dem bin. Lehrsatz:



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\ 0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot (-1)^k &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \end{aligned}$$

### 1.6 Mengen

Seien $A$, $B$, $C$ Mengen:

- $A \subseteq B :\Leftrightarrow \langle x \in A \Rightarrow x \in B \rangle$: $A$ Teilmenge von $B$; auch $B \supseteq A$: $B$ Obermenge von $A$
- $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$: Vereinigung
- $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$: Schnittmenge
- $A \backslash B := \{x \in A \mid x \notin B\}$ Differenzmenge
- $A^{\complement_B} := B \setminus A$ Komplement
- $A_1 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$ kartesisches Produkt

Regeln:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, Distributivgesetz I
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, Distributivgesetz II
3. $\left(A^{\complement_B}\right)^{\complement_B} = A$
4. $A \setminus B = A \cap B^{\complement_C}$

Nachweis von Distributivgesetz I:

- Zeige „$\subseteq$“: Sei $x \in A \cap (B \cup C)$, dann ist $x \in A$ und $x \in B \cup C$
  - Fall 1: $x \in B$: $x \in (A \cap B) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - Fall 2: $x \in C$: $x \in (A \cap C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Zeige „$\supseteq$“: $A \cap (B \cup C) \supseteq A \cap B$ und $A \cap (B \cup C) \supseteq A \cap C$, daraus folgt: $A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Aus „$\subseteq$“ und „$\supseteq$“ folgt „$=$“.

### 1.7 Abbildungen

- $f\colon A \to B$ bedeutet: Jedem Element $a \in A$ ist genau ein Element $f(a) \in B$ zugeordnet. Elementweise: $a \mapsto f(a)$. $f$ heißt Abbildung (Funktion) von $A$ nach $B$
- Bezeichnungen: $A \ldots$ Definitionsmenge (Definitionsbereich), $B \ldots$ Zielmenge (Wertevorrat), $f(A) \ldots$ Wertebereich
- für $M \subseteq A$: $f(M) := \{f(a) \mid a \in M\} \ldots$ Bild von $M$
- für $N \subseteq B$: $f^{-1}(N) := \{a \in A \mid f(a) \in N\} \ldots$ Urbild von $N$
- $f$ injektiv: Aus $a_1$, $a_2 \in A$, $(a_1 \neq a_2)$ folgt $f(a_1) \neq f(a_2)$
- $f$ surjektiv: $f(A) = B$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- $f$ bijektiv: $f$ injektiv und surjektiv
  $\longrightarrow$ Umkehrabbildung: $f^{-1}\colon B \to A \qquad f^{-1}(b) := a$ , falls $b = f(a)$
- Für $f\colon A_1 \times \ldots \times A_n \to B$ ist

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &:= f((x_1, \ldots, x_n)) \\ f(x_1, \ldots, x_i, \cdot, x_{i+2}, \ldots, x_n) &:= (x \mapsto f(x_1, \ldots, x_i, x, x_{i+2}, \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

Beispiele:

1. - Sei $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, also $n \longrightarrow n'$ (Nachfolgerabbildung, Peano-Axiom 1)
   - $1 \notin \varphi(\mathbb{N})$ (Peano-Axiom 2)
   - $\varphi$ ist injektiv (Peano-Axiom 3)
   - Ist $M \subseteq \mathbb{N}$, $1 \in M$, $\varphi(M) \subseteq M$, dann $M = \mathbb{N}$. (Peano-Axiom 4)
   - Damit genauer: Natürliche Zahlen sind $(\mathbb{N}, 1, \varphi)$ [Eigenbemerkung (Grundbereich $M$, Konstante, Abbildung) = Peano-Struktur)]
2. Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$:

   $$\pi : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$$

   sind bijektiv.
3. Eine Menge $M$ hat $n$ Elemente: Es gibt $\varphi\colon \{1, \ldots, n\} \longrightarrow M$ ist bijektiv
4. Sei $A$, $B$ Mengen und $b \in B$. Dann ist die konstante Funktion

   $$\operatorname{const} b\colon A \to B$$

   definiert durch

   $$(\operatorname{const} b)(x) := b$$

### 1.8 Satz: Wohlordnungssatz

Jede nichtleere Teilmenge $M$ von $\mathbb{N}$ besitzt ein Minimum (d.h. $m \in M$ mit: $m \leq n$ für alle $n \in M$).

Beweis durch Widerspruch:

- Vorbemerkung:
  Sind $k$, $m \in \mathbb{N}$, $k \leq m$, $k \neq m$, dann gilt $k + 1 \leq m$.

  Beweis dazu:
  - Es gibt $n \in \mathbb{N}$, sodass $k + n = m$ (laut Definition). Ist $n = 1$, so folgt $k + 1 = m \overset{\text{Def.}}{\Rightarrow} k + 1 \leqslant m$.
    Ist $n \neq 1$, so gibt es $l \in \mathbb{N}$ mit $n = l + 1$, daher $k + l + 1 = m$, also $(k + 1) + l = m$, also $k + 1 \leq m$.
- Beweis:
  Sei $M \subseteq \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$. Annahme: $M$ hat kein Minimum. Definiere

  $$L := \{k \in \mathbb{N} \mid \text{für alle } m \in M \text{ gilt } k \leq m\}$$

  Dann $L \cap M = \emptyset$, denn $m \in L \cap M$ wäre ein Minimum von $M$. Wir zeigen nun, dass $L = \mathbb{N}$ (Axiom 4):



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- $1 \in L$ (siehe Aufgabe 4 Übung 1): $1 \leq m$ für alle $m \in \mathbb{N}$
- Sei $k \in L$, sei $m \in M$. Dann $k \neq m$ und $k \leq m$, damit $k + 1 \leq m$ (s. Vorbemerkung). Somit $k + 1 \in L$.

Aus $L = \mathbb{N}$ und $L \cap M = \emptyset$ folgt, dass $M = \emptyset$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist obige Annahme nicht zutreffend.

Bemerkung zur Logik des Widerspruchbeweises:

- Seien $A$, $B$ Aussagen. Man will zeigen: Aus $A$ folgt $B$.
- Dazu äquivalent: Aus non $B$ folgt non $A$. Oder gleichzeitiges Gelten von $A$ und non $B$ nicht möglich. („tertium non datur“)

Bemerkung: Aus $\mathbb{N}$ kann man durch mehrmalige Erweiterungen die reellen Zahlen konstruieren:

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 2
# Körperaxiome der reellen Zahlen

$\mathbb{R}$ bezeichne die Menge der reellen Zahlen. (Genauer: Sei $\mathbb{R}$ eine Menge, die den Axiomen §2-4 genügt- Dann ist $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen.)

## 2.1 Axiome der Addition

Für alle $x$, $y \in \mathbb{R}$ ist die Summe $x + y \in \mathbb{R}$ erklärt mit:

- Körperaxiom (Addition) 1: Assoziativgesetz (für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$)

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

- Körperaxiom (Addition) 2: Kommutativgesetz (für alle $x, y \in \mathbb{R}$)

$$x + y = y + x$$

- Körperaxiom (Addition) 3: Existenz der Null – Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ mit $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Körperaxiom (Addition) 4: Existenz des Negativen – Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $(-x) \in \mathbb{R}$ mit $x + (-x) = 0$

Bezeichnung: Für $x, y \in \mathbb{R}$ schreibt man

$$x - y := x + (-y)$$

### 2.1.1 Folgerungen

1. 0 ist eindeutig

   Beweis: Aus $0' \in \mathbb{R}$ und $0 + 0' = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} 0' &= 0' + 0 = 0 + 0' \\ &= 0 \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

2. Negatives ist eindeutig.

   Beweis: Aus $x + y = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} y &= y + 0 = y + (x + (-x)) \\ &= (y + x) + (-x) = (x + y) + (-x) \\ &= 0 + (-x) = (-x) + 0 = -x \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

3. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es $x \in \mathbb{R}$ (eindeutig) mit $a + x = b$ und zwar $x = b + (-a) =: b - a$.

   Beweis: $x = b - a$ erfüllt Behauptung:

$$\begin{aligned} a + (b - a) &= a + (b + (-a)) = (a + b) + (-a) \\ &= (b + a) + (-a) = b + 0 = b \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

   Eindeutigkeit: Aus $a + y = b$ folgt:

$$\begin{aligned} y &= y + (a + (-a)) = (y + a) + (-a) \\ &= (a + y) + (-a) = b + (-a) = b - a \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

4. $-0 = 0$

   Beweis:

$$-0 = (-0) + 0 = 0 + (-0) = 0$$

5. Für alle $x \in \mathbb{R} : -(-x) = x$

   Beweis:

$$(-x) + x = x + (-x) = 0$$

   Damit ist $x$ das Negative zu $-x$.

6. Für alle $x$, $y \in \mathbb{R}$ gilt: $-(x + y) = -x - y$

   Beweis:

$$\begin{aligned} (x + y) + (-x - y) &= (x + y) + ((-x) + (-y)) \\ &= (x + (-x)) + (y + (-y)) \\ &= 0 + 0 = 0 \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

## 2.2 Axiome der Multiplikation

Für alle $x$, $y \in \mathbb{R}$ ist das Produkt $x \cdot y := xy \in \mathbb{R}$ erklärt mit:

- Körperaxiom (Multiplikation) 1: Assoziativgesetz (für alle $x$, $y$, $z \in \mathbb{R}$):

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

- Körperaxiom (Multiplikation) 2: Kommutativgesetz (für alle $x, y \in \mathbb{R}$):

$$x \cdot y = y \cdot x$$

- Körperaxiom (Multiplikation) 3: Existenz der Eins: Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R}$ mit $1 \neq 0$, sodass $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Körperaxiom (Multiplikation) 4: Existenz des Inversen: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gibt es $x^{-1} \in \mathbb{R}$ mit: $x \cdot x^{-1} = 1$.

Bezeichnung: Für $x$, $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, setzt man

$$\frac{x}{y} := (x : y) := x/y := x \cdot y^{-1}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 2.2.1 Folgerungen

Beweise entsprechend Folgerungen 2.1

1. 1 ist eindeutig.
2. Inverses ist eindeutig.
3. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$, eindeutig bestimmt, mit $a \cdot x = b$ und zwar $x = \frac{b}{a}$.
4. $1^{-1} = 1$
5. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ $(x \neq 0)$ ist $x$ Inverses zu $x^{-1}$.
6. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$ ist das Produkt $x^{-1} \cdot y^{-1}$ Inverses zu $x \cdot y$.

## 2.3 Axiom der Distributivität

Körperaxiom (Distributivität): Für alle $x$, $y$, $z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

### 2.3.1 Folgerungen

1. Für alle $x$, $y$, $z \in \mathbb{R}$ gilt:
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$
Klar durch Kommutativität der Multiplikation ...
2. Für alle $x \in \mathbb{R}$: $x \cdot 0 = 0$ (Insbesondere: 0 besitzt kein Inverses.)

   Beweis: mit Folgerung 2.1.1.3 (Schritt 3-4)
$$\begin{aligned} x \cdot 0 + x \cdot 0 &= x \cdot (0 + 0) \\ &= x \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$
3. Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt:
$$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$$
Beweis: Sei $y = 0$. Ist $x \neq 0$, dann
$$\begin{aligned} y &= (x^{-1} \cdot x) \cdot y \\ &= x^{-1} \cdot (x \cdot y) \\ &= x^{-1} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$
Entsprechend: $y \neq 0$ impliziert $x = 0$

   $\longrightarrow$ Ist $x = 0$ oder $y = 0$, dann $x \cdot y = 0$ nach 2.3.1.2
4. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$:
$$(-x) \cdot y = -x \cdot y := -(x \cdot y)$$
Insbesondere gilt: $(-1) \cdot x = -x$

   Beweis:
$$\begin{aligned} x \cdot y + (-x) \cdot y &= (x + (-x)) \cdot y \\ &= 0 \cdot y = 0 \end{aligned}$$
Aus Folgerung 2.3.1.2: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

5. Für alle $x$, $y \in \mathbb{R}$:
$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$

Bemerkungen:

1. Allgemeines Assoziativgesetz:
   Sind $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) so definiert man:
$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n := (\ldots((x_1 + x_2) + x_3) + \ldots + x_n)$$
   rekursive Definition:
$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n-1} x_k + x_n$$
   Aus Assoziativgesetz folgt: Jede andere Klammerung führt zum gleichen Ergebnis.

   Entsprechend:
$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \prod_{k=1}^{n} x_k$$

2. Allgemeines Kommutativgesetz:
   In Summen kann man Summanden umordnen ohne das Ergebnis zu ändern.

   Beispiel:
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$
   Entsprechend für Produkte

3. Allgemeines Distributitätsgesetz:
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \cdot y_j$$

4. Umordnung
$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} a_{ij} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} a_{ij}$$

   Induktionsanfang:
$$\sum_{i=0}^{0} \sum_{j=0}^{i} a_{ij} = \sum_{j=0}^{0} a_{0j} = a_{00} = \sum_{i=0}^{0} a_{i0} = \sum_{j=0}^{0} \sum_{i=0}^{j} a_{ij}$$
   Induktionsschritt:
$$\sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{i} a_{ij} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} a_{ij} + \sum_{j=0}^{n+1} a_{ij} \overset{IV}{=} \left(\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} a_{ij}\right) + \sum_{j=0}^{n+1} a_{ij} = \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^{j} a_{ij}$$

Eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$, $\cdot$, die den Axiomen (KA 1-4), (KM 1-4) sowie (KD) genügt, nennt man einen Körper. Genauer: $(K, +, \cdot)$. Bisher bewiesene Eigenschaften gelten in jedem Körper.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 3 Ordnungsaxiome

## 3.1 Ordnungsaxiome

In $\mathbb{R}$ sind gewisse Elemente als positiv – geschrieben als $x > 0$ – ausgezeichnet, sodass gilt:

- (O.1): Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Beziehungen: $x > 0$, $x = 0$ oder $-x > 0$.
- (O.2): Für alle $x$, $y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$, $y > 0$ gilt, dass $x + y > 0$.
- (O.3): Für alle $x$, $y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$, $y > 0$ gilt, dass $x \cdot y > 0$.

Bezeichnungen:

- $x > y :\Leftrightarrow x - y > 0$
- $x \geq y :\Leftrightarrow x > y \vee x = y$
- $x < y :\Leftrightarrow y > x$
- $x \leq y :\Leftrightarrow y \geq x$

Bezeichnungen: Für $a, b \in \mathbb{R}$, $(a \leq b)$:

- abgeschlossenes Intervall:
$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$$
- offenes Intervall:
$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$$
- halboffenes Intervall:
$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$$
$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$$
- uneigentliche Intervalle:
$$\begin{aligned} [a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\} \\ (a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R}; a < x\} \\ (-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R}; a \geq x\} \\ (-\infty, a) &:= \{x \in \mathbb{R}; a > x\} \\ (-\infty, \infty) &:= \mathbb{R} \end{aligned}$$

### 3.1.1 Folgerungen

1. $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$

   Beweis:

$$\begin{aligned} x < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 > x \Leftrightarrow 0 - x > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -x > 0 \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

2. $x < y, y < z \Rightarrow x < z$ (Transitivität)

   Beweis:

$$\begin{aligned} x < y \quad &\Leftrightarrow \quad y - x > 0 \qquad y < z \Leftrightarrow z - y > 0 \\ \Rightarrow (y-x) + (z-y) \quad &\overset{O.2}{>} \quad 0 \\ \Leftrightarrow z - x \quad &> \quad 0 \\ x \quad &< \quad z \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

3. $x,\ y,\ a \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow x + a < y + a$

   Beweis:

$$x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow (y + a) - (x + a) > 0 \qquad \backslash\backslash$$

4. $x < y, x_1 < y_1 \Rightarrow x + x_1 < y + y_1$

   Beweis: mit 2) und 3)

$$x < y \Leftrightarrow x + x_1 < y + x_1 < y + y_1 \qquad \backslash\backslash$$

5. $x < y, a > 0 \Rightarrow a \cdot x < a \cdot y$

   Beweis:

$$x < y \Leftrightarrow y - x > 0 \overset{O.3}{\Rightarrow} a \cdot (y - x) > 0 \Leftrightarrow a \cdot x < a \cdot y \qquad \backslash\backslash$$

6. $x < y, a < 0 \Rightarrow a \cdot x > a \cdot y$

   Beweis:

$$y - x > 0, -a > 0 \overset{O.3}{\Rightarrow} (-a) \cdot (y - x) > 0 \Leftrightarrow a \cdot x > a \cdot y \qquad \backslash\backslash$$

7. $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$ Insbesondere: $1 = 1^2 > 0$

8. $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0 \qquad x < 0 \Rightarrow x^{-1} < 0$

   Beweis: $x^{-1} = x \cdot (x^{-1})^2$. Dann (O.3) bzw. 3.1.1.6

9. $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$

   Beweis: $x \cdot y > 0 \Rightarrow x^{-1} \cdot y^{-1} = (x \cdot y)^{-1} > 0$. Dann $0 < x < y$ mit $x^{-1} \cdot y^{-1}$ durchmultiplizieren und 3.1.1.5 benutzen. $\backslash\backslash$

10. Gelten $x \geq 0$ und $x \leq 0$, dann $x = 0$.

    Beweis: Nach (O.1) gilt genau eine der Beziehungen $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$. Wegen $x \geq 0$ ist $x < 0$ ausgeschlossen und wegen $x \leq 0$ ist $x > 0$ ausgeschlossen. Also $x = 0$. $\backslash\backslash$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

11. $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$, $y \leq x \Rightarrow x = y$

    Beweis:

$$\begin{aligned} x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0 \qquad & y \leq x \Leftrightarrow x - y \geq 0 \\ \overset{3.1.1.10}{\Rightarrow} y - x = 0 \qquad & \backslash\backslash \end{aligned}$$

12. Ist $x \in \mathbb{R}$ so, dass $x \leq y$ für alle $y > 0$, so gilt $x \leq 0$.

    Beweis durch Kontraposition ($A \Rightarrow B$ beweist man durch „non $B \Rightarrow$ non A):
    Angenommen $x > 0$. Dann $\frac{x}{1+1} > 0$ nach 3.1.1.8 bzw (O.3), daher $x \leq \frac{x}{1+1}$ (Voraussetzung).
    Also $(1+1) \cdot x \leq x$ (5), $x \leq 0$ (3) – im Widerspruch zu $x > 0$. $\backslash\backslash$

### 3.2 Satz: $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$

- Nachfolgerabbildung ist Addition von 1, also $n \mapsto n' = n \mapsto n + 1$
- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt induktiv, wenn gilt: $\forall x \in M : x + 1 \in M$.
- Sei $\mathcal{M} := \{M \subseteq \mathbb{R} \mid 1 \in M, M \text{ induktiv}\}$. Dann erfüllt

$$N := \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = \{m \in \mathbb{R} \mid \forall M \in \mathcal{M} : m \in M\}$$

  die Peano-Axiome mit Nachfolgerabbildung $\varphi(n) = n + 1$.
- Beweis:
  - $\mathcal{M} \neq \emptyset$, denn $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$. Sei $n \in N$. Für $M \in \mathcal{M}$ ist dann $n \in M$, daher auch $n + 1 \in M$ (M induktiv). Damit $n + 1 \in N$.
    Wegen $1 \in M$ für alle $M \in \mathcal{M}$ gilt $1 \in N$. Da die Menge $\{x \in \mathbb{R}; x \geq 1\} \in \mathcal{M}$ ist, folgt $0 \notin N$. Also ist 1 nicht Nachfolger. Sind $m, n \in N (m \neq n)$, so folgt $m + 1 \neq n + 1$.
  - Sei $M \subseteq N$, $1 \in M$, für alle $n \in M$ sei $n + 1 \in M$ (also $M$ induktiv). Aus der Definition von $N$ folgt $N \subseteq M$. Also $M = N$.
- Bemerkungen:
  - Im Folgenden: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ im Sinne von Satz 3.2. Dazu:

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} \qquad \mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

  - Ein Körper mit Teilmenge positiver Elemente mit (O1-3) heißt ein geordneter Körper.

    Bsp.: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$

    ohne Ordnung: $\mathbb{F}_2, \mathbb{C}$ (denn $i^2 = -1$)

### 3.3 Absolutbetrag und Vorzeichenfunktion/Signumfunktion

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

der Betrag (Absolutbetrag) von $x$ und

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{falls} \quad x > 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0 \\ -1 & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases}$$

das Vorzeichen von $x$. Es gilt:

$$x = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 3.3.1 Folgerungen

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $|-x| = |x|$
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ (falls $y \neq 0$)

   Beweis: Aus $x = \frac{x}{y} \cdot y$ folgt mit 3): $|x| = \left|\frac{x}{y}\right| \cdot |y|$.

## 3.4 Satz: Dreiecksungleichung

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$$

Beweis: Aus $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ folgt $x + y \leq |x| + |y|$. Damit auch $-(x + y) = (-x) + (-y) \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|$ \\

Folgerung:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Beweis:

$$\begin{aligned} |x| = |(x + y) - y| &\leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y| \\ \text{Ebenso: } |y| - |x| &\leq |y - x| (= |x - y|) \\ \Rightarrow ||x| - |y|| &\leq |x - y| \end{aligned}$$

## 3.5 Archimedisches Axiom

- (O.4) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$: $n \cdot x \geq y$. (Archimedisches Axiom)
- Bemerkung: Archimedisch geordneter Körper: geordneter Körper mit (O.4)
- Folgerungen:
  1. $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x$
  2. $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \leq \varepsilon$

     Beweis: Nach 1. existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon \geqslant \frac{1}{n}$.

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 4

# Folgen und Vollständigkeitsaxiom

$\mathbb{Q}$ erfüllt bisherige Axiome. Daher ist die Existenz von $a > 0$ mit $a^2 = 2$ nicht beweisbar mit bisherigen Axiomen.

$\longrightarrow$ Es gibt nicht $p, q \in \mathbb{N}$, sodass $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Beweis durch Widerspruch:

- Annahme: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Dabei kann man annehmen, dass eine der beiden Zahlen p oder q ungerade ist. Dann ist $p^2 = 2 \cdot q^2$, also $p$ gerade. $p$ lässt sich als $p = 2 \cdot p'$ darstellen. Also $4p'^2 = 2 \cdot q^2 \Rightarrow 2p'^2 = q^2$. Damit ist auch $q$ gerade.

## 4.1 Folgen und Konvergenz

### 4.1.1 Folge

Sei $R$ eine Menge. Eine Folge in $R$ ist eine Abbildung $a\colon N \longrightarrow R$ mit $N \subseteq \mathbb{Z}$.

- Jedem $n \in N$ ist $a(n) \in R$ zugeordnet.
- Statt $a(n)$ schreibt man $a_n$.
- Schreibweisen: $(a_n)_{n \in N} \subseteq R$ oder $(a_n; n \in N) \subseteq R$
- Zahlreiche Verkürzungen, wenn aus dem Kontext klar ist was gemeint ist: $(a_n)_{n \in N}$, $(a_n)_n$, $(a_n)$
- Wenn $N$ endlich ist schreibe auch: $(a_1, \ldots, a_n)$
- Wenn $N = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant n_0\}$ für $n_0 \in \mathbb{Z}$, dann schreibe: $(a_n)_{n \geq n_0} \subseteq R$

Folge reeller Zahlen

- $R = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{N}$
- Beispiele:
  1. $a \in \mathbb{R}$, $a_n := a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die konstante Folge
  2. $a_n := (-1)^n$, eine alternierende Folge
  3. $a_0 := 1$, $a_1 := 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 2$ (rekursiv), $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$

     Folge der Fibonacci-Zahlen (Fibonacci = Leonardo de Pisa (1170-1250))

### 4.1.2 Konvergenz

- Sei $a_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Sie heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

- Bezeichnungen:
  - $\Leftrightarrow$: $a_n \longrightarrow a \ (n \to \infty)$
  - $\Leftrightarrow$: $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$
  - $\Leftrightarrow$: $a$ ist Grenzwert der Folge
  - $\Leftrightarrow$: $a$ ist Limes der Folge

- Schreibweise: Für eine Folge in $\mathbb{R}$ bedeutet der Ausdruck:

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

  dass

$$a_n \longrightarrow a \ (n \to \infty)$$

  gilt und

$$\lim_{n\to\infty} a_n := a$$

  definiert wird

- Andere Formulierung: In jeder $\varepsilon$-Umgebung von $a$ liegen fast alle Terme der Folge. ($\varepsilon$-Umgebung: $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$; fast alle: alle außer endlich vielen)

- $(a_n)$ heißt Nullfolge, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

- $(a_n)$ heißt konvergent, wenn es $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \longrightarrow a \ (n \to \infty)$

- $(a_n)$ heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist. Sie heißt divergent (oder uneigentlich konvergent) gegen $\infty$ (bzw. $-\infty$), wenn:

$$\forall K \in \mathbb{R} \, \exists N \in \mathbb{N} : a_n \geq K \, (\text{bzw. } \ a_n \leq K)$$

  für alle $n \geq N$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \, (\text{bzw. } \ -\infty) \qquad (\pm\infty \notin \mathbb{R})$$

- Beispiele:
  1. $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

     Beweis: Für alle $\varepsilon > 0$: $|a_n - a| = |0| < \varepsilon$ für alle $n \geq 1$.
  2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

     Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Folgerung 3.6.1.2 gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Für $n \geq N$ folgt:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

  3. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Beweis: Annahme: konvergent. Sei $a$ Grenzwert.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &= |-(-1)^n - (-1)^n| \\ &= |-((-1)^n + (-1)^n)| \\ &= |2| \cdot |(-1)^n| \\ &\overset{\text{Induktion}}{=} |2| \cdot |(-1)|^n \\ &= 2 \cdot |1|^n = 2 \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon = 1$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$. Damit für $n \geq N$:

$$|a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a - a_{n+1}| < 2$$

4. Fibonacci-Zahl $a_n$. Mit Induktion: $a_n \geq n$. Damit $(a_n)$ bestimmt divergent gegen $\infty$.

### 4.1.3 Satz: Eindeutigkeit des Grenzwertes

Sei $(a_n)$ konvergent: $\lim a_n = a$ und $\lim a_n = a'$. Dann $a = a'$.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$.
  Es gibt $N' \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N'$. Für $n \geq \max\{N, N'\}$ folgt:

  $$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

  Also $|a - a'| < \varepsilon$. Aus Folgerung 3.1.1.10 folgt: $|a - a'| = 0$, $a = a'$.

Sei $(a_n)$ konvergent mit eindeutigem Grenzwert $a$. Dann definiere:

$$\lim_{n \to \infty} a_n := a$$

## 4.2 Folgerungen

Seien $(a_n)$, $(b_n)$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$: $a_n \longrightarrow a \qquad b_n \longrightarrow b$.

Dann:

1. $a_n + b_n \longrightarrow a + b \ (n \to \infty)$

   Beweis:

   - Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es gibt $N' \in \mathbb{N} : \forall n \geq N' : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   - Für $n \geq \max\{N, N'\}$:

   $$\begin{aligned} |(a+b) - (a_n + b_n)| &= |(a - a_n) + (b - b_n)| \leq |(a - a_n)| + |(b - b_n)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

2. $a_n \cdot b_n \longrightarrow a \cdot b \ (n \to \infty)$

   Beweis:

   $$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |a_n \cdot (b_n - b) + b \cdot (a_n - a)| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Sei $\varepsilon > 0$.

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N_1 : |b_n - b| < \frac{1}{2 \cdot (|a| + \varepsilon)} \cdot \varepsilon$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N_2 : |a_n - a| < \underbrace{\frac{1}{2 \cdot (|b| + 1)}}_{<1} \cdot \varepsilon < \varepsilon$$

Für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$:

$$\begin{aligned}
|a_n \cdot b_n - a \cdot b| &< |a_n| \cdot \frac{1}{2 \cdot (|a| + \varepsilon)} \cdot \varepsilon + |b| \cdot \frac{1}{2 \cdot (|b| + 1)} \cdot \varepsilon \\
&\leqslant (|a| + |a_n - a|) \cdot \frac{1}{2 \cdot (|a| + \varepsilon)} \cdot \varepsilon + |b| \cdot \frac{1}{2 \cdot (|b| + 1)} \cdot \varepsilon \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \left( \underbrace{\frac{|a| + \overbrace{|a_n - a|}^{<\varepsilon}}{|a| + \varepsilon}}_{<1} + \underbrace{\frac{|b|}{(|b| + 1)}}_{<1} \right) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \cdot (1 + 1) = \varepsilon \qquad \backslash\backslash
\end{aligned}$$

3. $a_n - b_n \longrightarrow a - b \ (n \to \infty)$

   Beweis: $a_n + (-1) \cdot b_n \longrightarrow a + (-1) \cdot b$ nach 1. und 2. $\backslash\backslash$

4. Ist $b \neq 0$, so gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für $n \geq n_0$. Es gilt:

$$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b} \qquad \left( \left( \frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq n_0} \right)$$

   Beweis:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |b_n - b| < \frac{1}{2} \cdot |b|$$

   Für $n \geq n_0$ folgt:

$$|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq |b| - |b - b_n| \geq \frac{1}{2} \cdot |b| > 0$$

   Genügt zu zeigen: $\frac{1}{b_n} \longrightarrow \frac{1}{b}$ (wegen 2.) Für $n \geq n_0$:

$$\left| \frac{1}{b} - \frac{1}{b_n} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b \cdot b_n|} \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b| \longrightarrow 0$$

   Daraus folgt: $\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \longrightarrow 0$. (Vgl. Folgerung 4.2.8) $\backslash\backslash$

5. Aus $a_n \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt: $a \leq 0$.

   Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Für $n \geq N$ folgt:

$$a = (a - a_n) + a_n \leqslant |a - a_n| + a_n < \varepsilon + 0 = 0$$

   d.h. $a < \varepsilon$. Daher $a \leq 0$ (Folg. 3.1.1.11)

6. Aus $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $a \leq b$.

   Beweis: $a_n - b_n \leq 0$. Dann 5. $\backslash\backslash$

7. Sind $A, B \in \mathbb{R}$, $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann $A \leq a \leq B$.

   Beweis: mit 6. mit konst. Folgen $(A)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(B)_{n \in \mathbb{N}}$ $\backslash\backslash$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

8. Sei $(a_n)$ Nullfolge, $(c_n)$ in $\mathbb{R}$ mit $|c_n| \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann $(c_n)$ Nullfolge.

   Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N} : a_n = |a_n - 0| < \varepsilon$. Für $n \geq N$ folgt: $|c_n - 0| = |c_n| \leq a_n < \varepsilon$

- Beispiel:

$$a_n = \frac{n^2 - 13}{5 \cdot n^2 + n} \longrightarrow \frac{1}{5}$$

  Nämlich:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1 - \frac{13}{n^2}}{5 + \frac{1}{n}} \\ b_n &:= 1 - \frac{13}{n^2} \longrightarrow 1 \qquad 4.2.1,4.2.2. \\ c_n &:= 5 + \frac{1}{n} \longrightarrow 5 \qquad 4.2.1 \end{aligned}$$

  Dann 4.2.4:

$$a_n = \frac{b_n}{c_n} = \frac{1}{5}$$

## 4.3 Cauchy-Folge

Eine Folge $(a_n)$ in $\mathbb{R}$ heißt Cauchy-Folge

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

(A.L. Cauchy (1789-1837))

### 4.3.1 Satz: Konvergenz $\Rightarrow$ Cauchy-Folge

Sei $(a_n)$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Dann ist $(a_n)$ eine Cauchy-Folge.

Beweis:

- Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon$. Für alle $m, n \geq N$ folgt:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

### 4.3.2 Vollständigkeitsaxiom

Vollständigkeitsaxiom: (V) Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.

Bemerkungen:

- Damit alle Axiome für $\mathbb{R}$ formuliert. In $\mathbb{Q}$ ist nicht jede Cauchy-Folge konvergent.
- Axiome für $\mathbb{R}$ (Zusammenfassung): Körperaxiome, Ordnungsaxiome, Vollständigkeitsaxiom. Ein Körper mit diesen Axiomen heißt vollständiger archimedisch geordneter Körper. Je zwei solche Strukturen sind isomorph (ohne Beweis). Also $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmt.

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 4.4 Beschränktheit

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Dann:

- $M$ nach oben beschränkt:
$$:\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in M : x \leq K$$
$K$ heißt obere Schranke von $M$.
- $M$ nach unten beschränkt:
$$:\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in M : x \geq K$$
$K$ heißt untere Schranke von $M$.
- $M$ beschränkt:
$$:\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in M : |x| \leq K$$
($M$ nach oben und nach unten beschränkt)
- Eine Folge $(a_n)$ heißt beschränkt (nach oben/unten), wenn dies für die Menge $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ gilt.

Bemerkungen:

1. Jede endliche Menge ist beschränkt.
2. Sind $M_1$, $M_2$ beschränkt, dann auch $M_1 \cup M_2$.

#### 4.4.1 Satz: Konvergenz $\Rightarrow$ Beschränktheit

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis:

- Die Folge $(a_n)$ sei konvergent: $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < 1$. Für $n \geq N$:
$$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|$$
(Also beschränkt)
- $\{a_n; n < N\}$ endlich, also beschränkt.
- Damit $\{a_n; n \in \mathbb{N}\} = \{a_n \mid n < N\} \cup \{a_n; n \geq N\}$ beschränkt nach Bemerkung 2.

Bemerkung: Umkehrung ist falsch! (z.B. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$)

Beispiel: $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $b \in \mathbb{R}$.

1. $b > 1$: Dann $\lim_{n\to\infty} b^n = \infty$.

   Beweis: Sei $K > 0$. Nach bin. Lehrsatz:
$$b^n = (1 + (b-1))^n \geq 1 + n \cdot (b-1)$$
   Nach (O.4) gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $n_0 \cdot (b-1) \geq K$. Damit für $n \geq n_0$:
$$b^n \geq 1 + n \cdot (b-1) \geq n_0 \cdot (b-1) \geq K$$
2. $0 < b < 1$: Dann $\lim b^n = 0$.

   Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Nach 1. gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass
$$\left(\frac{1}{b}\right)^n \geq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\Leftrightarrow \varepsilon \geq b^n = |b^n - 0|)$$
   für alle $n \geq n_0$.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

3. Sei $|b| < 1$. Dann $\lim b^n = 0$.

   Beweis: Klar für $b = 0$. Sonst $|b^n| = |b|^n \to 0$, $(n \to \infty)$. Daraus $b^n \to 0$. (Folg. 4.2.8)

4. $b = 1$: $\lim b_n = 1$

5. $b = -1$: $(b_n)$ divergent.

6. $b < -1$: $(b_n)$ divergent, da unbeschränkt (nicht bestimmt divergent).

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 5

# Supremum von Mengen, Satz von Bolzano-Weierstraß

## 5.1 Supremum & Infimum

- Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, nach oben beschränkt.
- $s \in \mathbb{R}$ heißt Supremum von $M$ :$\Leftrightarrow$ $s$ ist die kleinste obere Schranke ($\Leftrightarrow$ $s$ obere Schranke und für jede obere Schranke $K$ gilt: $s \leq K$.)
- Bezeichnung: $s = \sup M$
- Falls $M$ nicht nach oben beschränkt ist: $\sup M := \infty$
- Ist $s = \sup M \in M$ so heißt $s$ auch Maximum: $s = \max M$
- Entsprechend: Infimum ($\inf M$), $\inf M = -\infty$, $\min M$ (Minimum)
- Beispiel: $\sup\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\} = 1$ (nicht Maximum!)

### 5.1.1 Satz: Existenz des Supremums

Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, $M$ nach oben beschränkt. Dann existiert $\sup M$.

Beweis:

1. rekursive Definition von Folgen $(u_n)$ und $(K_n)$, wobei $u_n$ keine oberen Schranken und $K_n$ obere Schranken sind und $u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq K_1 \leq K_0$. Es soll gelten:

   $$K_n - u_n = 2^{-n} \cdot (K_0 - u_0)$$

   für $n \in \mathbb{N}$.

   Anfang: $u_0$ nicht obere Schranke, $K_0$ obere Schranke.

   Rekurssionschritt: Seien $u_0, \ldots, u_n$ und $K_0, \ldots, K_n$ gewählt.

   Ist $\frac{1}{2} \cdot (K_n + u_n)$ obere Schranke, dann $K_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (K_n + u_n)$ und $u_{n+1} = u_n$. Sonst: $u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (K_n + u_n)$ und $K_{n+1} = K_n$.

   Damit $u_n \leq u_{n+1} \leq K_{n+1} \leq K_n$. Es gilt:

   $$K_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (K_n - u_n) = 2^{-(n+1)} \cdot (K_0 - u_0)$$

2. $(u_n)$ ist Cauchyfolge:
   - Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $2^{-N} \cdot (K_0 - u_0) < \varepsilon$.

- Für $m \geq n \geq N$ folgt:

$$|u_m - u_n| = u_m - u_n \leq K_N - u_N = 2^{-N} \cdot (K_0 - u_0) < \varepsilon$$

- Daraus folgt:

$$\exists s := \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} (K_n - u_n) = \lim_{n\to\infty} K_n$$

3. $s$ ist Supremum von $M$:
   (a) $s$ ist obere Schranke: Sei $x \in M$. Dann $x \leq K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n \to \infty$: $x \leq s$.
   (b) $s$ kleinste obere Schranke: Sei $K$ obere Schranke. Dann $u_n < K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (sonst $u_n$ obere Schranke). Für $n \to \infty$: $s \leq K$.

Bemerkung: Archimedisches Axiom + Vollständigkeitsaxiom $\Leftrightarrow$ Existenz von $\sup M$ für alle nach oben beschränkten Mengen

### 5.2 Folgerung: Eindeutigkeit der Wurzel

Seien $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eindeutig bestimmbares $b$ mit $b \geq 0$ mit $b^n = a$.

Bezeichnung: $b =: \sqrt[n]{a} =: a^{\frac{1}{n}}$

Beweis: Klar für $a = 0$

1. Seien $x$, $y \geq 0$. Dann
$$x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$$
(Beweis siehe Übung 4). Daraus folgt Eindeutigkeit.

2. Existenz: $b := \sup\{x \geq 0 \mid x^n \leq a\}$ (existiert, denn $\max\{a, 1\}$ obere Schranke).

   Für $k \in \mathbb{N}$ ist $b + \frac{1}{k} \notin \{x \geq 0 \mid x^n \leq a\}$ (da $b$ obere Schranke ist). Daher
$$a < \left(b + \frac{1}{k}\right)^n \to b^n \, (k \to \infty)$$
   Also $a \leq b^n$. Insbesondere $b > 0$.

   Ist $0 < x < b$, so gibt es $y \in \{x \geq 0 \mid x^n \leq a\}$ mit $x < y$, also gilt $x^n < y^n \leq a$. Damit:
$$a > \left(b \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)^n \to b^n \, (k \to \infty)$$
   Also $a \geq b^n$. \\

### 5.3 Monotonie

$(a_n)$ in $\mathbb{R}$ heißt...

- monoton wachsend: $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- streng monoton wachsend: $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- (streng) monoton fallend: $(-a_n)$ (streng) monoton wachsend



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 5.3.1 Satz: Konvergenz von monotonen beschränkten Folgen

Sei $(a_n)$ in $\mathbb{R}$ monoton wachsend (oder fallend) und beschränkt, dann ist $(a_n)$ konvergent.

Beweis:

- Nach Satz 5.1 besitzt $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Supremum a.
- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass $a - \varepsilon < a_N$ (sonst $a - \varepsilon$ obere Schranke). $\Rightarrow a - a_N < \varepsilon$
- Für $n \geq N$ folgt:
$$|a - a_n| = a - a_n \leq a - a_N < \varepsilon$$
Also gilt: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. \\

## 5.4 Hilfssatz: Monotone Teilfolge

Ist $(a_n)$ in $\mathbb{R}$ und $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, so heißt die Folge $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Hilfssatz 5.4: Jede Folge $(a_n)$ in $\mathbb{R}$ besitzt eine monotone Teilfolge.

Beweis:

- Ein Index $n$ heiße „Gipfelstelle“, wenn $a_n \geq a_m$ für alle $m$ mit $n \leq m$.
- Gibt es unendlich viele Gipfelstellen, so gibt es Gipfelstellen $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ Damit ist $(a_{n_j})$ monoton fallend $((a_{n_{j+1}}) \leq (a_{n_j}))$.
- Gibt es endlich viele Gipfelstellen, so gibt es $n_1$ größer als alle Gipfelstellen. Dann gibt es $n_2 > n_1$ mit $a_{n_2} > a_{n_1}$ (da $n_1$ nicht Gipfelstelle), $n_3 > n_2$ mit $a_{n_3} > a_{n_2}, \ldots$ . Damit $(a_{n_j})$ (streng) monoton wachsend.

## 5.5 Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge $(a_n)$ in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Nach HS 5.4: Es gibt eine monotone Teilfolge. Diese ist beschränkt, nach Satz 5.3 folgt konvergent.

## 5.6 Häufungswert

Ist $(a_n)$ in $\mathbb{R}$ so heißt $a \in \mathbb{R}$ Häufungswert (auch Häufungspunkt), wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N > \mathbb{N} \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

In jeder $\varepsilon$-Umgebung von $a$ liegen Folgeterme mit beliebig großem Index, also unendlich viele.

Beispiele:

1. $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \ldots)$
   Menge der Häufungswerte $= [0, 1]$
2. $(a_n)$ konvergent, dann $\lim_{n\to\infty} a_n$ einziger Häufungswert
3. $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \ldots)$
   0 als einziger Häufungswert (aber nicht konvergent!)



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 5.6.1 Satz: Häufungswert & konvergente Teilfolge

Sei $(a_n)$ in $\mathbb{R}$. Dann $a$ Häufungswert von $(a_n) \Leftrightarrow \exists$ Teilfolge $(a_{n_k})$ mit $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$. (Beweis siehe Übung 7 Aufgabe 7.4)

## 5.7 Limes superior/inferior

Für $(a_n)$ in $\mathbb{R}$:

1. limes superior (auch $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$)

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} (\sup\{a_k \mid k \geq n\}) & \text{falls } (a_n) \text{ nach oben beschränkt} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

2. limes inferior (auch $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$)

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} (\inf\{a_k \mid k \geq n\}) & \text{falls } (a_n) \text{ nach unten beschränkt} \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkungen:

- Sind $\emptyset \neq M' \subseteq M \subseteq \mathbb{R}$, dann $\inf M \leq \inf M' \leq \sup M' \leq \sup M$
- $\sup\{a_k \mid k \geq n\} \geq \sup\{a_k \mid k \geq n+1\}$, also $(\sup\{a_k \mid k \geq n\})_n$ monoton fallend
- $\inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\} \leq \lim_{n\to\infty} \inf a_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup a_n \leq \sup\{a_n \mid n \geq 1\}$
- für nach oben beschränkte Teilmengen $A$ von $\mathbb{R}$ gibt es eine Folge $a_n \to \sup A$ in $A$, (Beweis mithilfe Übung 8.2)
- $(x_n) \subseteq A$, $(y_n) \subseteq \lambda A$ mit $x_n \to \sup(A)$ und $y_n \to \sup(\lambda A)$, $\lambda \geqslant 0$

$$\begin{aligned} \sup(\lambda A) &= \lim_{n\to\infty} y_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \lambda \underbrace{\tilde{y}_n}_{\in A} \\ &= \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} \underbrace{\tilde{y}_n}_{\in A} \\ &\leqslant \lambda \cdot \sup A \\ &= \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\lambda \cdot x_n}_{\in \lambda A} \\ &\leqslant \sup(\lambda A) \end{aligned}$$

  Also $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$

Beispiele:

1. $\limsup (-1)^n = 1 \qquad \liminf (-1)^n = -1$
2. $\left(\frac{1}{1}, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \ldots\right) \qquad \limsup = \infty \qquad \liminf = 0$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 6 Reihen

- Sei $(a_n)$ in $\mathbb{R}$, $s_n := \sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k$ für $n \geq n_0$.

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n := (s_n)_{n \geq n_0}$$

  heißt (unendliche) Reihe, $s_n$ Partialsummen.

- Reihe ist also die Folge, z.B. für $n_0 = 1$: $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots$

- Ist $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergent, d.h. $(s_n)$ konvergent, dann auch Summe der Reihe:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n := \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$

  $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ hat also zwei Bedeutungen.

- Beispiel:
  - Reihe: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot k^2 - 1}$
  - Umformung durch Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4 \cdot k^2 - 1} &= \frac{1}{(2k+1) \cdot (2k-1)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{2k+1} + \frac{B}{2k-1} \\
\Rightarrow 1 &= A \cdot (2k-1) + B \cdot (2k+1) = (A+B) \cdot 2k + (B-A) \\
\Rightarrow A + B &= 0 \qquad B - A = 1 \\
\Rightarrow A &= -0{,}5 \qquad B = 0{,}5
\end{aligned}$$

  - Umformung der Reihe:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4 \cdot k^2 - 1} &= 0{,}5 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left( \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \quad \text{Teleskopsumme} \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot k^2 - 1} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

## 6.1 Geometrische Reihe

1. Für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, n \in \mathbb{N}_0$:
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

2. Für $|x| < 1$:
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$
Für $|x| \geq 1$:
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ nicht konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} = \frac{x+x^{n+1}}{1-x}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{x+1}$$

Beweis:

1. $(1-x) \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k - \sum\limits_{k=1}^{n+1} x^k = 1 - x^{n+1}$
2. Klar mit 1).

## 6.2 Satz: Linearkombination

Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) \qquad \text{konvergent}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda \cdot a_k = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad \text{konvergent}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) &= \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k \\ &\longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \end{aligned}$$

Entsprechend 2. Behauptung.

Beispiel: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ (harmonische Reihe):

1. Variante 1: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \ldots$ Geklammerte Ausdrücke sind alle jeweils $> 0{,}5$.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

2. Variante 2: Annahme, dass harmonische Reihe konvergent. Dann:

$$\begin{aligned} s := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{1}{k} + \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{k} \\ &> \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{k} + \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{k} \\ &= 2 \cdot \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{k} = s \\ &\Rightarrow s > s \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Dann:
$$a_n = s_n - s_{n-1} \longrightarrow 0$$
(Umkehrung falsch!)
- Sei $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ Reihe, $n_1 \geq n_0$. Dann:
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \Leftrightarrow \sum_{n=n_1}^{\infty} a_n \text{ konvergent?}$$
$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k = \sum_{k=n_0}^{n_1-1} a_k + \sum_{k=n_1}^{n} a_k$$

## 6.3 Konvergenzkriterien

### 6.3.1 Satz: Allgemeines Cauchy'sches Konvergenzkriterium

Sei $(a_n)$ in $\mathbb{R}$. Dann $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ konvergent

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq m \geq N \quad &: \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon \\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in N \quad &: \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

Beweis:

- $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = s_n - s_{m-1}$.
- Reihe konvergent $\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}$ $(s_n)$ konvergent $\overset{\text{4.3.1 \& Vollständigkeitsaxiom}}{\Leftrightarrow}$ $(s_n)$ Cauchy-Folge $\Leftrightarrow$ rechte Seite mit:
$$|s_n - s_{m-1}| = \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

### 6.3.2 Satz: Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen

Sei $(a_n)$ in $\mathbb{R}$, monoton fallend, $a_n \longrightarrow 0$, $(n \to \infty)$. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \qquad \text{konvergent}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Beweis: s. Übung 6

Beispiele:

1. $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ konvergent. (Summe ist $\ln 2$, Logarithmus siehe 13.2.2)
2. $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ konvergent. (Summe: $\frac{\pi}{4}$, *pi* siehe 14.9.1)

### 6.3.3 Satz: Reihen mit positiven Gliedern

Sei $(a_n)$ in $\mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \geq 0$. Dann:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_n \text{ beschränkt} :\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

Hinweis: Diese Bezeichnung nur für Reihen mit positiven Gliedern.
Beweis:

- $\Rightarrow$ Konvergente Folgen sind beschränkt.
- $\Leftarrow$ Monotone beschränkte Folgen sind konvergent.

### 6.3.4 Satz: Majoranten-Kriterium

$(a_n)$, $(b_n)$ in $\mathbb{R}$, $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$. Dann ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ auch konvergent.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Beweis:

- Sei $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \qquad t_n := \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$
- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass für $n \geq m \geq N$ gilt: $|t_n - t_m| < \varepsilon$. ($(t_n)$ Cauchy-Folge)
- Wegen:

$$\begin{aligned} |s_n - s_m| &= \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \overset{(*)}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k = t_n - t_m \\ &< \varepsilon, \qquad (*) \text{ endliche Summe} \Rightarrow \text{Dreiecksungleichung anwendbar} \end{aligned}$$

Also $(s_n)$ Cauchy-Folge $\Rightarrow$ konvergent. Aus $|s_n| \leq t_n$ folgt letzte Ungleichung für $n \to \infty$.

Beispiel:

- Für $k \geq 2$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} < \infty$
- Beweis: Wie bereits bewiesen ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ konvergent.

$$\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{4}{4n^2-1}$$

Nach Satz 6.3.4 \\.

Bemerkung:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ konvergent?
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 6.4 Absolute Konvergenz

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent

$$:\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent}$$

(Hier ist bei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Erste Bedeutung gemeint.)

#### 6.4.1 Folgerung: Absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, dann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Es gilt:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Beweis mit Satz 6.3.4.

#### 6.4.2 Satz: Quotientenkriterium

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$. Es gebe $N \in \mathbb{N}$, $0 < \vartheta < 1$, außerdem $a_n \neq 0$, sodass:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \vartheta \qquad \text{für alle } n \geq N$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Dann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beweis:

- Für $n \geq N$: $|a_n| \leq \vartheta^{n-N} \cdot |a_N|$, da:

$$\begin{aligned} |a_{N+1}| &\leq \vartheta \cdot |a_N| \\ |a_{N+2}| &\leq \vartheta \cdot |a_{N+1}| \leq \vartheta^2 \cdot |a_N| \\ |a_{N+n}| &\leq \vartheta^n \cdot |a_N| \qquad \text{(Induktion nach } n\text{)} \end{aligned}$$

- Dann gilt:

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_N| \cdot \vartheta^{n-N} = |a_N| \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta^k < \infty \qquad \text{geom. Reihe}$$

  Dann Satz 6.3.4 (Majorantenkriterium)

Beispiele:

1. $e := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ist konvergent:

$$\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{<1,\ \text{für } N \geqslant 2} \longrightarrow 0$$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergent:

$$\left|\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}\right| = \left(\frac{(n+1)}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ mit Quotientenkriterium nicht entscheidbar:

$$\left| \frac{\frac{1}{(n+1)^k}}{\frac{1}{n^k}} \right| = \left( \frac{n}{n+1} \right)^k \longrightarrow 1$$

### 6.4.3 Satz: Wurzelkriterium

Sei $(a_n)$ in $\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beweis:

- Wähle $\lim\limits_{n\to\infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}} < \vartheta < 1$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$: $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \vartheta$ für alle $n \geq N$, d.h. $|a_n| \leq \vartheta^n$. Da $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \vartheta^n < \infty$ (geom. Reihe), folgt die Behauptung aus Satz 6.3.4.

Beispiele:

1. $1 + 0 + \frac{1}{2^2} + 0 + \frac{1}{2^4} + 0 + \ldots$ Quotientenkriterium nicht anwendbar, aber Wurzelkriterium liefert Konvergenz.
2. $\sum \frac{1}{n^k}$ mit Wurzelkriterium nicht entscheidbar:

$$\left( \frac{1}{n^k} \right)^{\frac{1}{n}} = \left( \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^k$$

   Sicher nicht $\limsup < 1$, sonst $\sum \frac{1}{n}$ konvergent. (Übung: $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$)

## 6.5 Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen

Ein Dezimalbruch ist eine Reihe

$$\pm \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$, $a_n \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq a_n \leq 9$.

### 6.5.1 Satz: Konvergenz von Dezimalbrüchen

Jeder Dezimalbruch ist absolut konvergent, also konvergent gegen eine reelle Zahl.

Beweis: Es gilt: $|a_n \cdot 10^{-n}| \leq 9 \cdot 10^{-n}$. Daraus folgt:

$$9 \sum_{n=k}^{\infty} 10^{-n} = 9 \cdot 10^k \sum_{n=k}^{\infty} \left( \frac{1}{10} \right)^{n-k} < \infty \qquad \text{geom. Reihe}$$

Dann Satz 6.3.4. \\

### 6.5.2 Satz: Reihenentwicklung einer reellen Zahl

Sei $x \in \mathbb{R}$. Sei $(b_n)_{n\geq 0}$ Folge in $(0, \infty)$, $b_n \to 0$, $(n \to \infty)$, $x < b_0$. Dann gibt es $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}_0$: $b_{n-1} > a_n \cdot b_n$ für alle $n$, sodass:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

Beweis:

- Folge $(a_n)$ rekursiv definieren:



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- $a_1 := \max\{k \in \mathbb{N} \mid k \cdot b_1 \leq x\}$, also $x_1 := a_1 \cdot b_1$. Dann $a_1 \cdot b_1 < b_0$.
- Seien $a_1, \ldots, a_n$ schon bestimmt mit:

$$a_n := \max\left\{ k \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n-1} a_j \cdot k_j + k \cdot b_n \leq x \right\}$$

- Wir definieren:

$$a_{n+1} := \max\left\{ k \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot k_j + k \cdot b_{n+1} \leq x \right\}$$

  Dann $a_{n+1} \cdot b_{n+1} < b_n$, sonst Widerspruch zur Definition von $a_n$.

- $(x_n)$ monoton wachsend und aus $x_n + b_n > x$ folgt $b_n > x - x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $x_n \to x$, $(n \to \infty)$.

### 6.5.3 Folgerung: Dezimalbruchentwicklung

Jede reelle Zahl lässt sich in einem Dezimalbruch entwickeln.

Beweis:

- ohne Einschränkung: $x \geq 0$
- Es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $x < 10^{-k}$. Anwendung von Satz 6.5.2 mit $(b_n) = (10^{-n})_{n \geq k}$ ergibt Behauptung, da $(b_n)$ die geforderten Voraussetzungen erfüllt:

$$\begin{aligned} 10^{-n} &\longrightarrow 0 \\ a &< \frac{10^{-(n-1)}}{10^{-n}} = 10 \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Satz 6.5.1, Folgerung 6.5.3: Bekannte Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen gesichert.
- Statt Basis 10 beliebige Basis $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$: $b$-adische Brüche:
  - $b = 2$: duale/dyadische Brüche
  - $b = 8$: Oktalzahlen
  - $b = 16$: Hexadezimalzahlen (Ziffern: $0, \ldots, 9, A, \ldots, F$)
  - $b = 60$: sexagesimale Zahlen (Babylonier/Uhrzeit)

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 7 Überabzählbarkeit von Mengen

Seien $M$, $N$ Mengen.

- $M$ heißt endlich $:\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0, f\colon \{0, \ldots, n\} \to M$ (bijektiv)
  ($\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0, f\colon \{0, \ldots, n\} \to M$ surjektiv)
- $M$ heißt unendlich $:\Leftrightarrow$ wenn $M$ nicht endlich ist
- $M$ heißt abzählbar unendlich $:\Leftrightarrow \exists f : \mathbb{N} \to M$ bijektiv
  ($\Leftrightarrow$ M ist unendlich, $\exists f : \mathbb{N} \to M$ surjektiv)
- $M$ heißt abzählbar $:\Leftrightarrow M$ endlich oder abzählbar unendlich
- $M$ heißt überabzählbar $:\Leftrightarrow M$ nicht abzählbar
- $M$ und $N$ haben die gleiche Mächtigkeit $:\Leftrightarrow \exists f : M \to N$ bijektiv

Bemerkungen:

- $M$ abzählbar, $N \subseteq M \Rightarrow N$ abzählbar
- $\exists f : \mathbb{N} \to M$ surjektiv $\Rightarrow M$ abzählbar

Beispiele:

1. $\mathbb{N}$ ist abzählbar
2. $\mathbb{Z}$ ist abzählbar: $(0, 1, -1, 2, -2, \ldots)$

### 7.1 Satz: Vereinigung von abzählbaren Mengen

Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.

Beweis:

- Für $m \in \mathbb{N}$: $M_m := \{x_{mn} \mid n \leftarrow \mathbb{N}\}$
- Anwendung des Cantorschen Diagonalverfahrens (G. Cantor, 1845-1918)

  $$(y_1, y_2, \ldots) = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{13}, \ldots)$$

  Dann:

  $$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$$

- Genauer: $\exists \varphi\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ bijektiv. Zum Beispiel:

  $$(m, n) \mapsto \frac{1}{2}(m + n)(m + n + 1) + m$$

### 7.2 Satz: Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $A_n := \left\{ \frac{k}{n} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ abzählbar. Also ist $Q = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ abzählbar nach Satz 7.1. \\

### 7.3 Satz: Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Sei $a$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann ist $[a, b]$ überabzählbar. Also auch $\mathbb{R}$ überabzählbar.

Beweis:

- Sei $(x_n)_n$ eine beliebige Folge in $[a, b]$. Wir zeigen, dass es $x \in [a, b] \backslash \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gibt. (Daher gibt es keine surjektive Abbildung $\varphi \colon \mathbb{N} \to [a, b]$.)
- Es gibt $a \leqslant a_1 < b_1 < b$ oder $a < a_1 < b_1 \leqslant b$ und $b_1 - a_1 = \frac{1}{3}(b - a)$, sodass $x_1 \notin [a_1, b_1]$. Dann gibt es $a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1$, $b_2 - a_2 = \frac{1}{3}(b_1 - a_1)$, sodass $x_2 \notin [a_2, b_2]$.

  Allgemein:

  $$\exists a_n < b_n, [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}], b_n - a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (b - a) : x_1, \ldots, x_n \notin [a_n, b_n]$$

- Dann $(a_n)_n$ Cauchy-Folge. Für $m \geq n$:

  $$|a_m - a_n| = a_m - a_n \leq b_n - a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (b - a)$$

  $x := \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$. Also $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}$.
- Es folgt $x \neq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{R}$ als Obermenge von $[a, b]$ ist auch überabzählbar. (Bemerkung 1) \\

Bemerkung:

1. Für eine Menge $M$ sei $\wp := \{N; N \subseteq M\}$ die Potenzmenge.
2. $(0, 1)$ bzw. $\mathbb{R}$ hat die gleiche Mächtigkeit wie $\wp(\mathbb{N})$.
3. $M \neq \emptyset$. Dann $\nexists \varphi \colon M \to \wp(M)$ surjektiv.

#### 7.3.1 Folgerung: Abzählbarkeit irrationaler Zahlen

$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ (irrationale Zahlen) ist überabzählbar.

Beweis: Anderenfalls $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ abzählbar. \\

Bemerkung:

- $x \in \mathbb{R}$ heißt algebraisch $:\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} : a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$
- $\mathbb{A}$: Menge der algebraischen Zahlen
- $\mathbb{A}$ ist ein Körper, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$, z.B. $\sqrt{2} \in \mathbb{A} \backslash \mathbb{Q}$
- $\mathbb{A}$ ist abzählbar.
- $x \in \mathbb{R}$ heißt transzedent $:\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{A}$ konkrete transzedente Zahlen schwer zu finden
- $\mathbb{R} \backslash \mathbb{A}$ ist überabzählbar (also $\neq \emptyset$)
- $e, \pi$ sind transzedent. (Für $\pi$ 1882 durch Lindemann. Quadratur des Kreises ist nicht möglich)



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 8 Umordnung von Reihen

Darf man konvergente Reihen umordnen? Im Allgemeinen nicht möglich!

## 8.1 Satz: Umordnung absolut konvergenter Reihen

Für eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$ und eine bijektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ Umordnung. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, Grenzwert $a$. Dann konvergiert jede Umordnung ebenfalls gegen $a$.

Beweis:

- Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit:
$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$
- Es gibt $N' \in \mathbb{N}$ mit $\tau(n) > N$ für alle $n \geq N'$. Für $n \geq N'$ gilt:
$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{\tau(j)} - a \right| &\leq \left| \sum_{j=1}^{n} a_{\tau(j)} - \sum_{k=1}^{N} a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{N} a_k - a \right| \\ &\leq 2 \cdot \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| < \varepsilon \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

Bemerkung: Ist $\sum a_n$ konvergent, nicht absolut konvergent, so gilt: Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gibt es eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = c$ und es gibt divergente Umordnungen. (Riemannscher Umordnungssatz)

Hinweise:

1. Es gibt zwei Teilfolgen $(a_{n_j})$, $(a_{m_j})$, sodass $a_{n_j} \geq 0$ und $a_{m_j} < 0$. Also $\sum_j a_{n_j} = \infty$ und $\sum_j a_{m_j} = -\infty$.
2. Sei $c \in \mathbb{R}$. Summiere 1. Reihe bis erstmals $> c$. Dann summiere 2. Reihe bis erstmals $< c$. Dann summiere 1. Reihe bis erneut erstmals $> c$, ... . Aus $(a_n)$ Nullfolge folgt: Grenzwert $= c$.

## 8.2 Satz: Großer Umordnungssatz

Für $i, j \in \mathbb{N}_0$ sei $a_{ij} \in \mathbb{R}$ und es gilt:
$$M := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \;\middle|\; m \in \mathbb{N}_0 \right\} < \infty$$

Dann:

1. Ist $\tau\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ injektiv, so ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ absolut konvergent. Insbesondere sind $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ $(i \in \mathbb{N}_0)$ und $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{ij}$ $(j \in \mathbb{N}_0)$ absolut konvergent.

2. Die Reihen $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{ij}\right)$, $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{ij}\right)$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{l=0}^{k} a_{k-l,l}\right)$ sind absolut konvergent und haben den gleichen Grenzwert.

Beweis:

1. Sei $\tau\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine injektive Abbildung. Bezeichnung: $\tau(n) := (\tau_1(n), \tau_2(n))$ Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $m := \max\{\tau_1(p), \tau_2(p); 0 \le p \le n\}$. Dann:

$$\sum_{p=0}^{n} |a_{\tau(p)}| \le \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \le M$$

   Damit $\sum\limits_{p=0}^{\infty} a_{\tau(p)}$ absolut konvergent.

2. Es genügt dies für die erste und die dritte Reihe zu zeigen (Symmetrie). Für $m \le n$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{m}\left|\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\right| \le \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} |a_{ij}| \le M$$

   Für $n \to \infty$ folgt:

$$\sum_{i=0}^{m}\left|\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\right| \le M$$

   Damit 1. Reihe absolut konvergent.

   Sei $\tau\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ bijektiv, z.B. durch das 1. Cantorsche Diagonalverfahren, gegeben.
   Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $N \in \mathbb{N}_0$, sodass $\sum\limits_{p=N+1}^{\infty} |a_{\tau(p)}| \le \varepsilon$.
   Sei $n \ge N$, $m := \max\{\tau_1(p), \tau_2(p); 0 \le p \le n\}$. Für $k, l \ge m$ folgt:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} a_{ij} - \sum_{p=0}^{n} a_{\tau(p)}\right| &\le \sum_{p>n} |a_{\tau(p)}| \\ &\le \sum_{p=N+1}^{\infty} |a_{\tau(p)}| \le \varepsilon\end{aligned}$$

   Grenzübergänge: $l \to \infty, k \to \infty, n \to \infty$ liefern:

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} - \sum_{p=0}^{\infty} a_{\tau(p)}\right| \le \varepsilon$$

   Damit $= 0$. Also Reihensumme gleich.

   Die 3. Reihe entspricht dem 1. Cantorschen Diagonalverfahren.

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 8.3 Folgerung: Cauchy-Produkt

Seien $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$, $\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j$ absolut konvergente Reihen. Dann gilt:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} b_{k-l} \cdot c_l$$

wobei die letzte Reihe absolut konvergent ist.

Beweis: Satz 8.2 benutzen mit $a_{ij} := b_i \cdot c_j$:

$$\begin{aligned}
\text{linke Seite} = \sum_{i=0}^{\infty} \left( b_i \sum_{j=0}^{\infty} c_j \right) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_i \cdot c_j \right) \\
\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |b_i \cdot c_j| &= \sum_{i=0}^{m} |b_i| \cdot \sum_{j=0}^{m} |c_j| \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} |b_i| \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |c_j| \\
&= M < \infty
\end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 9 Exponentialreihe

## 9.1 Satz: Konvergenz

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Exponentialreihe

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

absolut konvergent.

Beweis: mit Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| \to 0 \, (n \to \infty)$$

Eulersche Zahl e:

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \exp(1) \qquad e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

## 9.2 Satz: Funktionalgleichung

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Beweis: mit Cauchy-Produkt (Satz 8.3)

$$\begin{aligned}
\exp(x) \cdot \exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{x^{k-l}}{(k-l)!} \cdot \frac{y^l}{l!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \frac{x^{k-l}}{(k-l)!} \cdot \frac{y^l}{l!} \cdot k! \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (x+y)^k \\
&= \exp(x+y)
\end{aligned}$$

## 9.3 Folgerungen

1. $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(-x) = (\exp(x))^{-1} =: \exp(x)^{-1} \quad (\exp(x) \neq 0)$

   Beweis:

   $$1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$$

2. Für alle $x > 0$: $\exp(x) > 1$

   Beweis:
$$\exp(x) = 1 + x + \underbrace{\frac{x^2}{2!}}_{>0} + \underbrace{\frac{x^3}{3!}}_{>0} + \dots$$

3. $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0$

   Beweis: Für $x > 0$ siehe 2. Für $x < 0$:
$$\exp(x) = \exp(-x)^{-1} > 0$$

4. $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$

   Beweis:
$$1 < \exp(y - x) = \exp(y) \cdot \exp(x)^{-1}$$

5. $\forall n \in \mathbb{Z} : \exp(n) = e^n$

   Beweis:

   - Induktion für $\mathbb{N}_0$:
     - I.A.: $\exp(0) = 1 = e^0$
     - I.S.: $\exp(n + 1) = \exp(n) \cdot \exp(1) = e^n \cdot e^1 = e^{n+1}$
   - Für $n < 0$:
$$\exp(n) = \frac{1}{\exp(-n)} = \frac{1}{e^{-n}} = e^n$$

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 10
# Metrische Räume

Ziel: Abstrakte Struktur, für die Konvergenz erklärt werden kann.

Für Mengen $X$, $Y$ ist das kartesische Produkt definiert:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\} \qquad \text{Menge der geordneten Paare}$$

## 10.1 Definition

Sei $X$ eine Menge. Eine Metrik auf $X$ ist eine Abbildung $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ mit:

1. $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
2. $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung) („Umwege sind mindestens genauso lange“)
3. $\forall x \in X : d(x, x) = 0$ (Positive Definitheit)
4. $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ (Trennungseigenschaft)

Metrischer Raum ist Paar $(X, d)$. (ohne 4.: $d$ Halbmetrik)

Beispiele:

- $(\mathbb{R}, d)$, $d(x, y) = |x - y|$ (mit Dreieckungleichung des Betrages)
- $X$ Menge ($d$: diskrete Metrik)

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls}\, x = y \\ 1 & \text{falls}\, x \neq y \end{cases}$$

- Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $A \subseteq X$. Sei $d_A\colon A \times A \to [0, \infty)$, $d_A(x, y) := d(x, y)$ $(x, y \in A)$. Dann $(A, d_A)$ metrischer Raum. $d_A$: auf $A$ induzierte Metrik

  z.B.: $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$

### 10.1.1 Hilfssatz

Sei $(X, d)$ metrischer Raum. Dann:

$$\forall x, y, z \in X : |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \\ d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

### 10.1.2 Komplexe Zahlen

- Ziel: $\mathbb{R}$ vergrößern, sodass es $i$ gibt mit $i^2 = -1$: $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\end{aligned}$$

- $\mathbb{C}$ ist ein Körper mit Nullelement $(0, 0)$ und Einselement $(1, 0)$.
- Ist $(x, y) \neq (0, 0)$, d.h. mindestens eine der Zahlen $x, y \neq 0$, dann:

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$$

- $\mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto (x, 0)$, Abbildung erhält Addition und Multiplikation. In diesem Sinne $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Setzt man $i := (0, 1)$, so erhält man

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + i \cdot y$$

  Es gilt $i^2 = (0, 1)^2 = -1$.
- Für $z = x + i \cdot y$, $x, y \in \mathbb{R}$:
  - Re(z) := x [Realteil von z]

$$Re(z) = 0{,}5 \cdot (z + \overline{z})$$

  - Im(z) := y [Imaginärteil von z]

$$Im(z) = \frac{1}{2i} \cdot (z - \overline{z})$$

  - $\overline{z} := x - i \cdot y$, die konjugiert komplexe Zahl
  - $\overline{z} = z$, wenn $z$ reell
  - $\overline{\overline{z}} = z$
  - $z \cdot \overline{z} \geq 0$
- Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

- Betrag einer komplexen Zahl:

$$|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\overline{z}|$$

  Für $z \in \mathbb{R}$ ergibt sich der schon bekannte Betrag.

  Eigenschaften des Betrages: $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

  1. $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
  2. $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$

$$\begin{aligned}z_1z_2 \cdot \overline{z_1 \cdot z_2} &= z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\\ &= (z_1 \cdot \overline{z_1}) \cdot (z_2 \cdot \overline{z_2})\end{aligned}$$

  3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1 + z_2})\\ &= z_1 \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2}\\ &= |z_1|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2\\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2\\ &= (|z_1| + |z_2|)^2\end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

4. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ (Beweis wie in $\mathbb{R}$)

- Aus dem Betrag: Metrik $d$
$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$$

- Für $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{x - i \cdot y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$$

- Sind $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ so ergibt sich als Lösung der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$:
$$z_{1/2} = \frac{1}{2a} \cdot (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$$
Ist $b^2 - 4ac < 0$, dann $z_{1/2}$ komplex:
$$z_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \cdot \frac{i}{2a} \cdot \sqrt{4ac - b^2}$$

- Auch Gleichungen $a_n \cdot z_n + \ldots + a_0 = 0$ (wobei sogar $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$) besitzen immer $(n)$ Lösungen (Fundamentalsatz der Algebra). $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

### 10.1.3 Beispiel: Die metrischen Räume $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{R}^n$

- $M^\Lambda := \{f \mid f \colon \Lambda \to M\}$, die Menge der Abbildungen von $\Lambda$ in die Menge $M$
- Im Folgenden: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
- Sei $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &:= \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}\} \\ &= \{x \mid x : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K}\} \qquad \text{dabei } x_j := x(j) \\ &= \mathbb{K}^{\{1, \ldots, n\}} \end{aligned}$$

- $\mathbb{K}^n$ ist Vektorraum über $\mathbb{K}$. (Beweis siehe Lineare Algebra.)
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &:= (x_1, \ldots, x_n) \\ \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Für $x \in \mathbb{K}^n$ definieren wir den (euklidischen) Betrag (euklidische Norm):
$$|x|_2 := \left( \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
(entspricht dem „Abstand“ des Vektors $x$ zur 0)

- Wir zeigen, dass dann die Dreiecksungleichung
$$|x + y|_2 \leq |x|_2 + |y|_2$$
erfüllt ist für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$.



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Dazu wird zunächst die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j| \leq |x|_2 \cdot |y|_2$$

bewiesen. Für Beweis ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_j$, $y_j \geq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, sonst betrachte $|x_j|$ und $|y_j|$.

1. Klar, falls $x = 0$ oder $y = 0$.
2. $|x|_2 = |y|_2 = 1$. Dann:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j + \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \\ &= 2 \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j\right) \end{aligned}$$

3. $x \neq 0$, $y \neq 0$. Dann:

$$\left|\frac{1}{|x|_2} \cdot x\right|_2 = \left|\frac{1}{|y|_2} \cdot y\right|_2 = 1$$

Nach 2:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j \cdot y_j}{|x|_2 \cdot |y|_2} \leq 1 \qquad \backslash\backslash$$

- Beweis der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |x+y|_2^2 &\leq \sum_{j=1}^{n} ||x_j| + |y_j||^2 \qquad \text{Dreieckungleichung in } \mathbb{K} \\ &= \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j| + \sum_{j=1}^{n} |y_j|^2 \\ &\leq |x|_2^2 + 2 \cdot |x|_2 \cdot |y|_2 + |y|_2^2 \\ &= (|x|_2 + |y|_2)^2 \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

- Durch $d(x, y) := |x - y|_2$ ist auf $\mathbb{K}^n$ eine Metrik erklärt.
- $\mathbb{K}^n$ metrischer Raum immer mit obiger Metrik, falls nicht anders gesagt. Statt $|x|_2$ auch $|x|$.
- Schreibweise: Statt $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$ schreibe $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ oder $f(x_1, \ldots, x_n)$

## 10.2 Konvergenz

- Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $X$ (d.h. $x : \mathbb{N} \to X$), $x \in X$. $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ (oder $x = \lim_{n \to \infty} x_n$)

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon$$

$$(\Leftrightarrow d(x_n, x) \to 0 \, (n \to \infty))$$

Also $(x_n)$ konvergent gegen x.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- $(x_n)$ Cauchyfolge
$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N : d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

- Bemerkung: $(x_n)$ konvergent $\Rightarrow$ $(x_n)$ Cauchy-Folge

  Beweis: $x_n \to x$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $m$, $n \geq N$:
$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon \qquad \backslash\backslash$$

- $(X, d)$ heißt vollständig $:\Leftrightarrow$ Jede Cauchyfolge ist (in $X$) konvergent. (der Zusatz "in $X$" ist nicht notwendig, da dies sich schon aus der Definition ergibt, kann aber Verwechselungen vermeiden)

### 10.2.1 Satz: Konvergenz im $\mathbb{K}^n$

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}^n$, $y \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt:
$$x_k \to y \Leftrightarrow x_{kj} \to y_j \, (k \to \infty) \forall j = 1, \ldots, n$$

Beweis:

- „$\Rightarrow$" Für $j = 1, \ldots, n$ gilt:
$$|x_{kj} - y_j| \leq |x_k - y|_2 = d(x_k, y) \to 0 \, (n \to \infty)$$

- „$\Leftarrow$" mit (1)
$$|x_k - y|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_{kj} - y_j|^2 \to 0 \, (k \to \infty)$$

Folgerung:
$$\lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} x_{k1} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{k\to\infty} x_{k1} \\ \vdots \\ \lim_{k\to\infty} x_{kn} \end{pmatrix}$$

## 10.3 Satz: Vollständigkeit des $\mathbb{R}^n$

$(\mathbb{R}^n, |\cdot|_2)$ ist vollständig.

Beweis:

- Sei $(x_n)$ Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$. Wegen $|x_{kj} - x_{lj}| \leq |x_k - x_l|_2$ ist auch $(x_{kj})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, also konvergent. Nach Satz 10.2 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent. $\backslash\backslash$

Bemerkung: Insbesondere $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ vollständig und $\mathbb{C}^n$ vollständig.

## 10.4 Kugeln

- Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Sei $x \in X$, $r > 0$, $(r \in \mathbb{R})$.
$$\begin{aligned} B(x, r) &:= \{y \in X \mid d(y, x) < r\} && \text{offene Kugel} \\ B[x, r] &:= \{y \in X \mid d(y, x) \leq r\} && \text{abgeschlossene Kugel} \end{aligned}$$

- $U \subseteq X$ heißt Umgebung von $x$
$$:\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq U$$

  Insbesondere: $B(x, \varepsilon)$ Umgebung von $x$ genannt $\varepsilon$-Umgebung.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- $U \subseteq X$ heißt offen $:\Leftrightarrow$ Für jedes $x \in U$ ist $U$ Umgebung von $x$. Bzw. $\Leftrightarrow \forall x \in U \, \exists \varepsilon > 0 :$ $B(x, \varepsilon) \subseteq U$
- $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen $:\Leftrightarrow X \backslash A$ offen
- Beispiele:
  1. Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
     (a) $(a, b)$ offen

     Sei $x \in (a, b)$. Dann $B(x, \min\{b - x, x - a\}) \subseteq (a, b)$
     (b) $(a, \infty)$ offen
     (c) $[a, b)$ nicht offen
     (d) $[a, b] = \mathbb{R} \backslash ((-\infty, a) \cup (b, \infty))$ also $[a, b]$ geschlossen.
  2. $(X, d)$ metrischer Raum, $a \in X$, $r > 0$. Dann $B(a, r)$ offen.

     Sei $x \in B(a, r)$. Dann $\varepsilon := r - d(a, x) > 0$. Es gilt $B(x, \varepsilon) \subseteq B(a, r)$. Für $y \in B(x, \varepsilon)$ (d.h. $d(y, x) < \varepsilon$) ist:

     $$\begin{aligned} d(y, a) &\leq d(y, x) + d(x, a) < \varepsilon + d(x, a) \\ &= (r - d(a, x)) + d(x, a) = r \qquad \backslash\backslash \end{aligned}$$

  3. $U := \{z \in \mathbb{C}; Re(z) > 0\}$ ist offen

### 10.4.1 Satz: Abgeschlossenheit & Konvergenz

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $A \subseteq X$. Dann: $A$ abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Ist $(x_n)$ in $A$, $x_n \to x$ (in $X$), dann $x \in A$.

Beweis:

1. „$\Rightarrow$“
   Sei $(x_n)$ in A, $x_n \to x$ (in $X$). Annahme: $x \notin A$. Da $X \backslash A$ Umgebung von $x$ ist, gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in X \backslash A$ für alle $n \geq N$.

   Bemerkung: $(x_n)$ in $X$, $x \in X$: $x_n \to x \Leftrightarrow \forall U \subseteq X$, $U$ Umgebung von $x$ $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N :$ $x_n \subseteq U$
2. „$\Leftarrow$“
   Annahme: $A$ nicht abgeschlossen, d.h. $X \backslash A$ nicht offen. Dann gibt es $x \in X \backslash A$, sodass $X \backslash A$ nicht Umgebung von $x$ ist. Daher $B(x, \frac{1}{n}) \not\subseteq X \backslash A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ($\Leftrightarrow B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$).
   Wähle $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann $(x_n)$ in $A$, $x_n \to x (\notin A)$. D.h. rechte Seite von Satz 10.4 nicht erfüllt.

### 10.4.2 Häufungswert im Metrischen Raum

$x$ ist Häufungswert von $(x_n) \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} : B(x, \varepsilon) \cap \{x_j \mid n < j\} \neq \emptyset$$

In jeder $\varepsilon$-Kugel um $x$ liegen unendlich viele Folgenglieder.

$$\Leftrightarrow \exists \text{ Teilfolge } (x_{n_k}) \text{ mit } x = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$$

(Beweis ist Verallgemeinerung zu Übung 7 Aufgabe 7.4)



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 11 Stetigkeit

## 11.1 Definition

### 11.1.1 Grundbegriffe

1. Funktionen:
   - Sei $D$ eine Menge.
     - $f\colon D \to \mathbb{R}$ reelle Funktion
     - $f\colon D \to \mathbb{C}$ komplexe Funktion
     - $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ vektorwertige Funktion
   - Graph von $f$ mit $f\colon D \to Y$.
   $$\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) \in D \times Y \mid x \in D\}$$
   - Beispiele:
     (a) $\operatorname{abs}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$
     (b) $\operatorname{entier}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon \operatorname{entier}(x) := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$.
     Auch $\lfloor x \rfloor := \operatorname{entier}(x)$ (Gauß-Klammer)
     (c) Exponentialfunktion
     (d) Dirichlet-Funktion:
     $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$
2. Rationale Operatoren auf reellen Funktionen:
   - Sei $f$, $g\colon D \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann für alle $x \in D$:
   $$f + g\colon D \to \mathbb{R} : (f+g)(x) := f(x) + g(x)$$
   $$\lambda \cdot f\colon D \to \mathbb{R} : (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$
   - Damit $\mathbb{R}^D$ – die Menge der Abbildungen von $D \to \mathbb{R}$ – ein Vektorraum.
   $$\begin{aligned} f \cdot g \quad &: \quad D \to \mathbb{R} : (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \\ \frac{f}{g} \quad &: \quad D' \to \mathbb{R} : \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$
   für $D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$
3. Komposition von Abbildungen
   - Seien $D$, $E$, $F$ Mengen, $f\colon D \to E$, $g\colon E \to F$. Dann
   $$g \circ f\colon D \to F\colon (g \circ f)(x) := g(f(x))$$
   - Beispiel: Für $x \in \mathbb{R}$: $|x| = \sqrt{x^2}$. Also $\operatorname{abs} = \operatorname{sqrt} \circ \operatorname{sq}$, wobei $\operatorname{sq}(x) := x^2$ und $\operatorname{sqrt}(x) := \sqrt{x}\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$)

### 11.1.2 Stetigkeit

- Seien $(X, d)$ und $(Y, e)$ metrische Räume, $f\colon X \to Y$, $a \in X$. $f$ stetig in $a$

$$\begin{aligned} :\Leftrightarrow \quad & \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : d(x,a) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(a)) < \varepsilon \\ \Leftrightarrow \quad & \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_X(a,\delta)) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon) \end{aligned}$$

  („$f(x)$ nahe bei $f(a)$, wenn $x$ nahe bei $a$ ist.“)

- $f$ stetig (auf $X$) $:\Leftrightarrow$ $f$ in jedem Punkt von $x$ stetig.

- Beispiele:

  1. Konstante Abbildung:
  $$f\colon X \to Y : x \mapsto c$$
  ist stetig ($c \in Y$). Dabei $\delta$ beliebig wählbar.
  2. Identische Abbildung:
  $$id_x\colon X \to X : x \mapsto x$$
  ist stetig. ($\delta := \varepsilon$)
  3. $$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$$
  ist stetig.

     Beweis: $a \in \mathbb{R}$. $||x| - |a|| \leq |x - a|$. ($\delta := \varepsilon$)
  4. Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

     Beweis:

     (a) Stetigkeit in a=0
     - Für $|x| \leq 1$ gilt:
     $$\begin{aligned} |\exp(x) - \exp(0)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \\ &\leq |x| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq |x| \cdot e \end{aligned}$$
     - Sei $\varepsilon > 0$. Mit $\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{e}\right\}$ folgt: Aus $|x| = |x - 0| < \delta$ folgt $|\exp(x) - \exp(0)| < \varepsilon$.

     (b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:
     $$\begin{aligned} |\exp(x) - \exp(a)| &= |\exp(a) \cdot \exp(x - a) - \exp(a)| \\ &= \exp(a) \cdot |\exp(x - a) - 1| \end{aligned}$$
     Sei $\varepsilon > 0$. Nach (a) existiert $\delta > 0$: Für $y \in \mathbb{R}$ mit $|y| < \delta$ gilt $|\exp(y) - 1| < \frac{\varepsilon}{\exp(a)}$. Für $|x - a| < \delta$ folgt:
     $$|\exp(x) - \exp(a)| < \exp(a) \cdot \frac{\varepsilon}{\exp(a)} = \varepsilon$$



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 11.1.3 Satz: Folgenstetigkeit

Seien $(X, d)$ und $(Y, e)$ metrische Räume, $a \in X$, $f\colon X \to Y$. Dann äquivalent:

1. $f$ stetig in $a$
2. Für jede konvergente Folge $(a_n)$ in $X$ mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$$

   (d.h. $f$ ist folgenstetig in $a$).

Beweis:

1. „$\Rightarrow$“
   - Sei $(a_n)$ in $X$, $a_n \to a$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, sodass $f(B_x(a, \delta)) \subseteq B_y(f(a), \varepsilon)$.
   - Es gibt $N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : a_n \in B_x(a, \delta)$. Also für alle $n \geq N$:

$$f(a_n) \in B_x(f(a), \varepsilon) \quad (\Leftrightarrow e(f(a_n), f(a)) < \varepsilon)$$

2. „$\Leftarrow$“ (Kontraposition)
   - Annahme: $f$ nicht stetig in $a$, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x \in B_x(a, \delta) \text{ mit } f(x) \notin B_y(f(a), \varepsilon)$$

     insbesondere

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in X \text{ mit } d(x_n, x) < \frac{1}{n} (= \delta) \wedge e(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$$

     Dann $(x_n)$ in $X$, $x_n \to a$, $f(x_n) \not\to f(a)$. Also 2.nicht erfüllt. \\

### 11.2 Satz: Addition + Multiplikation von stetigen Funktionen

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $f$, $g\colon X \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$ in $a$ stetig. Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}\colon X' \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $X' = \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$.

Beweis:

- Sei $(a_n)$ in $X$, $a_n \to a$. Dann $f(a_n) \to f(a)$ und $g(a_n) \to g(a)$ nach Satz 11.1. Aus Folgerung 4.2 folgt:

$$\begin{aligned} f(a_n) + g(a_n) &\to f(a) + g(a) \\ (f + g)(a_n) &\to (f + g)(a) \end{aligned}$$

  Nach Satz 11.1: $f + g$ in $a$ stetig. Rest: entsprechend. \\

Beispiele:

1. Polynomfunktion:
   Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

$$p(x) = a_n \cdot x^n + \ldots + a_0 \cdot x^0$$

   $p$ ist stetig.

2. Rationale Funktionen:
   Seien $p$, $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynomfunktionen. $\frac{p}{q}\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D := \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$ ist stetig.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 11.3 Satz: Stetigkeit der Komposition

Seien $(X_j, d_j)$ mit $j = 1, 2, 3$ metrische Räume, $f\colon X_1 \to X_2$, $g\colon X_2 \to X_3$, $a \in X_1$. $f$ sei stetig in $a$, $g$ in $f(a)$ stetig. Dann $g \circ f\colon X_1 \to X_3$ in $a$ stetig.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Da $g$ in $f(a)$ stetig:

  $$\exists \delta > 0 : g(B_{X_2}(f(a), \delta)) \subseteq B_{X_3}(g(f(a)), \varepsilon)$$

  Da $f$ stetig in $a$:

  $$\exists \alpha > 0 : f(B_{X_1}(a, \alpha)) \subseteq B_{X_2}(f(a), \delta)$$

  Dann:

  $$\begin{aligned} (g \circ f)(B_{X_1}(a, \alpha)) &= g(f(B_{X_1}(a, \alpha))) \subseteq g(B_{X_2}(f(a), \delta)) \\ &\subseteq B_{X_3}(g(f(a)), \varepsilon) = B_{X_3}((g \circ f)(a), \varepsilon) \end{aligned}$$

Beispiele:

1. Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig, $X$ metrischer Raum. Dann ist $|f|\colon X \to \mathbb{R}\colon x \mapsto |f(x)|$ stetig.

   $$|f| = \operatorname{abs} \circ f$$

2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \exp(x^2)$ stetig.

Bemerkung: Noch nicht gezeigt, dass $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)\colon x \to \sqrt{x}$ stetig.

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 12
# Sätze über stetige Funktionen

### 12.1 Satz: Zwischenwertsatz

Seien $a$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $A \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < A < f(b)$ (oder $f(a) > A > f(b)$). Dann gibt es $p \in [a,b]$ mit $f(p) = A$.
(Anschaulich klar. Falsch für $f\colon [0,2] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$, $A = 0$, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)

Beweis:

- Ohne Einschränkung: $A = 0$, $f(a) < 0 < f(b)$. Jetzt „Löwenjagd“: Intervallfolge $([a_n, b_n])$ mit $[a_0, b_0] = [a,b]$. Es sei $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ mit $b_n - a_n = 2^{-n} \cdot (b-a)$, $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$.
- Für $p := \lim a_n = \lim b_n$ folgt:
$$0 \geq f(a_n) \to f(p) \qquad \wedge \qquad 0 \leq f(b_n) \to f(p)$$
Also $f(p) = 0$. \\

Beispiel:

- Jedes Polynom $f(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_0$, $n$ ungerade, besitzt mindestens eine (reelle) Nullstelle:
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \wedge \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$
Also existiert eine Nullstelle.
- Aber: $g(x) = x^2 + 2$ besitzt keine reelle Nullstelle ($n$ gerade).
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = c :\Leftrightarrow$ Für jede Folge $(x_n)$ mit $x_n \overset{n \to \infty}{\to} \infty$ gilt $f(x_n) \to c$

### 12.2 Folgerung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch $f(D)$ ein Intervall.
($D$ Intervall $\Leftrightarrow \forall a, b \in D$, $a < b : [a,b] \subseteq D$)

Beweis:

- Sind $A, B \in f(D)$, $A \leq B$. Dann gibt es $a, b \in D$ mit $A = f(a)$ und $B = f(b)$. Aus Zwischenwertsatz: $[A, B] \subseteq f(D)$. \\

Definition: $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt $\Leftrightarrow f(D)$ beschränkt.

### 12.3 Satz vom Maximum

Sei $a$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f$ beschränkt und besitzt ein Maximum und Minimum, d.h. es gibt $p, q \in [a,b]$ mit $f(q) \leq f(x) \leq f(p)$ für alle $x \in [a,b]$.
(Falls $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, dann im Allgemeinen nicht richtig.)

Beweis:

- Sei $A := \sup\{f(x) \mid a \leq x \leq b\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dann $\exists (x_n)$ in $[a,b]$: $f(x_n) \to A$, $(x_n)$ beschränkt.
- Nach Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_j$ mit $p = \lim_{j\to\infty} x_{n_j} \in [a,b]$.
- Dann $f(p) = \lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = A$ (da $f$ stetig). Daher $f$ beschränkt ($A < \infty$) und $f(x) \leq A = f(p)$ für alle $x \in [a,b]$.
- Für nach unten beschränkt und $q$ betrachte $-f$.

Die Abgeschlossenheit von $X$ ist notwendig. Betrachte $f\colon (0,1) \to (0,\infty)\colon x \mapsto \frac{1}{x}$. $f$ besitzt kein Extremum.
Die nächsten Sätze beschäftigen sich damit den Definitionsbereich auf allgemeinere Metrische Räume auszuweiten.

## 12.4 Folgenkompaktheit

- Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum. $X$ heißt folgenkompakt $:\Leftrightarrow$ Jede Folge in $X$ besitzt eine konvergente Teilfolge. (Definitionsgemäß muss der Grenzwert $\in X$ sein.)
- Bemerkung: Beweis von Satz 12.3 liefert: $(X,d)$ folgenkompakt, $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ $f$ beschränkt und besitzt Maximum und Minimum.
- Beispiel: Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$. Dann $X$ folgenkompakt $\Leftrightarrow$ $X$ beschränkt und abgeschlossen.

### 12.4.1 Satz: Beschränktheit & Abgeschlossenheit $\Leftrightarrow$ Folgenkompaktheit

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann äquivalent:

1. $X$ ist folgenkompakt.
2. $X$ ist beschränkt und abgeschlossen. (beschränkt $\Leftrightarrow \exists R > 0 : X \subseteq B[0,R]$)

Beweis:

1. „$1 \Rightarrow 2$“
   - Annahme: $X$ nicht beschränkt. Dann existiert $(x^k)_k$ in $X$ mit $|x^k| \to \infty$, also ohne konvergente Teilfolge. (Ist $(x^{kj})_j$ konvergent, dann $|x^{kj}|$ konvergent, also beschränkt in $\mathbb{R}$. Widerspruch!) Also $X$ nicht folgenkompakt. Widerspruch! Also: folgenkompakt $\Rightarrow$ beschränkt.
   - Sei $(x^k)$ in $X$, $x^k \to x$ in $\mathbb{R}^n$. Es gibt in $X$ konvergente Teilfolge $(x^{kj})$. Es folgt: $x = \lim_{j\to\infty} x^{kj} \in X$. Also $X$ abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.
2. „$2 \Rightarrow 1$“
   - Sei $(x^k)$ eine Folge in $X$. Die Folge $(x_1^k)_k$ in $\mathbb{R}$ ist beschränkt ($|x_1^k| \leq |x^k|$) und besitzt daher nach Satz von Bolzano-Weierstraß konvergente Teilfolge $(x_1^{k^1 j})_j$.
   - $(x_2^{k^1 j})_j$ in $\mathbb{R}$ beschränkt, also existiert nach Satz von Bolzano-Weierstraß konvergente Teilfolge $(x_2^{k^2 j})_j$. (Bleibt: $(x_1^{k^2 j})_j$ konvergent)
   - Es gibt also $(x^{kj})$, sodass $(x_l^{kj})_j$ konvergent in $\mathbb{R}$ für alle $l = 1, \ldots, n$.
   - Aus Satz 10.2 folgt: $(x^{kj})_j$ konvergent in $\mathbb{R}^n$. Aus Abgeschlossenheit von $X$: $x = \lim_{j\to\infty} x^{kj} \in X$, also $(x^{kj})$ konvergent in $X$.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

## 12.5 Übertragung der Folgenkompaktheit

Seien $(X, d)$, $(Y, e)$ metrische Räume, $X$ folgenkompakt, $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist $f(X)$ folgenkompakt (als Teilfolge von $(Y, e)$).

Beweis:

- Sei $(y_n)$ in $f(X)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es $x_n \in X$ mit $f(x_n) = y_n$. Es existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \to x$, für $x \in X$ ein Element als Grenzwert.
- Da $f$ stetig ist, gilt:
$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} f(x) \in f(X)$$

### 12.5.1 Korrollar: Satz vom Maximum

Sei $X$ folgenkompakt $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt: $f$ ist beschränkt und nimmt inf und sup an. (d.h. $\exists p \in X : f(p) = \sup(f(X))$)

- Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen. Es gilt $b := \sup A \in A$, denn
- Angenommen, dass $\sup A \notin A$. Da $\mathbb{R} \setminus A$ offen gäbe es $\varepsilon > 0$ mit $A \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \emptyset$, damit ist $\sup A < b - \frac{\varepsilon}{2} < \sup A$. Damit Wiederspruch.
- Also existiert $p \in X$ mit $f(p) = b$

### 12.5.2 Lipschitz-Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit

- Seien $(X, d)$ und $(Y, e)$ metrische Räume, $f\colon X \to Y$. Dann heißt $f$
  - gleichmäßig stetig
$$:\Leftrightarrow \forall\varepsilon\exists\delta > 0\forall x, x' \in X \text{ mit } d(x, x') < \delta : e(f(x), f(x')) < \varepsilon$$
  - Lipschitz-stetig (dehnungsbeschränkt)
$$:\Leftrightarrow \exists L \geq 0\forall x, x' \in X : e(f(x), f(x')) \leq L \cdot d(x, x')$$
- Beispiele:
  1. $f\colon (0, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ Lipschitz-stetig
  2. $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0, 1]$ nicht Lipschitz-stetig, aber gleichmäßig stetig
  3. $f\colon (0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ stetig, nicht gleichmäßig stetig
- Bemerkung: Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ gleichmäßg stetig $\Rightarrow$ stetig

## 12.6 Satz: Folgenkompaktheit + gleichmäßige Stetigkeit

Seien $(X, d)$ und $(Y, e)$ metrische Räume, $f\colon X \to Y$ stetig, $X$ folgenkompakt. Dann $f$ gleichmäßig stetig.

Beweis:

- Annahme: $f$ nicht gleichmäßig stetig, d.h.
$$\exists\varepsilon > 0\forall\delta > 0\exists x, x' \in X \text{ mit } d(x, x') < \delta : e(f(x), f(x')) \geq \varepsilon$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Insbesondere:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, x'_n \in X \text{ mit } d(x_n, x'_n) < \frac{1}{n} : e(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$$

  Da $X$ folgenkompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_j$, $x_{n_j} \to x$.

- Aus $d(x'_{n_j}, x) \leq d(x'_{n_j}, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x) \to 0 \, (j \to \infty)$ folgt $x'_{n_j} \to x$.

- Daher:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq e(f(x_{n_j}), f(x'_{n_j})) \leq e(f(x_{n_j}), f(x)) + e(f(x), f(x'_{n_j})) \\ &\to 0 \end{aligned}$$

  Widerspruch!

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 13

# Monotone Funktionen, Umkehrfunktionen, Potenz, Logarithmus

Monotonie: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$. Dann heißt $f$

- monoton wachsend $:\Leftrightarrow \forall x, x' \in D, x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$
- streng monoton wachsend $:\Leftrightarrow \forall x, x' \in D, x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$
- monoton fallend $:\Leftrightarrow \forall x, x' \in D, x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$
- streng monoton fallend $:\Leftrightarrow \forall x, x' \in D, x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$

### 13.1 Satz: Monotonie & Stetigkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ monoton wachsend (oder fallend), $f(D)$ ein Intervall. Dann ist $f$ stetig.

Beweis: (nur für „wachsend“, sonst betrachte $-f$)

- Sei $a \in D$. Sei $\varepsilon > 0$. Gilt $f(x) \geq f(a) - \varepsilon$ für alle $x < a$, so wähle $\delta_1 = 1$.
- Anderenfalls gibt es $x < a$ mit $f(x) < f(a) - \varepsilon$, dann auch $x' < a$ mit $f(x') = f(a) - \varepsilon$, da $f(D)$ ein Intervall ist und daher $[f(x), f(a)] \subseteq f(D)$. Wir setzen $\delta_1 = a - x'$. Es folgt:
$$\forall x \in D \cap (a - \delta_1, a) : f(a) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(a)$$
- Entsprechend:
$$\exists \delta_2 > 0 \forall x \in D \cap (a, a + \delta_2) : f(a) \leq f(x) \leq f(a) + \varepsilon$$
- Mit $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ folgt:
$$\forall x \in B_D(a, \delta) : |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

### 13.2 Satz: Injektivität & Umkehrfunktion

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (oder fallend). Dann ist $f$ injektiv. Mit $D := f(I)$ ist $f^{-1}\colon D \to I$ streng monoton wachsend (fallend) und stetig. (Ist $f$ stetig, so ist $D$ ein Intervall. (Folgerung 12.2))

Beweis: (nur für „wachsend“)

- $f$ ist injektiv: Es seien $x, x' \in I$, dann o.B.d.A. $x < x'$, also $f(x) < f(x')$.
- $f^{-1}\colon D \to I$ streng monoton wachsend:
  - Seien $y, y' \in D$, $y < y'$, $y = f(x)$, $y' = f(x')$.
  - Annahme: $x \geq x'$. Dann $y = f(x) \geq f(x') = y'$.
  - Somit folgt: $f^{-1}(y) = x < x' = f^{-1}(y')$
- $f^{-1}$ stetig: Da $f^{-1}(D) = I$ ein Intervall ist, ist $f^{-1}$ stetig nach Satz 13.1.

### 13.2.1 Wurzelfunktion

- Sei $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto x^k$ ist stetig, streng monoton wachsend, $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ bijektiv.
- Die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ ist stetig und streng monoton wachsend.

$$f^{-1}(y) := \sqrt[k]{y} \qquad k\text{-te Wurzel}$$

- Beweis:
  - $f$ stetig, da ein Polynom.
  - $f$ streng monoton wachsend (klar).
  - $f(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
  - $f([0,\infty))$ ein Intervall, damit $f([0,\infty)) = [0,\infty)$. Rest Satz 13.2

### 13.2.2 Natürlicher Logarithmus

- $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, stetig, $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ bijektiv.
- $\exp^{-1} =: \ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.
- Eigenschaften:
  1. $\ln 1 = 0$
  2. $\ln e = 1$
  3. Für $x$, $x' > 0$:

$$\ln(x \cdot x') = \ln x + \ln x' \qquad \ln\frac{1}{x} = -\ln x$$

- Beweis:
  - $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp(-x)} = 0$, also $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$ (da exp stetig)
  - Nach Satz 13.2 ln stetig und streng monoton wachsend
  - Eigenschaften:
    1. $\exp(0) = 1 \Rightarrow \ln 1 = 0$
    2. $\exp(1) = e \Rightarrow \ln e = 1$
    3. Seien $x, x' > 0$, $y = \ln x$, $y' = \ln x'$. Also $\exp(y) = x$ und $\exp(y') = x'$.

$$\begin{aligned} x \cdot x' &= \exp(y) \cdot \exp(y') = \exp(y + y') \\ \ln(x \cdot x') &= y + y' = \ln x + \ln x' \end{aligned}$$

Außerdem:

$$0 = \ln\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \ln x + \ln\frac{1}{x}$$

### 13.2.3 Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$: $a^x$

- Sei $a > 0$. Dann:

$$\begin{aligned} a &= \exp(\ln a) \\ \Rightarrow a^n &= \exp(\ln a))^n \\ &= \exp(n \cdot \ln a) \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{Z}$.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Für $q \in \mathbb{N}$:
$$\exp\left(\frac{1}{q} \cdot \ln a\right)^q = \exp(\ln a) = a$$
d.h.
$$\exp\left(\frac{1}{q} \cdot \ln a\right) = \sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}}$$

- Für $q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$:
$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{p}{q} \cdot \ln a\right) &= \exp\left(\frac{1}{q} \cdot \ln(a^p)\right) \\ &= \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} \\ &= \left(\exp\left(\frac{1}{q} \cdot \ln a\right)\right)^p = (\sqrt[q]{a})^p \end{aligned}$$

- Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$:
$$\exp_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \exp_a(x) := \exp(x \cdot \ln a)$$
Offenbar $\exp_a$ stetig.
- Schreibweise: $a^x := \exp_a(x) = e^{x \cdot \ln a}$. Insbesondere $\exp(x) = e^x$.
- Klar:
$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$
- Eigenschaften der Exponentialfunktion zur Basis a: $\forall a, b > 0; x, y \in \mathbb{R}$
  1. $\ln a^x = x \cdot \ln a$

     Folgt aus $a^x = \exp(x \cdot \ln a)$.
  2. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

     Beweis:
     $$(a^x)^y = \exp(y \cdot \ln a^x) = \exp(x \cdot y \cdot \ln a) = a^{x \cdot y}$$
  3. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

     Beweis:
     $$\begin{aligned} a^x \cdot b^x &= \exp(x \cdot \ln a) \cdot \exp(x \cdot \ln b) \\ &= \exp(x \cdot (\ln a + \ln b)) \\ &= \exp(x \cdot \ln(a \cdot b)) \\ &= a^x \cdot b^x \end{aligned}$$
  4. $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

     Beweis:
     $$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \exp\left(x \cdot \ln \frac{1}{a}\right) = \exp(-x \cdot \ln a) = a^{-x}$$
- Logarithmus zur Basis $a$: $\log_a$ ist Umkehrfunktion von $\exp_a$ für $a \neq 1$.
$$\ln = \log_e \qquad \log = \log_{10}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 13.3 Satz: Funktionalgleichung

Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelte:

$$F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$$

Dann entweder $F(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ oder $a = F(1) > 0$ und $F(x) = a^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis:

- $F(x) = F\left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow F(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- 1. Fall: $F(1) = 0$. Dann:

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = F(x-1) \cdot F(1) = 0$$

- 2. Fall:
  - $F(1) \neq 0$, also $a = F(1) > 0$.

$$F(1) \cdot F(0) = F(1) \Rightarrow F(0) = 1$$

  - Für $n \in \mathbb{N}$:

$$F(n) = F(1)^n = a^n$$

  - Für $n \in -\mathbb{N}$:

$$F(n) = \frac{1}{F(-n)} = \frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

  - Für $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{p}{q}\right)^q &= F(p) = a^p \\ F\left(\frac{p}{q}\right) &= \sqrt[q]{a^p} = \exp\left(\frac{p}{q} \cdot \ln a\right) \end{aligned}$$

    Damit $F(x) = \exp_a(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$.
  - Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $(x_n)$ in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$. Da $exp_a$ und $F$ stetig:

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \exp_a(x_n) = exp_a(x)$$

### 13.4 Abschluss

Sei $X$ ein metrischer Raum, $D \subseteq X$. Dann heißt

$$\begin{aligned} \overline{D} &:= \{x \in X \mid \forall \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in X \mid \exists (x_n) \subseteq D : x_n \to x (n \to \infty)\} \end{aligned}$$

der Abschluss von $D$.

Beispiele:

1. $X = \mathbb{R}, D = (0,1), \overline{D} = [0,1]$
2. $X = [0,1] \cup (2,3), D = (0,1) \cup (2,3)$, dann $\overline{D} = X$.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 13.5 Grenzwert in Metrischen Räumen

Seien $(X,d)$, $(Y,e)$ metrische Räume, $D \subseteq X$, $f\colon D \to Y$, $a \in \overline{D}, b \in Y$, $A(x)$ eine Aussage.

$$\begin{aligned} b = \lim_{x \to a,\, A(x)} f(x) \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \cap B(a,\delta) \cap \{x \mid A(x)\} : f(x) \in B(b,\varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall (x_n) \subseteq \{x \in D \mid A(x)\}, x_n \to a\,(n \to \infty) : f(x_n) \to b\,(n \to \infty) \end{aligned}$$

rechtsseitiger Grenzwert:

$$c = \lim_{x \to a+} f(x) :\Leftrightarrow c = \lim_{x \to a,\, x \in (a,\infty)} f(x)$$

linksseitiger Grenzwert:

$$c = \lim_{x \to a-} f(x) :\Leftrightarrow c = \lim_{x \to a,\, x \in (\infty,a)} f(x)$$

Bemerkungen zu Grenzwerten:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$

   Beweis:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{für } x \geq 0 \\ \frac{e^x}{x^n} &\geq \frac{x}{(n+1)!} \to \infty\,(x \to \infty) \end{aligned}$$

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} x^n \cdot e^{-x} &= 0 \\ \lim_{x \to 0+} x^n \cdot e^{\frac{1}{x}} &= \infty \\ \lim_{x \to 0+} x^{-n} \cdot e^{-\frac{1}{x}} &= 0 \end{aligned}$$

   Beweis:

$$\begin{aligned} x^n \cdot e^{-x} &= \left(\frac{e^x}{x^n}\right)^{-1} \to 0\,(x \to \infty) \\ \lim_{x \to 0+} x^n \cdot e^{\frac{1}{x}} &= \lim_{y \to \infty} \left(\frac{1}{y}\right)^n \cdot e^y = \infty \\ \lim_{x \to 0+} x^{-n} \cdot e^{-\frac{1}{x}} &= \lim_{y \to \infty} y^n \cdot e^{-y} = 0 \end{aligned}$$

3. $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$, $\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty$

   Beweis: Sei $K \in \mathbb{R}$. Dann $\ln e^K = K$. Da ln monoton wachsend: $\ln x \geq K$ für $x \geq e^K$.

$$\lim_{x \to 0+} \ln x = \lim_{y \to \infty} \ln \frac{1}{y} = -\lim_{y \to \infty} \ln y = -\infty$$

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 14

# Komplexe Exponentialfunktion, trigonometrische Funktionen

- Seien $(c_n)$, $(d_n)$ in $\mathbb{C}$ konvergent, $c_n \to c$, $d_n \to d$. Dann:

$$\begin{aligned}
|c_n| &\to c \qquad (||c_n| - |c|| \leq |c_n - c|) \\
Re(c_n) &\to Re(c) \\
Im(c_n) &\to Im(c) \\
c_n + d_n &\to c + d \\
c_n \cdot d_n &\to c \cdot d \\
\frac{c_n}{d_n} &\to \frac{c}{d} \qquad (d \neq 0)
\end{aligned}$$

- Sei $(c_n)$ in $\mathbb{C}$, $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k$. Dann:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} c_n \text{ konvergent} &\Leftrightarrow (s_n)_n \text{ konvergent} \\
\sum_{k=1}^{\infty} c_n \text{ absolut konvergent} &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty
\end{aligned}$$

### 14.1 Satz: Majorantenkriterium

Sei $(a_n)$ in $[0, \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, $c_n$ in $\mathbb{C}$, $|c_n| \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, $|\sum_{n=1}^{\infty} c_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

### 14.2 Satz: Quotientenkriterium

Sei $(c_n)$ in $\mathbb{C}$, $c_n \neq 0\,(n \geq n_0)$, $\limsup |\frac{c_{n+1}}{c_n}| < 1$. Dann $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergent.

Ebenso Wurzelkriterium. Beweise analog zum reellen Fall.

#### 14.2.1 Beispiel: Exponentialfunktion

1. Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

absolut konvergent.

Beweis:

$$\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n} \right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0\,(n \to \infty)$$

2. Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:
$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$$
Beweis wie in $\mathbb{R}$, Cauchy-Produkt auch in $\mathbb{C}$ gültig.

3. $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$

   Beweis:
$$1 = \exp(0) = \exp(z) \cdot \exp(-z)$$

4. Für alle $z \in \mathbb{C}$:
$$\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$$
   Beweis:
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{z}^k}{k!} &= \overline{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)} \\ \Rightarrow \exp(\bar{z}) &= \overline{\exp(z)} \end{aligned}$$

5. $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig.

   Beweis: (wie in $\mathbb{R}$)

   (a) Stetigkeit in $z = 0$
$$|\exp(z) - 1| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \leq e \cdot |z| \qquad \text{für } |z| \leq 1$$

   (b) sonst mit Funktionalgleichung

### 14.2.2 Trigonometrische Funktionen

Für $x \in \mathbb{R}$:
$$\cos x := Re(e^{i \cdot x}) \qquad \sin x := Im(e^{i \cdot x})$$
Somit:
$$e^{i \cdot x} = \cos x + i \cdot \sin x \qquad \text{(Eulersche Form)}$$
Geometrische Deutung:

1. Für $x \in \mathbb{R}$:
$$|e^{ix}|^2 = e^{i \cdot x} \cdot \overline{e^{i \cdot x}} = e^{i \cdot x} \cdot e^{-i \cdot x} = 1$$

Bemerkung: Für alle $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} \cdot (e^{i \cdot x} + e^{-i \cdot x}) \\ \sin x &= \frac{1}{2i} \cdot (e^{i \cdot x} - e^{-i \cdot x}) \\ \cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x \\ \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 (= |e^{i \cdot x}|^2) \end{aligned}$$

## 14.3 Satz: Stetigkeit der trigonometrischen Funktionen

cos, sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig.

Beweis:

- Sei $(x_n)$ in $\mathbb{R}$, $x_n \to x$. Dann $i \cdot x_n \to i \cdot x$, $e^{i \cdot x_n} \to e^{i \cdot x}$, also $Re(e^{i \cdot x_n}) \to Re(e^{i \cdot x})$ und $Im(e^{i \cdot x_n}) \to Im(e^{i \cdot x})$. \\



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 14.4 Satz: Additionstheoreme

- Für alle $x$, $y \in \mathbb{R}$:
  1. $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
  2. $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
- Beweis: Aus $e^{i(x+y)} = e^{i \cdot x} \cdot e^{i \cdot y}$:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + i \cdot \sin(x+y) &= (\cos x + i \cdot \sin x) \cdot (\cos y + i \cdot \sin y) \\ &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y + i(\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y) \end{aligned}$$

- Korrollar:
  1. $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
  2. $\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

### 14.5 Satz: Reihenentwicklung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \end{aligned}$$

Die Reihen sind absolut konvergent.

Beweis:

$$\begin{aligned} e^{i \cdot x} &= 1 + \frac{i \cdot x}{1!} + \frac{(i \cdot x)^2}{2!} + \frac{(i \cdot x)^3}{3!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + i \cdot \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) \end{aligned}$$

### 14.6 Satz: Nullstelle von cos

Die Funktion cos hat in $[0, 2]$ genau eine Nullstelle.

### 14.7 Hilfssatz: $\cos 2$

$$\cos 2 \leq -\frac{1}{3}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \dots \\ &\leq 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

... unter Verwendung des Leibniz-Kriteriums, da die Reihe alternierend ist und die Beträge der einzelnen Summanden abnehmen.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 14.8 Hilfssatz: $\sin x > 0$ in $(0,2]$

$$\forall x \in (0,2] : \sin x > 0$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x \cdot \underbrace{(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots)}_{\text{Leibniz}} \\
&\geq x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3!}\right) \\
&\geq x \cdot \left(1 - \frac{4}{3!}\right) = \frac{1}{3} \cdot x
\end{aligned}$$

### 14.9 Hilfssatz: Monotonie von $\cos$ in $[0,2]$

cos ist in $[0,2]$ streng monoton fallend.

Beweis:

- Für $x, x' \in \mathbb{R}$ gilt:
$$x' = \frac{x'+x}{2} + \frac{x'-x}{2} \qquad x = \frac{x'+x}{2} - \frac{x'-x}{2}$$
- Für $0 \leq x < x' \leq 2$ folgt:

$$\begin{aligned}
\cos x' - \cos x &= \cos\frac{x'+x}{2} \cdot \cos\frac{x'-x}{2} - \sin\frac{x'+x}{2} \cdot \sin\frac{x'-x}{2} \\
&\quad - \cos\frac{x'+x}{2} \cdot \cos\left(-\frac{x'-x}{2}\right) + \sin\frac{x'+x}{2} \cdot \sin\left(-\frac{x'-x}{2}\right) \\
&= \cos\frac{x'+x}{2} \cdot \cos\frac{x'-x}{2} - \sin\frac{x'+x}{2} \cdot \sin\frac{x'-x}{2} \\
&\quad - \cos\frac{x'+x}{2} \cdot \cos\frac{x'-x}{2} - \sin\frac{x'+x}{2} \cdot \sin\frac{x'-x}{2} \\
&= -2\sin\frac{x'+x}{2} \cdot \sin\frac{x'-x}{2} \\
&< 0 \qquad \text{HS 14.8}
\end{aligned}$$

#### 14.9.1 Beweis Satz 14.6 & Definition von $\pi$

- Existenz:
  - $\cos 0 = 1$ und $\cos 2 \leq -\frac{1}{3} < 0$ (HS 14.7)
  - cos stetig, also Zwischenwertsatz gültig
- Eindeutigkeit: Hilfssatz 14.9
- $\frac{\pi}{2}$ ist die Nullstelle von cos in $[0,2]$.

### 14.10 Satz: spezielle Werte der komplexen Exponentialfunktion

$$e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = i \qquad e^{i \cdot \pi} = -1 \qquad e^{i \cdot 2\pi} = 1$$

Beweis:



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Aus $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ folgt nach Hilfssatz 14.8:

$$\sin^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

  Damit:

$$e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2} = i$$

- Aus der Funktionalgleichung folgt:

$$\begin{aligned} e^{i\cdot\pi} &= e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = -1 \\ e^{i\cdot 2\pi} &= e^{i\cdot\pi}\cdot e^{i\cdot\pi} = 1 \end{aligned}$$

### 14.11 Folgerung: Periodizität

Für alle $x \in \mathbb{R}$:

1. $\cos(x+2\pi) = \cos x$, $\sin(x+2\pi) = \sin x$ (cos, sin haben Periode $2\pi$)
2. $\cos(x+\pi) = -\cos x$, $\sin(x+\pi) = -\sin x$
3. $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

Beweis: Additionstheoreme

### 14.12 Folgerung: Nullstellen von sin und cos

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} = \{k\cdot\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid e^{ix} = 1\} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis:

1. „$\subseteq$“
   - $\cos x > 0$ für $0 \le x < \frac{\pi}{2}$, also $\cos x = \cos(-x) > 0$ für $-\frac{\pi}{2} < x \le 0$
   - Für $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$: $\cos x < 0$ mit Folgerung 14.11.2
   - Mit Folgerung 14.11.1:

$$\cos x \neq 0 \,\text{für}\, x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

   „$\supseteq$“ Klar mir $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und Folgerung 14.11.1, 14.11.2
2. Aus $a$ und Folgerung 14.11.c
3. 

$$\begin{aligned} 1 = e^{ix} &\Leftrightarrow \cos x = 1, \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x = 0, \cos x > 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi \,\text{für}\, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 14.12.1 (Co)Tangens

- Tangens:
$$\tan\colon \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\} : \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$
- Cotangens:
$$\cot\colon \mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\} : \cot x := \frac{\cos x}{\sin x}$$
- tan streng monoton wachsend auf $[0,\frac{\pi}{2})$, da:
  - sin streng monoton wachsend auf $[0,\frac{\pi}{2})$
  - cos streng monoton fallend auf $[0,\frac{\pi}{2})$ mit Folgerung 14.11.3
  - beide $>0$ auf $[0,\frac{\pi}{2})$
- Außerdem:
$$\tan(-x) = -\tan x \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\tan x = \infty$$

### 14.12.2 Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

- Arcus cosinus: Umkehrfunktion von $\cos\colon [0,\pi]\to\mathbb{R}$
$$\arccos\colon [-1,1]\to[0,\pi]$$
- Arcus sinus: Umkehrfunktion von $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$
$$\arcsin\colon [-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$
- Arcus tangens: Umkehrfunktion von $\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$
$$\arctan\colon \mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

## 14.13 Satz: Polardarstellung

Jede komplexe Zahl $z$ lässt sich eindeutig schreiben als $z = r\cdot e^{i\cdot\varphi}$ mit $r=|z|\in[0,\infty)$, $\varphi\in\mathbb{R}$. Für $z\neq 0$ ist $\varphi$ bis auf ganzzahlige Vielfache von $2\pi$ bestimmt. (Polardarstellung von $z$, $\varphi$ Argument von $z$)

Beweis:

1. $z=0$: Klar.
2. $z\neq 0$
   - Es sei $r:=|z|$, $\zeta := \frac{z}{r}$. Dann $|\zeta|=1$. Es sei $\xi := Re\,\zeta$, $\eta := Im\,\zeta$. Dann gilt $\xi^2+\eta^2=1$.
   - Es sei $\alpha := \arccos\xi$ (also $\alpha\in[0,\pi]$). Aus $\cos\alpha=\xi$ folgt:
   $$\sin\alpha = \sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\eta$$
   Man definiert nun:
   $$\varphi = \begin{cases}\alpha & \text{falls } \sin\alpha=\eta\\ -\alpha & \text{falls } \sin\alpha=-\eta\end{cases}$$
   - Dann gilt $\sin\varphi=\eta$, $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi=\zeta$, $z=r\cdot e^{i\varphi}$.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Eindeutigkeit:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_1} &= e^{i\varphi_2} \\ \Rightarrow e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} &= 1 \\ \Leftrightarrow \varphi_1 - \varphi_2 &= 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Bemerkung:

1. Produkt von $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

2. (Existenz $n$-ter Wurzeln)
   Sei $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann gibt es eine Lösung $w$ der Gleichung $w^n = z$. Für $z = r \cdot e^{i\varphi}$ definiere

$$w = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \frac{\varphi}{n}}$$

3. ($n$-te Einheitswurzeln)
   Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann $z^n = 1$ genau $n$ komplexe Lösungen.

$$\zeta_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

### 14.14 Fundamentalsatz der Algebra

Sei $n \in \mathbb{N}$, $p(z) = z^n + c_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + c_0$ mit $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$. Dann gibt es $z_n \in \mathbb{C}$ mit $p(z_n) = 0$.

Beweis:

- Nimm an, dass $c_0 \neq 0$ sonst ist 0 gesuchte Nullstelle.
- Aus

$$p(z) = z^n \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{c_0}{z^n}\right)}_{\to 1\ (|z| \to \infty)}$$

  folgt $|p(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$. Damit gibt es $R > 0$, sodass $|p(z)| > |p(0)|$ für alle $|z| > R$. Auf $B[0, R]$ ist $z \mapsto |p(z)|$ stetig und besitzt daher ein Minimum: Es gibt $z_0 \in B[0, R]$ mit $|p(z_0)| \leq |p(z)|$ für alle $z \in B[0, R]$, daher für alle $z \in \mathbb{C}$.
- Angenommen $|p(z_0)| > 0$. Sonst ist $z_0$ die Nullstelle. Setze $\tilde{p}(z) := \frac{1}{|p(z_0)|} p(z + z_0)$ Dann nimmt $|\tilde{p}(\cdot)|$ sein Minimum in 0 an und $\tilde{p}(0) = 1$. Daraus folgt:
- $\tilde{p}$ lässt sich darstellen als:

$$\tilde{p}(z) = 1 + c \cdot z^m + q(z) \cdot z^{m+1}$$

  mit geeignetem $m \in \mathbb{N}$, $c \neq 0$ und $q$ Polynom. Es gibt $b \in \mathbb{C}$, sodass $b^m = -\frac{1}{c}$. Für $0 < t \ll 1$ hinreichend klein folgt:

$$\begin{aligned} |p(b \cdot t)| &\leq |1 + c \cdot b^m \cdot t^m| + |t^{m+1} \cdot b^{m+1} \cdot q(b \cdot t)| \\ &= (1 - t^m) + t^m \cdot t \cdot |b^{m+1} \cdot q(b \cdot t)| \\ &= 1 - t^m \cdot (1 - t \cdot |b^{m+1} \cdot q(b \cdot t)|) \\ &< 1 \end{aligned}$$

  ($t^m < 1$ und $t \cdot |b^{m+1}| \cdot |q(b \cdot t)| < 1$.) Widerspruch zu $1 = p(0) \leqslant |\tilde{p}(z)|$, $z \in \mathbb{C}$

Bemerkungen:

- Beweisansatz von J. D'Alembert, 1746; vollständige Ausführung von J.R. Argand, 1806. Gauß 1799, Dissertation (4 Beweise)
- In Satz 14.14 folgt, dass es $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $p(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 15 Differentiation

- Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D \setminus \{x_0\}}$. (Abschluss in $D$, siehe 13.4) $f$ heißt in $x_0$ differenzierbar (oder auch nur diffbar)

$$\begin{aligned} :\Leftrightarrow \quad & \lim_{\xi \to x_0,\, \xi \in D \setminus \{x_0\}} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \\ \Leftrightarrow \quad & \lim_{h \to 0,\, x_0 + h \in D \setminus \{x_0\}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

- der Grenzwert heißt die Ableitung von $f$ an der Stelle $x_0$. Die Ableitung von $f$ an einer Stelle $x_0 \in D$ ist eine (reelle) Zahl. Definiere, falls der Grenzwert existiert:

$$f'(x) := \lim_{\xi \to x,\, \xi \in D \setminus \{x\}} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

- $f$ differenzierbar (in $D$) $:\Leftrightarrow$ $f$ in jedem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar. In diesem Fall definiere die Ableitungsfunktion $f'$ von $f$

$$f' := \left( x \mapsto \lim_{\xi \to x,\, \xi \in D \setminus \{x\}} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \right)$$

- Bemerkungen:
  1. $\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0}$ Steigung der Geraden durch $(x_0, f(x_0))$ und $(\xi, f(\xi))$ (Sekante)
     $f'(x_0)$ Steigung der „Tangente“ an graph$(f)$ in $(x_0, f(x_0))$, falls sie existiert.
  2. Anschauung: Differenzierbarkeit $\Leftrightarrow$ Hineinzoomen am Graphen an $f(x_0)$ lässt den Graphen der Tangente an $f(x_0)$ annähern. $\Leftrightarrow$ Eine Gerade am Punkt $f(x_0)$ kann nicht kippeln.
  3. Für $f = (x \mapsto f(x))$ existieren verschiedenste Schreibweisen:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= (x \mapsto f(x))'(x_0) =: \left.\frac{\mathrm{d}(f(x))}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} \\ f' &= (x \mapsto f(x))' =: \frac{d(f(x))}{dx} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & \left.\frac{d(f(x))}{dx}\right|_{x=x_0} =: \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} =: \left.\frac{df}{dx}(x)\right|_{x=x_0} =: \left.\frac{d}{dx} f(x)\right|_{x=x_0} \\ =: & \left.\frac{d(f(x))}{dx}\right|_{x_0} =: \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0} =: \left.\frac{df}{dx}(x)\right|_{x_0} =: \left.\frac{d}{dx} f(x)\right|_{x_0} =: \frac{df(x)}{dx}(x_0) \\ & \frac{d(f(x))}{dx} =: \frac{df(x)}{dx} =: \frac{df}{dx}(x) =: \frac{d}{dx} f(x) \end{aligned}$$

Dabei handelt es sich nicht um Brüche.

4. $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar $\Rightarrow f$ stetig. Begründung:

$$f(\xi) = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \cdot (\xi - x) + f(x) \xrightarrow{\xi \to x} f'(x) \cdot 0 + f(x) = f(x)$$

- Beispiele:

  1. Konstante Funktion: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = c$

  $$f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = 0$$

  2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon f(x) = c \cdot x$

  $$f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{c \cdot \xi - c \cdot x}{\xi - x} = c$$

  3. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon f(x) = x^2$

  $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x$$

### 15.1 Satz: Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion

Für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\lim_{\xi \to z,\, \xi \neq z} \frac{\exp(\xi) - \exp(z)}{\xi - z} = \exp(z)$$

(„komplex differenzierbar“)

Beweis:

1. $z = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi}(\exp(\xi) - 1) &= \frac{1}{\xi} \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^{n-1}}{n!} \\
&= 1 + \xi \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\xi^{n-2}}{n!} \\
&\leq 1 + |\xi| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad \text{für } |\xi| \leq 1 \\
&\leq 1 + |\xi| \to 1 \, (|\xi| \to 0)
\end{aligned}$$

2. allgemeines $z$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi - z} \cdot (\exp(\xi) - \exp(z)) &= \frac{\exp(z)}{\xi - z} \cdot (\exp(\xi - z) - 1) \\
&\to \exp(z) \, (\xi \to z)
\end{aligned}$$

### 15.2 Folgerung: Differenzierbarkeit von cos, sin

Die Funktionen exp, cos, sin sind differenzierbar:

1. $\exp' = \exp$
2. $\cos' = -\sin \qquad \sin' = \cos$

Beweis:



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

1. Klar mit Satz 15.1
2. Für $x, \xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq x$:
$$\frac{e^{i\xi} - e^{ix}}{\xi - x} = i\frac{e^{i\xi} - e^{ix}}{i \cdot \xi - i \cdot x} \to i \cdot e^{ix} \, (\xi \to x)$$
nach Satz 15.1. Dann:
$$\begin{aligned} \frac{\cos\xi + i \cdot \sin\xi - \cos x - i \cdot \sin x}{\xi - x} &= \frac{\cos\xi - \cos x}{\xi - x} + i \cdot \frac{\sin\xi - \sin x}{\xi - x} \\ &\to i \cdot (\cos x + i \cdot \sin x) \\ ( &= -\sin x + i \cdot \cos x) \end{aligned}$$
Also cos in $x$ differenzierbar, $\cos' x = -\sin x$, und sin in $x$ differenzierbar, $\sin' x = \cos x$.

### 15.3 Satz: Weierstraßsche Zerlegungsformel

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{D \backslash \{a\}}$. Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

1. $f$ in $a$ differenzierbar, $f'(a) = c$
2. Die durch
$$f(x) = f(a) + c \cdot (x - a) + |x - a| \cdot \varphi(x)$$
für $x \neq a$ definierte Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(a) := 0$ erfüllt:
$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$$
(Weierstraßsche Zerlegungsformel)
$f$ wird durch eine affin-lineare Funktion $f(a) + c \cdot (x - a)$ approximiert

Beweis:

1. 1. $\Rightarrow$ 2.
$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= \frac{1}{|x - a|} \cdot |f(x) - f(a) - c \cdot (x - a)| \\ &= \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - c \right| \to 0 \, (x \to a) \end{aligned}$$
2. 2. $\Rightarrow$ 1.
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c + \frac{|x - a|}{x - a} \cdot \varphi(x) \to c \, (x \to a)$$

### 15.4 Satz: Produkt-/Quotienten-/Summenregel

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f$, $g\colon D \to \mathbb{R}$ in $x$ differenzierbar, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g$ sind in $x$ differenzierbar.
$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (\lambda \cdot f)'(x) &= \lambda \cdot f'(x) \\ (f \cdot g)'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$
2. Ist $g(x) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in $x$ differenzierbar.
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g(x)^2}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Beweis:

1. 1. und 2. Rechenregel klar. Produktregel:

$$\begin{aligned}\frac{f(\xi)\cdot g(\xi)-f(x)\cdot g(x)}{\xi-x} &= f(\xi)\cdot\frac{g(\xi)-g(x)}{\xi-x}+\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}\cdot g(x)\\ &\to f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x)\,(\xi\to x)\end{aligned}$$

2. Quotientenregel: Spezialfall $f=1$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g(\xi)}-\frac{1}{g(x)}\right)\cdot\frac{1}{\xi-x} &= \frac{1}{g(\xi)\cdot g(x)}\cdot\frac{g(x)-g(\xi)}{\xi-x}\\ &\to -\frac{1}{g(x)^2}\cdot g'(x)\,(\xi\to x)\end{aligned}$$

   Rest mit Produktregel

Beispiele:

1. $f_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x):=x^n$ für $n\in\mathbb{N}_0$. Dann $f_n'(x)=n\cdot x^{n-1}$.

   Beweis: Induktion (für n=0,1,2 schon bekannt)

$$\begin{aligned}f_n &= f_{n-1}\cdot f_1\\ \Rightarrow f_n' &= (f_{n-1}\cdot f_1)'=f_{n-1}'\cdot f_1+f_{n-1}\cdot f_1'\\ &= (n-1)\cdot x^{n-2}\cdot x+x^{n-1}\\ &= n\cdot x^{n-1}\end{aligned}$$

2. Für $n\in\mathbb{Z}, n<0, f_n\colon\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R},\ f_n(x):=x^n$. Dann $f_n'(x)=n\cdot x^{n-1}$.

   Beweis: mit Quotientenregel

$$\begin{aligned}f_n'(x) &= \frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{1}{x^{-n}}\right)\\ &= \frac{-n\cdot x^{-n-1}}{x^{-2n}}=n\cdot x^{n-1}\end{aligned}$$

### 15.5 Satz: Kettenregel

Seien $D,\ E\subseteq\mathbb{R},\ f\colon D\to E,\ g\colon E\to\mathbb{R},\ f$ in $x\in D$ differenzierbar, $g$ in $y:=f(x)$ differenzierbar. Dann $g\circ f\colon D\to\mathbb{R}$ in $x$ differenzierbar.

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)=((g'\circ f)\cdot f')(x)$$

Beweis:

- Es sei $g^*\colon E\to\mathbb{R}$ mit

$$g^*(\eta):=\begin{cases}\dfrac{g(\eta)-g(y)}{\eta-y} & \text{für}\,\eta\neq y\\ g'(y) & \text{für}\,\eta=y\end{cases}$$

  Dann $g^*$ in $y$ stetig und für alle $\eta\in E$:

$$g(\eta)-g(y)=g^*(\eta)\cdot(\eta-y)$$

  Damit:

$$\begin{aligned}\frac{g(f(\xi))-g(f(x))}{\xi-x} &= g^*(f(\xi))\cdot\frac{(f(\xi)-f(x))}{\xi-x}\\ &\to g^*(f(x))\cdot f'(x)\,(\xi\to x)\\ (\quad &= g'(f(x))\cdot f'(x))\end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Beispiele:

1. $\frac{d}{dx}e^{x^2} = e^{x^2} \cdot 2x$
2. $\frac{d}{dx}e^{-x} = -e^{-x}$

### 15.6 Satz: Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, $D := f(I), \varphi = f^{-1}\colon D \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion. Sei $f$ in $x \in I$ differenzierbar, $f'(x) \neq 0$. Dann $\varphi$ in $y := f(x)$ differenzierbar.

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\varphi(y))}$$

Beweis:

- Sei $(\eta_n)$ in $D\backslash\{y\}$, $\eta_n \to y$. Setze $\xi_n := \varphi(\eta_n)$. Dann $\xi_n \to x$ ($\varphi$ stetig nach Satz 13.1), $\xi_n \neq x$, da $\varphi$ injektiv.

$$\frac{\varphi(\eta_n) - \varphi(y)}{\eta_n - y} = \frac{\xi_n - x}{f(\xi_n) - f(x)} \to \frac{1}{f'(x)}\,(n \to \infty)$$

Beispiele:

1. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$.

$$\ln = \exp^{-1} \Rightarrow \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

   Hieraus folgt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

   Beweis:

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \frac{1}{\frac{1}{n}} \cdot \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln 1\right) \to \ln' 1 = 1 \\
\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} &= \frac{1}{-\frac{1}{n}} \cdot \left(\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ln 1\right) \to \ln' 1 = 1
\end{aligned}$$

2. $\alpha \in \mathbb{R}$, $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^\alpha$. Dann $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

   Beweis: mit Kettenregel

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp(\alpha \cdot \ln x) \\
f'(x) &= \exp(\alpha \cdot \ln x) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

3. arcsin ist differenzierbar auf $(-1, 1)$.

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

   Beweis:

   - arcsin ist Umkehrfunktion von sin: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$. $\sin' x = \cos x \neq 0$ für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Für $-1 < y < 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\arcsin'(y) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin y)} \\
&= \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}
\end{aligned}$$

4. $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

   Beweis: siehe Übung 12 (Aufgabe 89)

### 15.7 Ableitungen höherer Ordnungen

- Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x \in D$, $f\colon D \to \mathbb{R}$. Es gebe $\varepsilon > 0$, sodass $f$ in $D \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ differenzierbar ist. Ist $f'$ in $x$ differenzierbar so heißt

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} := f''(x) = (f')'(x)$$

  die zweite Ableitung von $f$ in $x$.

- Rekursiv: $f$ $k$-mal differenzierbar in $x \in D$, falls es $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $f$ in $D \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ $(k-1)$-mal differenzierbar ist und die $(k-1)$-te Ableitung von $f$ in $x$ differenzierbar ist.

- 0-te Ableitung: $f^{(0)} := f$

- Syntaktische Beobachtung:

$$\frac{d\left(\cdot^{\cdot^{\cdot}}\left(\frac{d(f(x))}{dx}\right)\right)}{dx} \text{ „=“ } \frac{d^n}{(dx)^n} \text{ „=“ } \frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}f(x) \text{ „=“ } \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)$$

- Bezeichnungen:

$$f^{(k)}(x) := \frac{d^k}{dx^k}f(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x) := \frac{d}{dx}f^{(k-1)}(x)$$

- $f$ $k$-mal differenzierbar $:\Leftrightarrow$ $f$ $k$-mal differenzierbar in jedem $x \in D$.

- $f$ $k$-mal stetig differenzierbar $:\Leftrightarrow$ $f$ $k$-mal differenzierbar und $f^{(k)}$ stetig.

Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 16
# Lokale Extrema, Mittelwertsatz

Sei $D$ ein metrischer Raum, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x \in D$. $f$ hat in $x$ ...

- lokales Maximum
$$:\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : f(\xi) \leq f(x) \text{ für alle } \xi \in B(x, \varepsilon)$$
- (globales) Maximum:
$$:\Leftrightarrow f(\xi) \leq f(x) \text{ für alle } \xi \in D$$
- (globales) Minimum:
$$:\Leftrightarrow f(\xi) \geq f(x) \text{ für alle } \xi \in D$$
- striktes Minimum/Maximum: $f(\xi) \neq f(x)$ für $\xi \neq x$
- Extremum: Minimum oder Maximum

### 16.1 Satz: Ableitung an der Stelle des Extremums

$f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ besitze in $x \in (a, b)$ ein lokales Extremum, $f$ sei differenzierbar in $x$. Dann $f'(x) = 0$.

Beweis:

- Ohne Einschränkung: „Maximum“, $f(\xi) \leq f(x)$ für alle $\xi \in (a, b)$
- Dann gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} \leq 0 \\ f'(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x - \frac{1}{n}) - f(x)}{-\frac{1}{n}} \geq 0 \\ \Rightarrow f'(x) &= 0 \end{aligned}$$

### 16.2 Satz von Rolle

Sei $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) = f(b) = 0$, $f$ in $(a, b)$ differenzierbar. Dann gibt es $x \in (a, b)$ mit $f'(x) = 0$.

Beweis:

- Ist $f = 0$ (Nullfunktion!), dann klar.
- Sei $f \neq 0$. Dann gibt es $y \in (a, b)$ mit $f(y) \neq 0$. Ohne Einschränkung sei $f(y) > 0$.
Nach Satz 12.3 hat $f$ eine Maximumstelle $x \in [a, b]$ (also $f(\xi) \leq f(x)$ für alle $\xi \in [a, b]$) und $f(x) > 0$, also insbesondere $x \neq a, b$. Also $x \in (a, b)$. Aus Satz 16.1 folgt $f'(x) = 0$.

### 16.3 Folgerung: Mittelwertsatz

Sei $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f$ in $(a,b)$ differenzierbar. Dann gibt es $x \in (a,b)$ mit

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beweis:

- Es sei $F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$. Dann $F(a) = F(b) = 0$.
- Aus Satz 16.2 folgt:

$$\exists x \in (a,b) : 0 = F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Anschauung: $f \mathrel{\hat{=}}$ zurückgelegter Weg. $f' \mathrel{\hat{=}}$ Geschwindigkeit. Mittelwertsatz $\mathrel{\hat{=}}$ an mindestens einen Zeitpunkt fährt man so schnell wie die Durchschnittsgeschwindigkeit.

### 16.4 Folgerung: Monotonie

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f$ in $(a,b)$ differenzierbar.

1. Sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann $f$ konstant.
2. Sei $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$) für alle $x \in (a,b)$. Dann ist $f$ (streng) monoton wachsend.

Beweis:

- Sei $a \leq x < y \leq b$. Folgerung 16.3 auf $[x,y]$ angewendet ergibt:

$$\exists \xi \in (x,y) : f(y) - f(x) = f'(\xi) \cdot (y - x)$$

  1. Es folgt: $f(x) = f(y)$.
  2. Es folgt:

$$f(y) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$$

### 16.5 Folgerung: striktes Extrema

Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $x \in (a,b)$, $f$ zweimal differenzierbar in $x$. Es gelte:

$$f'(x) = 0 \qquad f''(x) > 0$$

Dann besitzt $f$ in $x$ ein striktes lokales Minimum. (Es folgt: Hat $f$ in $x$ lokales Maximum, dann $f'(x) = 0$ und $f''(x) \leq 0$.)

Beweis:

- Ohne Einschränkung: $f$ differenzierbar auf $(a,b)$.
- Aus $f''(x) > 0$ folgt:

$$\exists \varepsilon > 0 \,\text{mit}\, (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a,b), \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} > 0 \,\text{für}\, 0 < |\xi - x| < \varepsilon$$

- Damit $f'(\xi) < 0$ für $x - \varepsilon < \xi < x$ und $f'(\xi) > 0$ für $x < \xi < x + \varepsilon$. Aus Folgerung 16.4.b): $f$ streng monoton fallend auf $(x - \varepsilon, x]$ und $f$ streng monoton steigend auf $[x, x + \varepsilon)$.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 16.6 Folgerung: Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Seien $f$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, in $(a,b)$ differenzierbar. Dann gibt es $x \in (a,b)$ mit

$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(x) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(x)$$

Beweis:

- Betrachte

$$F(y) := [f(b) - f(a)] \cdot [g(y) - g(a)] - [g(b) - g(a)] \cdot [f(y) - f(a)]$$

- Dann Satz 16.2 ($F(b) = F(a) = 0$) mit

$$F'(y) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(y) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(y)$$

### 16.7 Folgerung: Regel von de l'Hôpital

Seien $f$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, in $(a,b)$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Außerdem $f(a) = g(a) = 0$. Es existiere $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Dann gilt:

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beweis:

- O.b.d.A ist $g(x) \neq 0$ für $x \neq a$
- Sei $(x_n)$ in $(a,b)$ mit $x_n \to a$. Nach Folgerung 16.6 gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \xi_n \in (a, x_n) \text{ mit } (f(x_n) - \underbrace{f(a)}_{=0}) \cdot g'(\xi_n) = (g(x_n) - \underbrace{g(a)}_{=0}) \cdot f'(\xi_n)$$

  wobei $\xi_n \to a$ $(n \to \infty)$ . Es folgt:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} & = & \dfrac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \\ & \Downarrow & \\ \lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \overset{13.5}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} & = & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \end{array}$$

- Also ist $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ konvergent (nach 13.5) und $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)}{g(y_n)} = \dots$

Beispiele:

1.
$$\lim_{x\to 0+} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{2}$$

2.
$$\lim_{x\to 0+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

3.
$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right) & = & \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin x - x}{x \cdot \sin x} \\ & = & \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{-1 + \cos x}{x \cdot \cos x + \sin x} \\ & = & \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{-\sin x}{-x \cdot \sin x + 2\cos x} \\ & = & 0 \end{array}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Bemerkung: Regel gilt auch für $\lim_{x\to\infty}$ ... und für unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{\infty}{\infty}$ (Übung)

Beispiele:

1. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

2. $\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\cdot \ln x}$

   $$\lim_{x\to 0+} x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 0$$

   Also: $\lim_{x\to 0+} x^x = 1$.

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 17
# Das Riemann-Integral

Integral einer positiven Funktion $\hat{=}$ Fläche unter dem Graphen von $f$

## 17.1 Definition

### 17.1.1 Treppenfunktion

Seien $a,\ b \in \mathbb{R}, a < b$. Eine Funktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es $n \in \mathbb{N}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ gibt, sodass $\varphi$ auf $(x_{k-1}, x_k)$ konstant ist für $k = 1, \ldots, n$. ($T[a,b] =$ Menge der Treppenfunktionen)

- Behauptung: $T[a,b]$ ist ein Vektorraum. (Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen auf $[a,b]$)
- Beweis: Dazu zu zeigen:
  1. $0 \in T[a,b]$ (Nullfunktion) Klar.
  2. $\varphi \in T[a,b], \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \varphi \in T[a,b]$ Klar.
  3. $\varphi, \psi \in T[a,b] \Rightarrow \varphi + \psi \in T[a,b]$
     - Unterteilung für $\varphi : a = x'_0 < x'_1 < \ldots < x'_{n'} = b$
     - Unterteilung für $\psi : a = x''_0 < x''_1 < \ldots < x''_{n''} = b$
     - Seien $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ so, dass $\{x_0, \ldots, x_n\} = \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n'}\} \cup \{x''_0, x''_1, \ldots, x''_{n''}\}$. Dann sind $\varphi, \psi$ konstant auf $(x_{k-1}, x_k)$ für alle $k = 1, \ldots, n$, damit auch $\varphi + \psi$.

### 17.1.2 Integral

Sei $\varphi \in T[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\varphi(x) = c_k$ für $x_{k-1} < x < x_k$ für $k = 1, \ldots, n$. Wir definieren

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

als das Integral von $a$ nach $b$ über die Treppenfunktion $\varphi$. Es ist Noch zu zeigen, dass die Definition „wohldefiniert“ ist, d.h. rechte Seite unabhängig von Unterteilung.

- Seien dazu $a = x'_0 < x'_1 < \ldots < x'_{n'} = b$ so, dass $\varphi(x) = c'_k$ für $x'_{k-1} < x < x'_k$ für $k = 1, \ldots, n'$.

- Fall 1: Zweite Unterteilung ist feiner als erste, d.h. $\{x_0, \ldots, x_n\} \subseteq \{x'_0, \ldots, x'_{n'}\}$. Dann gibt es $0 = j_0 < j_1 < \ldots < j_n = n'$ mit $x_k = x'_{j_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Dann:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n'} c'_j \cdot (x'_j - x'_{j-1}) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} c'_j \cdot (x'_j - x'_{j-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} (x'_j - x'_{j-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (x_k - x_{k-1})
\end{aligned}$$

- Fall 2: allgemein
  Wähle Unterteilung, die feiner als $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ und als $a = x'_0 < \ldots < x'_{n'} = b$. Dann mit 1. Schritt:

$$\sum_{\text{1. Unterteilung}} = \sum_{\text{Verfeinerung}} = \sum_{\text{2. Unterteilung}}$$

### 17.1.3 Satz: Linearität

Es seien $X$, $Y$ Vektorräume über $\mathbb{K}$. $A\colon X \to Y$ heißt linear

$$:\Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} &\forall x, y \in X : A(x + y) = A(x) + A(y) \\ &\forall x \in X, \lambda \in K : A(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot A(x) \end{aligned}$$

Seien $\varphi, \psi \in T[a, b], \lambda \in \mathbb{R}$. Dann:

1. $$\int_a^b (\varphi + \psi)(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx$$

2. $$\int_a^b (\lambda \cdot \psi)(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b \varphi(x)dx$$

   d.h. die Abbildung $\delta\colon T[a, b] \to \mathbb{R}, \varphi \mapsto \int_a^b \varphi(x)dx$ ist linear.

3. Aus $\varphi \geq 0$ (d.h. $\forall x : \varphi(x) \geq 0$) folgt $\int_a^b \varphi(x)dx \geq 0$

4. Außerdem
   $$\int_a^b |\varphi(x)|dx \geq \left| \int_a^b \varphi(x)dx \right|$$

Beweis:

- Einfach, für a) Unterteilung verwenden, die für $\varphi$ und $\psi$ gilt:

  $$\varphi(x) = c_k \qquad \psi(x) = d_k \,\text{für}\, x_{k-1} < x < x_k \quad k = 1, \ldots, n$$

  Dann:
  $$\sum_{k=1}^{n} (c_k + d_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} d_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Bemerkung: Letzte Eigenschaft impliziert Monotonie: $\varphi, \psi \in T[a, b], \varphi \leq \psi$. Dann:

$$\begin{aligned}
\int (\psi - \varphi)(x)dx = \int \psi(x)dx - \int \varphi(x)dx &\geq 0 \\
\Rightarrow \int \varphi(x)dx &\leq \int \psi(x)dx
\end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 17.1.4 Riemann-Integrierbarkeit

- Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann

$$\overline{\int} f(x)dx := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx \middle| \varphi \in T[a,b], \varphi \geq f \right\}$$

das Oberintegral von $f$.

$$\underline{\int} f(x)dx := \sup \left\{ \int_a^b \psi(x)dx \middle| \psi \in T[a,b], \psi \leq f \right\}$$

das Unterintegral von $f$. Offenbar: (Monotonie des Treppenintegrals)

$$-\infty < \underline{\int} f(x)dx < \overline{\int} f(x)dx < \infty$$

- $f$ heißt Riemann-Integrierbar, wenn

$$\underline{\int} f(x)dx = \overline{\int} f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx$$

- $[a,b]$: Menge der Riemann-Integrierbaren Funktionen
- Beispiele:
  1. Für $\varphi \in T[a,b]$ gilt:

$$\overline{\int} \varphi(x)dx = \underline{\int} \varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx$$

     (vorher definiertes Integral auf den Treppenfunktionen)
     Also: $T[a,b] \subseteq R[a,b]$
  2. Dirichlet-Funktion: Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases} \\ \overline{\int} f(x)dx &= 1 \\ \underline{\int} f(x)dx &= 0 \end{aligned}$$

     Also $f \notin R[0,1]$
- Bemerkung: Riemannsches Integrierbarkeitskriterium (Übung)

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \varphi, \psi \in T[a,b], \varphi \leq f \leq \psi, \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))dx \leq \varepsilon$$

## 17.2 Satz: Riemann-Integrierbarkeit von stetigen Funktionen

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f \in R[a,b]$

Beweis:



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Sei $\varepsilon > 0$. Es genügt zu zeigen:

$$\exists \varphi, \psi \in T[a,b], \varphi \leq f \leq \psi, \max_{a \leq x \leq b} (\psi(x) - \varphi(x)) \leq \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{b-a}$$

  Dann folgt nämlich:

$$\begin{aligned} \int (\psi(x) - \varphi(x))\,\mathrm{d}x &\leq \int_a^b \max_{a \leq x \leq b} (\psi(x) - \phi(x))\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_a^b \varepsilon'\,\mathrm{d}x \\ &= \varepsilon' \cdot (b-a) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

- $f$ stetig auf $[a,b]$, also $f$ gleichmäßig stetig. Also gibt es $\delta > 0$: Für alle $x, x' \in [a,b]$ mit $|x - x'| \leq \delta$ gilt $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon'$.
- Seien $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ mit $x_j - x_{j-1} \leq \delta$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Definiere:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= \inf\{f(y) \mid x_{j-1} \leq y < x_j\} \text{ für } x_{j-1} \leq x < x_j \\ \psi(x) &:= \sup\{f(y) \mid x_{j-1} \leq y < x_j\} \text{ für } x_{j-1} \leq x < x_j \\ \varphi(b) &:= \psi(b) := f(b) \end{aligned}$$

- Dann $\varphi \leq f \leq \psi$, $\psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon'$ für alle $x \in [a,b]$.

### 17.3 Satz: Riemann-Integrierbarkeit von monotonen Funktionen

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton $\Rightarrow f \in R[a,b]$

Beweis: (nur für monoton wachsend)

- Sei $n \in \mathbb{N}$,

$$x_j := a + \frac{(b-a)}{n} \cdot j \qquad j \in \{0, \ldots, n\}$$

- Dann:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= f(x_{j-1}) \text{ für } x_{j-1} \leq x < x_j,\ j = 1, \ldots, n \\ \psi(x) &:= f(x_j) \text{ für } x_{j-1} \leq x < x_j,\ j = 1, \ldots, n \\ \varphi(b) &:= \psi(b) := f(b) \end{aligned}$$

- Dann $\varphi \leq f \leq \psi$ ($f$ monoton).

$$\begin{aligned} \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))dx &= \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) \cdot (x_j - x_{j-1}) \\ &= (f(x_n) - f(x_0)) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= (f(b) - f(a)) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &\to 0\,(n \to \infty) \end{aligned}$$

Beispiel:



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- $\int_0^a x \,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) &:= \begin{cases} a \cdot j \cdot \frac{1}{n} & \text{für } a \cdot \frac{j-1}{n} \leq x \leq a \cdot \frac{j}{n}, j =, 1 \ldots, n \\ a & \text{für } x = a \end{cases} \\
\Rightarrow \int_0^a \varphi_n(x) dx &= \sum_{j=1}^n a \cdot j \cdot \frac{1}{n} \cdot a \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{a^2}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^n j \\
&= \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \to \frac{a^2}{2} \\
\Rightarrow \int_0^a x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} a^2
\end{aligned}$$

### 17.4 Satz: Riemann-Summen

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-Integrierbar. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, sodass für jede $\delta$-feine Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ („Feinheit“: $\max_{j=1,..,n}(x_j - x_{j-1}) \leq \delta$) und für jede Wahl von Zwischenpunkten $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ $(j = 1, \ldots, n)$ gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^n f(\xi_n) \cdot (x_j - x_{j-1}) \right| \leq \varepsilon$$

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$ Es gibt $\varphi, \psi \in T[a,b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$, $\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq \varepsilon$. Es gibt $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$, sodass $\varphi$ und $\psi$ konstant auf $[t_{j-1}, t_j]$ $(j = 1, .., n)$
- Sei $\delta := \frac{\varepsilon}{m}$. Sei nun $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ mit $\max(x_j - x_{j-1}) < \delta$, $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ (j=1,..,n)

  $$F(x) := \begin{cases} f(\xi_j) & \text{für } x \in (x_{j-1}, x_j) \, (j = 1, \ldots, n) \\ f(x_j) & \text{für } x = x_j \, (j = 0, \ldots, n) \end{cases}$$

  Dann $F \in T[a,b]$ und

  $$\int_a^b F(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1})$$

- Sei

  $$\begin{aligned}
  A &:= \bigcup_{\substack{k \in \{0, \ldots, m\} \\ t_k \in [x_{j-1}, x_j]}} \{(x_{j-1}, x_j)\} \\
  M &:= \sup\{|f(x)|; a \leq x \leq b\} (< \infty) \\
  \chi(x) &:= \begin{cases} 2M & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \in [a,b] \backslash A \end{cases}
  \end{aligned}$$

  $A$ ist die Vereinigung von maximal $2m$ Intervallen.

Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Dann $\chi \in T[a,b]$, $\varphi - \chi \leq F \leq \psi + \chi$, $\varphi - \chi \leq f \leq \psi + \chi$. sowieso:

$$\begin{aligned}
\int (\varphi - \chi) &\leq \int F \leq \int \psi + \chi \\
\int (\varphi - \chi) &\leq \int f \leq \int \psi + \chi \\
\Rightarrow \int ((\psi + \chi) - (\varphi - \chi)) &= \int (\psi - \varphi) + 2 \cdot \int \chi \\
&\leq \varepsilon + 2 \cdot 2m \cdot \delta \cdot M \\
&= \varepsilon \cdot (1 + 4M) \\
\Rightarrow \left| \int f - \sum_{j=1}^{f} (\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \right| &\leq \varepsilon \cdot (1 + 4M)
\end{aligned}$$

### 17.5 Hilfssatz: Rechenregeln für Ober-/Unterintegrale

Seien $f$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann:

$$\begin{aligned}
\overline{\int} \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x &= \lambda \cdot \overline{\int} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{für } \lambda \geq 0 \\
\overline{\int} (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x &\leq \overline{\int} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int} g(x)\,\mathrm{d}x \\
\underline{\int} f(x)\,\mathrm{d}x &= -\overline{\int} (-f(x))\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Beweis:

1. 
   - Klar für $\lambda = 0$
   - Sei $\lambda > 0$. Ist $\varphi \in T[a,b]$, $\varphi \geq f$, dann $\lambda \cdot \varphi \geq \lambda \cdot f$. Daher:

$$\begin{aligned}
\overline{\int} \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x &\leq \int \lambda \cdot \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda \cdot \int \varphi(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

   Daraus:

$$\begin{aligned}
\overline{\int} \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x &\leq \lambda \cdot \overline{\int} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda \cdot \overline{\int} \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \overline{\int} \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \overline{\int} \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

   Also alle „=“.

2. 
   - Seien $\varphi$, $\psi \in T[a,b]$, $f \leq \varphi$, $g \leq \psi$. Dann $f + g \leq \psi + \varphi (\in T[a,b])$. Damit:

$$\begin{aligned}
\overline{\int} f + g &\leq \int \varphi + \psi \\
&= \int \varphi + \int \psi \\
\Rightarrow \overline{\int} (f + g) - \int \psi &\leq \int \varphi
\end{aligned}$$



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Infimum über $\varphi$:

$$\begin{aligned} \overline{\int}(f+g) - \int \psi &\leq \overline{\int} f \\ \Rightarrow \overline{\int}(f+g) - \overline{\int} f &\leq \int \psi \end{aligned}$$

- Infimum über $\psi$:

$$\overline{\int}(f+g) - \overline{\int} f \leq \overline{\int} g$$

3. $\psi \in T[a,b]$:

$$\psi \leq f \Leftrightarrow -f \leq -\psi$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \underline{\int} f(x)\,\mathrm{d}x &= \sup\left\{\int \varphi \middle| \varphi \leq f, \varphi \in T[a,b]\right\} \\ &= \sup\left\{\int \varphi \middle| -\varphi \geq -f, \varphi \in T[a,b]\right\} \\ &= \sup\left\{\int -\psi \middle| \psi \geq -f, \psi \in T[a,b]\right\} \\ &\overset{17.1}{=} \sup\left\{-\int \psi \middle| \psi \geq -f, \psi \in T[a,b]\right\} \\ &= -\inf\left\{\int \psi \middle| \psi \geq -f, \psi \in T[a,b]\right\} \\ &= -\overline{\int}(-f)(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

### 17.6 Satz: Linearität des Integrals

Seien $f$, $g \in R[a,b]$. Dann sind $f+g, \lambda \cdot f \in R[a,b]$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) und es gilt:

1. $$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

2. $$\int_a^b (\lambda \cdot f(x))dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx$$

3. Monotonie des Integrals:

$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Beweis:

- Mit Hilfssatz 17.5 folgt:

$$\begin{aligned} \underline{\int} f + \underline{\int} g &= -\left(\overline{\int}(-f) + \overline{\int}(-g)\right) \\ &\leq -\overline{\int}(-f-g) \\ &= \underline{\int} f+g \leq \overline{\int}(f+g) \\ &\leq \overline{\int} f + \overline{\int} g \end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Aus $\overline{\int} f = \int f = \underline{\int} f$ und $\overline{\int} g = \int g = \underline{\int} g$ folgt Gleichheit, also $(f+g) \in R[a,b]$.
- Rest einfach mit Hilfssatz 17.5
- $\Rightarrow R[a,b]$ ist ein Vektorraum

### 17.7 Folgerung: Positiv-/Negativteil

Sei $f \in R[a,b]$. Dann gilt $f^+$, $f^-$, $|f| \in R[a,b]$ wobei:

$$\begin{aligned} f^+(x) &:= \max\{f(x), 0\} \qquad \text{Positivteil von } f \\ f^-(x) &:= (-f)^+ \qquad \text{Negativteil von } f \\ |f| &:= f^+ + f^- \\ f &= f^+ - f^- \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx \right| &\leq \int_a^b |f(x)|dx \\ &\leq (b-a) \cdot \sup\{|f(x)|; a \leq x \leq b\} \end{aligned}$$

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\varphi, \psi \in T[a,b]$, $\varphi \leq f \leq \psi$, $\int(\psi - \varphi) \leq \varepsilon$. Es gilt $\varphi^+, \psi^+ \in T[a,b]$, $\varphi^+ \leq f^+ \leq \psi^+$, $0 \leq \psi^+ - \varphi^+ \leq \psi - \varphi$. Somit gilt:

  $$\int(\psi^+ - \varphi^+) \leq \int(\psi - \varphi) \leq \varepsilon$$

  Aus Riemannschen Integrierbarkeitskriterium: $f^+ \in R[a,b]$.
- Damit auch $f^- = -(f - f^+)$ und $|f| \in R[a,b]$ nach Satz 17.6.
- Aus $\pm f \leq |f|$ folgt:

  $$\pm \int f(x)dx \leq \int |f(x)|dx$$

  damit erste Ungleichung. Für die 2. Ungleichung $|f| \leq \sup\{|f(x)|; a \leq x \leq b\}$

### 17.8 Satz: „Aufsplitten“ von Integralen

Sei $a < b < c$, $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$. Dann $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ Riemann-integrierbar genau dann, wenn $f \in R[a,c]$. Dann gilt:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Beweis: einfach

Man setzt:

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x)dx &:= 0 \\ \int_a^b f(x)dx &:= -\int_b^a f(x)dx \qquad \text{für } b < a \end{aligned}$$



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 18

# Integration und Differentiation, der „Hauptsatz“

- Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $F$, $f\colon I \to \mathbb{R}$. $F$ heißt Stammfunktion von $f$, wenn $F$ differenzierbar und $F' = f$.
- Sind $F$, $G$ Stammfunktionen von $f$, so gibt es $C \in \mathbb{R}$ sodass gilt:

  $$F' - G' = 0 \Rightarrow (F-G)' = 0 \Rightarrow F - G = \text{ const}(C) \Rightarrow F = G + \text{const}(C)$$

  wegen Folgerung 16.4a), d.h. verschiedene Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante.

## 18.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, I

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-Integrierbar, $F$ Stammfunktion von $f$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: |F(t)|_{t=a}^b =: F(t)|_{t=a}^b =: F|_a^b$$

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\varphi, \psi \in T[a,b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$, $\int(\psi - \varphi) \leq \varepsilon$. Es gibt $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, sodass $\varphi, \psi$ auf $(x_{k-1}, x_k)$ konstant für $k = 1, \ldots, n$. Dann:

  $$F(b) - F(a) \quad = \quad \sum_{j=1}^n F(x_j) - F(x_{j-1})$$

  Nach Mittelwertsatz: $\exists \xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$, $(j = 1, \ldots, n)$ mit:

  $$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^n F'(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \end{aligned}$$

- Aus $\varphi(\xi_j) \leq f(\xi_j) \leq \psi(\xi_j)$ für $j = 1, \ldots, n$ folgt:

  $$\int \varphi \leq \underbrace{\sum_{j=1}^n f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1})}_{F(b)-F(a)} \leq \int \psi$$

- Aber auch $\int \varphi \leq \int f \leq \psi$. $(\int \varphi, \int \psi)$ Intervall mit Länge $\leq \varepsilon$. Also $|\int f - (F(b) - F(a))| \leq \varepsilon$.

Beispiele:

1. Sei $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Dann:
$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1}|_a^b$$
Hierbei:
   - Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$: $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig
   - Für $\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \leq -2$: $a, b > 0$ oder $a, b < 0$
   - Für $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbb{Z}\}$: $a, b > 0$
2. $$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln x\,|_a^b & \text{für}\, a, b > 0 \\ \ln(-x)\,|_a^b & \text{für} a, b < 0 \end{cases}$$

### 18.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, II

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, $a \in I$. Sei $F\colon I \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$F(x) := \int_a^x f(y)dy \qquad \text{für}\, x \in I$$
Dann $F$ differenzierbar und $F' = f$.

Beweis:

- Sei $x \in I$, $h \in \mathbb{R}, h \neq 0, x + h \in I$.
$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \cdot (F(x+h) - F(x)) - f(x) &\overset{18.1}{=} \left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)dy\right) - f(x) \\ &\overset{17.8}{=} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(y) - f(x))dy \end{aligned}$$
- Weiter gilt:
$$\begin{aligned} \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} (f(y) - f(x))dy\right| &\leq \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \sup\{|f(y) - f(x)|; |y - x| \leq |h|\} \\ &\to 0\,(h \to 0) \end{aligned}$$
  ... da $f$ in $x$ stetig.

Bemerkung:

- Besitzt $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion $F$, so ist das unbestimmte Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ die Menge aller Stammfunktionen.
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := \{F \mid F' = f\}$$
- Falls $c$ die Menge aller Konstanten Funktionen von $I$ nach $\mathbb{R}$ sind dann gilt:
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F + c \qquad \left(\text{für ein } F \in \int f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$
$$N + M := \{n + m \mid n \in N \wedge m \in M\}$$
$$f + M := \{f\} + M$$
usw.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Beispiele

1. $$\int \frac{1}{x} dx = \ln \circ \operatorname{abs} + c = (x \mapsto \ln(|x|)) + c$$

   mit Definitinsbereich ohne 0, Schreibe der Einfachheilt halber wieder $\ln|x|$ für $x \neq 0$

2. Trigonometrische Funktionen:

$$\begin{aligned} \int \sin x \,\mathrm{d}x &= -\cos x \\ \int \cos x \,\mathrm{d}x &= \sin x \end{aligned}$$

   Insbesondere:

$$\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x|_0^\pi = 2$$

3. Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned} \int \exp x \,\mathrm{d}x &= \exp x \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x &= \arcsin x = -\arccos x \qquad \text{für} |x| < 1 \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \,\mathrm{d}x &= \operatorname{arcosh} x \qquad \text{für } |x| > 1 \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \,\mathrm{d}x &= \operatorname{arsinh} x \\ \int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x &= \arctan x \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x &= \tan x \end{aligned}$$

   Letzteres nur auf Intervallen ohne Nullstellen des cos.

4. $\int \frac{1}{1-x^2} \,\mathrm{d}x$ auf Intervallen $(-\infty,-1),(-1,1),(1,\infty)$. Partialbruchzerlegung:

$$(1-x^2) = (1-x)\cdot(1+x)$$

   Gesucht sind $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x}$$

   Lösung: $\alpha = \beta = 0{,}5$. Damit:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2}\cdot\left(\int \frac{dx}{1-x} + \int \frac{dx}{1+x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot(-\ln|1-x| + \ln|1+x|) \\ &\overset{13.2.2.3}{=} \frac{1}{2}\cdot \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \\ &= \begin{cases} \operatorname{artanh} x & \text{für } |x| > 1 \\ \operatorname{arcoth} x & \text{für } |x| < 1 \end{cases} \end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 18.3 Satz: Substitutionsregel (Kettenregel rückwärts)

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\varphi([a,b]) \subseteq I$. Dann:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, \mathrm{d}x$$

Rechenmethode: $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t) \cdot dt$

Beweis:

- Sei $F\colon I \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von $f$. Für $F \circ \varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}(F \circ \varphi)'(t) &= F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\ &= f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\end{aligned}$$

- Aus Satz 18.1:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt &= (F \circ \varphi)(t)\,|_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= F(x)\,|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Beispiele:

1.

$$\int_a^b f(t+c)\, dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\, \mathrm{d}x \qquad x = t + c = \varphi(t)$$

2.

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x = \int_{\sin^{-1}(a)}^{\sin^{-1}(b)} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\, dt = \int_u^v \cos^2 t\, dt$$

mit $x = \sin t, dx = \cos t \cdot dt, u = \arcsin a, v = \arcsin b$. Fortsetzung Lösungsweg siehe Beispiele partielle Integration.

### 18.4 Satz: Partielle Integration

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, Stammfunktion $G$. Dann:

$$\int f(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x = f \cdot G - \int f'(x) \cdot G(x)\, \mathrm{d}x$$

Beweis:

$$\begin{aligned}H \in \left(f \cdot G - \int f'(x) \cdot G(x)\, \mathrm{d}x\right) &\Leftrightarrow \forall x \in [a,b] : H'(x) = f'(x) \cdot G(x) + f(x) \cdot G'(x) - f'(x) \cdot G(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in [a,b] : H'(x) = f(x) \cdot g(x) \\ &\Leftrightarrow H \in \left(\int f(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

Beispiele:



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

1.

$$\begin{aligned}\int \ln x \cdot 1 \,\mathrm{d}x &= (\ln x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot (\ln x - 1)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int \arctan x \cdot 1 \,\mathrm{d}x &= (\arctan x) \cdot x - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot x \,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{später}}{=} x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2)\end{aligned}$$

Dabei wird die Substitutionsregel genutzt mit $y = 1 + x^2, dy = 2x \,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^2} \cdot x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} 2x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2y} \, dy \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln y = \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \,\mathrm{d}x &= x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\int \cos^2 t \, dt &= \cos t \cdot \sin t + \int \sin^2 dt \\ &= \cos t \cdot \sin t + \int 1 - \cos^2 t dt \\ &= \cos t \cdot \sin t + t - \cos^2 dt \\ \Rightarrow \int \cos^2 t \, dt &= \frac{1}{2}(\cos t \cdot \sin t + t)\end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels für Substitutionsregel:

$$\int_u^v \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2}(\arcsin|_a^b + \sqrt{1-x^2} \cdot x|_a^b)$$

Insbesondere für $a = -1$, $b = 1$:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 19
# Uneigentliche Integrale

Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ oder $b = \infty$. Sei $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a, r]$ mit $a < r < b$ integrierbar. Falls

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{r \to b-} \int_a^r f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert, heißt $f$ auf $[a, b)$ uneigentlich Riemann-Integrierbar. ($\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist konvergent.)
Analog für $-\infty \leq a < b < \infty, f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$.

Beispiele:

1. $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ ist konvergent für $\alpha > 1$, nicht konvergent für $\alpha \leq 1$

   Beweis: Für $\alpha \neq 1$:

$$\begin{aligned}
\int_1^r \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{1-\alpha} \cdot x^{1-\alpha}\Big|_1^r \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \cdot (r^{1-\alpha} - 1) \\
&\to \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} & \alpha > 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

   Für $\alpha = 1$:

$$\int_1^r \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x|_1^r \to \infty\,(r \to \infty)$$

2. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konvergent für $\alpha < 1$, nicht konvergent für $\alpha \geq 1$.
3. $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x := \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ nicht konvergent für $\alpha \in \mathbb{R}$
4. 

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &:= \lim_{r \to -\infty} \int_r^0 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{r \to \infty} \int_0^r \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{r \to -\infty} (-\arctan r) + \lim_{r \to \infty} \arctan r \\
&= \pi
\end{aligned}$$

5. $\int_{-\infty}^\infty \sin x\,\mathrm{d}x =?$. Es existiert zwar $\lim_{r \to \infty} \int_{-r}^r \sin x\,\mathrm{d}x = 0$, aber

$$\lim_{r \to \infty} \int_0^r \sin x\,\mathrm{d}x = 1 - \lim_{r \to \infty} \cos r$$

   nicht. Damit ist auch $\int_{-\infty}^\infty \sin x\,\mathrm{d}x$ nicht definiert.

### 19.1 Satz: Integralvergleichskriterium für Reihen

Sei $f\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$ monoton fallend. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergent } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergent}$$

Beweis:

- Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{j=2}^{n} f(j) \leq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{j=1}^{n-1} f(j)$$

- Daher $\sum_{j=1}^{\infty} f(j)$ konvergent

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} f(j)\right)_n \text{ beschränkt} \\
&\Leftrightarrow \left(\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)_n \text{ beschränkt} \\
&\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergent } \left(r \mapsto \int_1^r f(x)\,\mathrm{d}x \text{ monoton wachsend}\right)
\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ konvergent } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Beweis: $\int_1^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$ konvergent für $\alpha > 1$ (siehe oben)

### 19.2 Satz: (Euler'sche) Gamma-Funktion

Für $x > 0$ ist das uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

konvergent. $\Gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ heißt (Euler'sche) Gamma-Funktion. Es gilt

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \text{für alle } x > 0$$

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

Beweis: Für $0 < t \leq 1$ gilt $0 < t^{x-1}e^{-t} \leq t^{x-1}$. Damit ist $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}x$ konvergent. Für $1 \leq t \leq \infty$ gilt:

$$0 < t^{x-1}e^{-t} = \underbrace{t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}}}_{\to 0 \text{ für } t\to\infty}\; e^{-\frac{t}{2}} \leq C_x e^{-\frac{t}{2}}$$

für ein $C_x > 0$. Damit ist $\int_1^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ konvergent, denn für $\alpha > 0$ ist $\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$. Die beiden letzten Gleichungen gelten wegen

$$\int_{r'}^{r} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = -t^x e^{-t}\big|_{r'}^{r} + \int_{r'}^{r} x t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$\Gamma(x+1) = 0 + x\Gamma(x)$ durch Grenzübergänge $r \to \infty$ und $r' \to 0$ und nach Induktion:

$$\Gamma(0+1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

$$\Gamma((n+1)+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$$

Bemerkung:



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ Damit kann man $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ berechnen. Wir werden später in Kapitel Transformationsformel das Integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ berechnen und damit auch $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Die Gammafunktion „interpoliert“ die Fakultät. z.B. wichtig für die Berechnung des Volumens der $n$-dimensionalen Einheitskugel.

Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 20 Gleichmäßige Konvergenz, Potenzreihen

- Sei $K$ eine Menge, $(M,d)$ ein metrischer Raum. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \colon K \to M$, $f \colon K \to M$.

$$\begin{aligned} f_n \to f \text{ punktweise} \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x \in K : f_n(x) \to f(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \forall x \in K \, \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq N : d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \\ f_n \to f \text{ gleichmäßig} \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \, \forall x \in K \;\; \forall n \geq N : d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

- Ist $g \colon K \to \mathbb{K}$ so definieren wir

$$\|g\|_K := \sup\{|g(x)|; x \in K\}$$

  die Supremumsnorm.

- Bemerkungen:

  1. $g$ beschränkt $\Leftrightarrow \|g\|_K < \infty$
  2. Im Metrischen Raum $(N,e)$ mit $N := \{f \mid f \colon K \to M\}$ und $e(x,y) := \|x-y\|_K$

$$f_n \to f \text{ punktweise} \quad \Leftrightarrow \quad \lim f_n = f$$

  3.

$$\begin{aligned} f_n \to f \text{ gleichmäßig} \quad &\Leftrightarrow \quad \sup_{x \in K} d(f_n(x), f(x)) \to 0 \, (n \to \infty) \\ &\Leftrightarrow \quad \|f_n - f\|_K \to 0 \, (n \to \infty) \quad \text{wenn } M = \mathbb{K} \end{aligned}$$

  4. $f_n \to f$ gleichmäßig $\Rightarrow f_n \to f$ punktweise (i.A. $\not\Leftarrow$)

     Beispiel: $K = [0,1]$

$$f_n(x) = x^n \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

     $f_n \to f$ punktweise. Aber $\|f_n - f\|_{[0,1]} = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, also nicht $f_n \to f$ gleichmäßig

### 20.1 Satz: Gleichmäßige Konvergenz + Stetigkeit

Seien $(K,c)$ und $(M,d)$ metrische Räume, $f_n \colon K \to M$ stetig für $n \in \mathbb{N}$, $f \colon K \to M$, $f_n \to f$ gleichmäßig. Dann $f$ stetig.

Beweis:

- Sei $x \in K$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $d(f(y), f_n(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $y \in K$.
- Da $f_n$ stetig, gibt es $\delta > 0$, sodass für alle $y \in K$ mit $c(y,x) < \delta$: $d(f_n(y), f_n(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

- Für $y$ mit $c(y,x) < \delta$ folgt:

$$\begin{aligned} d(f(y), f(x)) &\leq d(f(y), f_n(y)) + d(f_n(y), f(x)) \\ &\leq d(f(y), f_n(y)) + d(f_n(y), f_n(x)) + d(f_n(x), f(x)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

  Also $f$ stetig in $x$.

### 20.2 Satz: Konvergenzkriterium von Weierstraß

Sei $K$ eine Menge, $(f_n)$ eine Folge in $B(K) := \{f\colon K \to \mathbb{K} \mid f \text{ beschränkt}\}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_K < \infty \qquad \left(\Leftrightarrow: \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ sei } \|\cdot\|_K\text{-absolut konvergent}\right)$$

und $F$ sei durch

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in K$$

definiert. Dann sind die Folgen $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)_n$ absolut konvergent (damit ist $F$ dann wohldefiniert) und

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)_n \to F \quad \text{gleichmäßig}$$

Beweis:

- Absolute Konvergenz: $\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) \leq \|f_n\|_K \Rightarrow \sum_{n=1}^{n} f_n(x) \leq \sum_{n=1}^{n} \|f_n\|_K$ und $\left(\sum_{n=1}^{n} \|f_n\|_K\right)_n$ konvergent, dann Majorantenkriterium

- Für $x \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} \left|F(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \\ &\overset{6.4.1}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_K \end{aligned}$$

  Daher:

$$\begin{aligned} \left\|F - \sum_{k=1}^{n} f_k\right\|_K &= \sup_{x \in K} \left|F(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_K \\ &\to 0 \, (n \to \infty) \end{aligned}$$

Beispiel:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx$ gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{R}$ ($\|\cdot\|_K$-absolut konvergent), damit stetig.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

## 20.3 Potenzreihe

Eine Potenzreihe ist eine Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$$

mit $(c_n)$ in $\mathbb{K}$, Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{K}$ für $x \in \mathbb{K}$. $0^0 := 1$

Beispiele:

1. Exponentialreihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
2. geometrische Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

### 20.3.1 Satz: Konvergenzradius

Sei

$$r := \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|}}$$

mit $\frac{1}{\infty} := 0, \frac{1}{0} := \infty$. Dann gilt: Für alle $\varrho \in (0, r)$ konvergiert die Potenzreihe $\|\cdot\|_{B[a,\varrho]}$-absolut, insbesondere gleichmäßig auf $B[a, \varrho]$. Für $x$ mit $|x-a| > r$ ist die Potenzreihe divergent.
$r$ heißt Konvergenzradius von der Potenzreihe, Cauchy-Hadamard-Formel für $r$.

Beweis:

- Für $r = 0$ keine Konvergenz zu zeigen. Sei $f_n(x) := c_n \cdot (x-a)^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $0 < \varrho < r$,
$$1 > \varrho \cdot \lim_{n\to\infty} \sup |c_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup |\varrho^n \cdot c_n|^{\frac{1}{n}}$$
Nach Wurzelkriterium: $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot \varrho^n < \infty$.
Aus
$$\|f_n\|_{B[a,\varrho]} = \sup_{|x-a|\le\varrho} |c_n \cdot (x-a)^n| = |c_n| \cdot \sup_{|x-a|\le\varrho} |x-a|^n = |c_n| \cdot \varrho^n$$
folgt die Behauptung $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{B[a,\varrho]} = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot \varrho^{\frac{1}{n}} < \infty$.
- Sei $|x-a| > r$. Dann:
$$\begin{aligned} 1 &< |x-a| \cdot \limsup |c_n|^{\frac{1}{n}} \\ &= \limsup |c_n \cdot (x-a)^n|^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$
Daher gibt es $1 < q$ Teilfolge $|c_{n_j} \cdot (x-a)^{n_j}|^{\frac{1}{n_j}} > q$. Also $(c_n \cdot (x-a)^n)_n > q^n$ unbeschränkt.

Bemerkung: Es folgt:

$$\begin{aligned} r &= \sup\left\{|x-a| \;\middle|\; \sum c_n \cdot (x-a)^n \text{ konvergent/beschränkt}\right\} \\ &= \sup\{\varrho \ge 0 \mid (c_n \cdot \varrho^n)_n \text{ beschränkt}\} \end{aligned}$$

Beispiel:

- Exponentialreihe $\sum \frac{x^n}{n!}$ hat Konvergenzradius $\infty$, konvergiert gleichmäßig auf Kreisen $B[0, \varrho]$ für $0 < \varrho < \infty$, nicht gleichmäßig auf $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$).

Bemerkung:



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- $r \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$. Für jedes $\varrho \in (0, r)$ ist die Potenzreihe gleichmäßig konvergent auf $B[0, \varrho]$, also
$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$$
stetig auf $B(a, r)$ nach Satz 20.1.

Es gibt keine Konvergenzaussage für $|x - a| = r$!
Beispiele:

| | $z = -1$ | $z = 1$ |
|---|---|---|
| $\sum nz^n$ | Divergnz | Divergenz |
| $\sum \frac{1}{n} z^n$ | Konvergenz | Divergenz |
| $\sum \frac{1}{n^2} z^n$ | absolute Konvergenz | absolute Konvergenz |

### 20.4 Satz: Vertauschbarkeit von Limes und Integral

Seien $f_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ stetig, $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f_n \to f$ gleichmäßig. Dann:
$$\begin{aligned} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x &\to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ \left( \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \right) \end{aligned}$$

Beweis:

- $f$ stetig nach Satz 20.1.Dann gilt:
$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| &\overset{17.1.3.1}{=} \left| \int_a^b (f_n - f)(x)\,\mathrm{d}x \right| \\ &\overset{17.1.3.4}{\leq} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\overset{17.1.3.3}{\leq} \int_a^b \|f_n - f\|_{[a,b]}\,\mathrm{d}x \\ &= (b-a) \cdot \|f_n - f\|_{[a,b]} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

Bemerkung:

- $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ gilt i.a. nicht bei punktweiser Konvergenz

Beispiel:

- Sei $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 2n - 2n^2 x & x \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
Dann gilt $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$ punktweise, aber $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ also
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{=0}\,\mathrm{d}x$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 20.5 Satz: Vertauschbarkeit von Limes und Differentiation

Seien $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ($n \in \mathbb{N}$). Seien $f$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$f_n \to f \text{ punktweise} \qquad f_n' \to g \text{ gleichmäßig}$$

Dann ist $f$ stetig differenzierbar und

$$f' = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n' = g$$

- Beweis:

$$\begin{aligned}
\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' &\overset{18.1}{=} \left(\lim_{n\to\infty}\left(f_n(a) + \int_a^{\cdot} f_n'(y)\,\mathrm{d}y\right)\right)' \\
&\overset{20.1}{=} \left(f(a) + \int_a^{\cdot} g(y)\,\mathrm{d}y\right)' \\
&\overset{18.2}{=} 0 + g \\
&= \lim_{n\to\infty} f_n'
\end{aligned}$$

- Bemerkung: $f_n \to f$ gleichmäßig, $f_n$, $f$ stetig differenzierbar $\not\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n' = f'$
- Beispiel:

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{1}{n} \cdot \sin nx \\
f_n &\to 0 = f \qquad \text{(gleichmäßig)} \\
f_n'(x) &= \cos nx \not\to 0 = f'
\end{aligned}$$

### 20.6 Folgerung: Differentiation der Potenzreihe

Seien $a \in \mathbb{R}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}$ und

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$$

habe Konvergenzradius $r > 0$. Dann $f$ in $(a-r, a+r)$ differenzierbar,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot (x-a)^{n-1}$$

Der Konvergenzradius dieser „differenzierten“ Potenzreihe ist auch $r$.

Beweis:

- $\sum n \cdot c_n \cdot (x-a)^n$ konvergent $\Leftrightarrow \sum n \cdot c_n \cdot (x-a)^{n-1}$ konvergent und

  $$\limsup \sqrt[n]{n \cdot |c_n|} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$$

  da $\sqrt[n]{n} \to 1\,(n \to \infty)$. Deshalb gleicher Konvergenzradius.

- $$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot (x-a)^k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot c_k \cdot (x-a)^{k-1}$$

  Für $0 < \varrho < r$ ist wegen 20.3.1 $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot (x-a)^{n-1}$ gleichmäßg stetig auf $[a-\varrho, a+\varrho]$. Wende Satz 20.5 mit diesem Interval an. Daher 1. Behauptung auf $[a-\varrho, a+\varrho]$.



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Beispiele:

1.
$$\frac{d}{dx}e^x = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}\cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(n+1)!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$$

2.
$$\sin'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$$

3. Für $|x| < 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^n &= x\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1}\\ &= x\cdot\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\\ &= x\cdot\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\\ &= \frac{x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

### 20.7 Folgerung: beliebige Differenzierbarkeit der Potenzreihe

Die reelle Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(x-a)^n$ habe Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist $f\colon (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$ beliebig (oft) differenzierbar und

$$c_n = \frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(a)$$

Beweis:

- Beliebige Differenzierbarkeit mit Folgerung 20.6 und Induktion.
- Gleichung mit Induktion:

$$\begin{aligned}f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\cdot c_n\cdot(x-a)^{n-k}\\ \Rightarrow f^{(k)}(a) &= k!\cdot c_k\end{aligned}$$

Es folgt: Ist eine Funktion $f$ durch eine Potenzreihe darstellbar, dann sind die Koeffizienten eindeutig bestimmt. (Koeffizientenvergleich)

Frage:
Sei $f\colon (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Folgt daraus $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(a)\cdot(x-a)^n$?
Nein!

Beispiel:

$$f(x) := \begin{cases}0 & x \le 0\\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0\end{cases}$$

Dann $f$ beliebig oft differenzierbar, $f^{(n)}(0) = 0$ Für $x > 0$ ist $f^{(k)}(x) = p_k^{(1/x)}e^{-\frac{1}{x}}$ mit Polynom $p_k$ vom Grad $k$, aber

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(0)\cdot x^n = 0 \neq f(x)$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# Teil II

# Analysis II

# 21

# Taylor'sche Formel und Taylor-Reihe

Sei $f\colon (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $a$. Dann

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)\cdot(x-a)}_{\text{affin linear}} + |x-a| \cdot \underbrace{\eta(x)}_{\to 0 (x \to a)}$$

nach Satz 15.3. (Weierstraßsche Zerlegungsformel)

### 21.1 Satz: Erweiterung der Weierstraß'schen Zerlegungsformel

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(n-1)$-mal differenzierbar, $a \in I$, $f^{(n-1)}$ differenzierbar in $a$. Dann:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \left( \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (x-a)^j \right) + |x-a|^n \cdot \eta(x)$$

wobei $\eta\colon I \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} \eta(x) = 0$.

Beweis:

- Sei

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - \sum_{j=0}^{n} \left( \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (x-a)^j \right) \\ G(x) &= (x-a)^n \end{aligned}$$

- Dann:

$$\left( \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (x-a)^j \right)^{(m)} = \sum_{j=0}^{n-m} \frac{f^{(j+m)}(a)}{j!} \cdot (x-a)^j$$

- Nach der Regel von de l'Hôpital gilt mit $F^{(k)}(a) = G^{(k)}(a) = 0$ für $k = 0, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \frac{F(x)}{G(x)} &= \lim_{x\to a} \frac{F^{(n-1)}(x)}{G^{(n-1)}(x)} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)\cdot(x-a)}{n!\cdot(x-a)} \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x\to a} \left( \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} - f^{(n)}(a) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Damit $F(x) = |G(x)| \cdot \eta(x), \eta(x) \to 0 (x \to a)$.

### 21.2 Satz: Taylor'sche Formel

Seien $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, $f\colon [a,x] \to \mathbb{R}$ stetig, auf $[a,x)$ $n$-mal differenzierbar, auf $(a,x)$ $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \left( \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (x-a)^j \right) + R_{n+1}(x)$$

mit

$$R_{n+1}(x) := \frac{f^{(n+1)}(\varrho)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

für ein geeignetes $\varrho \in (a,x)$. (Lagrange-Restglied)

Beweis:

1. Vorbetrachtung
   - Seien $F$, $G\colon [a,x] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $[a,x)$ $n$-mal differenzierbar, auf $(a,x)$ $(n+1)$-mal differenzierbar, $F(a) = G(a) = 0$, $G'(y) \neq 0$ für $a < y < x$. Nach verallgemeinertem Mittelwertsatz (Folgerung 16.6) gibt es $\varrho' \in (a,x)$ mit
   $$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\varrho')}{G'(\varrho')}$$
   - Gilt auch $F'(a) = G'(a) = 0$ und ebenso $G''(y) \neq 0$ für $a < y < x$, dann gibt es $\varrho'' \in (a, \varrho')$ mit
   $$\frac{F'(\varrho')}{G'(\varrho')} = \frac{F''(\varrho'')}{G''(\varrho'')} = \ldots = \frac{F^{(n+1)}(\varrho^{(n+1)})}{G^{(n+1)}(\varrho^{(n+1)})}$$
   wobei $F^{(k)}(a) = G^{(k)}(a) = 0$ für $k = 0, \ldots, n$ und $G^{(k)}(y) \neq 0$ für $k = 1, \ldots, n+1$ für $a < y < x$ vorausgesetzt sind.
2. Anwendung von (1) auf
   $$\begin{aligned} F(y) &= f(y) - \sum_{j=0}^{n} \left( \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (y-a)^j \right) \\ G(y) &= (y-a)^{n+1} \end{aligned}$$
   - Die Voraussetzungen sind erfüllt. Also: Es gibt $\varrho \in (a,x)$ mit
   $$\begin{aligned} \frac{F(x)}{G(x)} &= \frac{F^{(n+1)}(\varrho)}{G^{(n+1)}(\varrho)} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\varrho)}{(n+1)!} \\ \Rightarrow F(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\varrho)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Taylor-Formel gilt auch „nach links“.

### 21.3 Folgerung: Polynom

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar, $f^{(n+1)} = 0$. Dann ist $f$ ein Polynom vom Grad $\leq n$.

Beweis:

- Sei $a \in I$. Dann $R_{n+1}(x) = 0$ für alle $x \in I$. Nach Satz 21.2:
$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \left( \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (x-a)^j \right)$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 21.4 Satz: Integralrestglied

Seien Voraussetzungen wie in Satz 21.2, aber $f$ auf $[a, x]$ (bzw. $[x, a]$ für analoge Seite) $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt die Taylor'sche Formel mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Beweis:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt \\ &= f(a) - \underbrace{(x-t) \cdot f'(t)|_a^x}_{=f'(a)\cdot(x-a)} + \int_a^x (x-t) \cdot f''(t)\, dt \\ &= f(a) + f'(a) \cdot (x-a) \underbrace{- \frac{(x-t)^2}{2} \cdot f''(t)|_a^x}_{=\frac{1}{2!}\cdot f''(a)\cdot(x-a)^2} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\, dt \\ &= \ldots \text{ Induktion} \end{aligned}$$

### 21.5 Taylor-Reihe

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, $a \in I$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

Taylor-Reihe von $f$ zum Entwicklungspunkt $a$.

Bemerkungen:

1. Der Konvergenzradius kann 0 sein.
2. Falls Taylor-Reihe konvergiert, dann ist nicht notwendig $= f$.

   Bsp.:

   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

   $f$ beliebig oft differenzierbar und $f^{(k)}(0) = 0$. (Für $x > 0$ $f^{(k)}(x) = p_k(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x}}$). Daher $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k = 0 \neq f(x)$ für $x > 0$.
3. Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Potenzreihe

   $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$$

   dann ist diese Reihe auch die Taylor-Reihe nach Folgerung 20.7
4. Um zu zeigen: „Taylor-Reihe = Funktion“ muss man $R_{n+1}(x) \to 0$ für alle $x \in I$ zeigen (nicht im Fall 3.)

Beispiel: Exponentialfunktion

- Taylor-Reihe nach 3.:

  $$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- Für $a \in \mathbb{R}$ ist Taylor-Reihe um Entwicklungspunkt $a$:

  $$\exp(x) = \exp(a) \cdot \exp(x-a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(a)}{n!} (x-a)^n$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 21.6 Satz: Logarithmusreihe

Für $-1 < x \leq 1$ gilt:

$$\ln(1+x) = +\frac{x^1}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n$$

Beweis:

- Falls $|x| < 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \ln(1+x)|_0^x \\
&\overset{15.6(1);18.1;15.5}{=} \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \\
&\overset{6.1}{=} \int_0^x \left( \lim_{k\to\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{k} (-1)^n \cdot t^n}_{\text{glm. konv. auf } [-|x|,|x|]} \right) dt \qquad \text{geom. Reihe} \\
&\overset{20.4}{=} \lim_{k\to\infty} \int_0^x \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \cdot t^n\,dt \\
&\overset{17.6}{=} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_0^x (-1)^n \cdot t^n\,dt \\
&\overset{18.1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot x^{n+1}
\end{aligned}$$

- Falls $x = 1$ gilt: Die Logarithmusreihe ist die Taylor-Reihe von $\ln(1+x)$ zum Entwicklungspunkt 0. Untersuche das Lagrange-Restglied

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \ln(1+x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} \frac{1}{1+x} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

für $n \geq 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|R_{n+1}(x)| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot (x-0)^{n+1} \right| \\
&\leq \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad (0 < \xi < 1; 0 \leq x \leq 1)
\end{aligned}$$

Insbesondere: $+\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... = \ln 2$ „schlecht“ konvergent. Benutze folgenden Trick: Für $|x| < 1$:

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= +\frac{x^1}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \\
\ln(1-x) &= -\frac{x^1}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots \\
\Rightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \overset{13.2.2.3)}{=} \ln(1+x) - \ln(1-x) &= +\frac{2}{1}x^1 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \ldots \\
\Rightarrow \ln 2 = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) &= 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \ldots\right)
\end{aligned}$$



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 21.7 Satz: Arcus-Tangens-Reihe

Für $|x| \leq 1$ gilt:

$$\arctan x = \frac{x^1}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Beweis:

- Sei $|x| < 1$. Dann:

$$\begin{aligned}
\arctan x &\overset{16.5\ 4)}{=} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(t^2\right)^n}_{\text{glm. konvergent auf } [-|x|,|x|]} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right|_{t=0}^{x} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}$$

- Für $x = \pm 1$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(\pm 1)^{2n+1}}{2n+1}$$

  konvergent nach Leibniz-Kriterium. Genauer gilt für $|x| \leq 1$:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| &\leq \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right| \\
&\leq \frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$

  Damit Reihe gleichmäßig konvergent auf $[-1, 1]$, somit stetig. Auch arctan stetig. Damit auch gleich für $x = \pm 1$.

Insbesondere: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

### 21.8 Satz: Binomische Reihe

Definiere für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\binom{\alpha}{0} &:= 1 \\
\binom{\alpha}{k+1} &:= \frac{\alpha - k}{k+1} \binom{\alpha}{k}
\end{aligned}$$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $|x| < 1$ gilt:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n$$

Beweis:



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- In Analysis I, Blatt 7, Aufgabe 49 gezeigt oder Analysis I, Blatt 10, Aufgabe 10.4:

$$b_\alpha(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n$$

konvergent für $|x| < 1$.

- Dann:

$$\begin{aligned}
b'_\alpha(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \binom{\alpha}{n} x^{n-1} \\
(1+x) \cdot b'_\alpha(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \binom{\alpha}{n+1} \cdot x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( (n+1) \cdot \binom{\alpha}{n+1} + n \cdot \binom{\alpha}{n} \right) \cdot x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha \cdot \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \\
&= \alpha \cdot b_\alpha(x)
\end{aligned}$$

- In Aufgabe auch gezeigt $b_\alpha(x) > 0$ für $|x| < 1$. Es folgt (Integration):

$$\begin{aligned}
\frac{b'_\alpha(x)}{b_\alpha(x)} &= \frac{\alpha}{1+x} \\
\ln b_\alpha(x) &= \alpha \cdot \ln(1+x) + c
\end{aligned}$$

Aus $b_\alpha(0) = 1$ folgt $c = 0$. Damit:

$$b_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$$

### 21.9 Folgerung: Absolutbetrag

Für $|x| \leq 1$ gilt:

$$|x| = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (x^2 - 1)^n$$

wobei die Reihe gleichmäßig auf $[-1, 1]$ konvergiert. ($|\cdot|$ gleichmäßig auf $[-1, 1]$ durch Polynome approximierbar.) Die Reihe ist keine Taylor-Reihe!

Beweis:

1. Es gilt:

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1, \qquad \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot (-1)^k < 0, \qquad (k \geq 1)$$

2. Zeige, dass $g_n(y) := \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} y^k$ gleichmäßig konvergent auf $[-1, 0]$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $y \in (-1, 0]$ gilt:

$$g_n(y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{\frac{1}{2}}{k} (-1)^k |y|^k}_{<0} \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot \underbrace{(-1)^k \cdot |y|^k}_{=y^k} \overset{21.8}{=} (1+y)^{\frac{1}{2}} > 0$$

$g_n(y)$ ist ein Polynom und somit stetig, womit $g_n(-1) \geqslant 0$. Also $g_n(-1)$ und $g_n(y)$ monoton fallend in $n$ und beschränkt somit konvergent.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Zur gleichmäßigen Konvergenz:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=n+1}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} y^k \right\| &= \sup_{y\in[-1,0]} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \binom{\frac{1}{2}}{k} y^k \right| \\
&\leqslant \sup_{y\in[-1,0]} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \binom{\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \right| \\
&= -\sum_{k=n+1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \\
&\to 0
\end{aligned}$$

3. Für $x \in [-1,1]$ ist $x^2 - 1 \in [-1,0]$. Daher

$$\begin{aligned}
|x| &= \sqrt{x^2} = (1 + (x^2-1))^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (x^2-1)^n
\end{aligned}$$

gleichmäßig konvergent für $|x| \leq 1$.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 22

# Topologie metrischer Räume, Kompaktheit

$(X, d)$ metrischer Raum. Erinnerung:

- $U \subseteq X$ offen $\Leftrightarrow \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq U$
- $A \subseteq X$ abgeschlossen $\Leftrightarrow X \setminus A$ offen

Sei $\mathcal{T} := \{U \subseteq X; U \text{ offen}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$

### 22.1 Satz: Eigenschaften offener Mengen

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. Sind $U, V \in \mathcal{T}$, dann $U \cap V \in \mathcal{T}$.
3. Ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, dann $\bigcup \mathcal{S} := \{x | \exists a \in U : x \in a\} \in \mathcal{T}$

Beweis:

1. Klar
2. Sei $x \in U \cap V$. Dann existieren $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$:

$$B(x, \varepsilon_1) \subseteq U \qquad B(x, \varepsilon_2) \subseteq V$$

   Mit $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ gilt dann:

$$B(x, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{j=1}^{2} B(x, \varepsilon_j) \subseteq U \cap V$$

3. Sei $x \in \bigcup \mathcal{S}$. Dann existiert $U \in \mathcal{S}$ mit $x \in U$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq U \subseteq \bigcup \mathcal{S}$.

Bemerkungen:

- Aus 2. folgt: Endlicher Durchschnitt offener Mengen ist offen.
- Ist $X$ eine Menge und $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit 1., 2. und 3., dann heißt $\mathcal{T}$ Topologie auf X und $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum.
- Unendlicher Durchschnitt offener Mengen ist im Allgemeinen nicht offen.

  Bsp.: $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$:

$$\underbrace{[0,1]}_{\text{nicht offen}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)}_{\text{offen}}$$

- $\emptyset, X$ abgeschlossen und gleichzeitig offen. Endliche Vereinigung endlicher Mengen ist abgeschlossen, beliebiger Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. (Komplementbildung)

## 22.2 Komplement, Inneres, Rand, Abschluß

Sei $Y \subseteq X$ und $(X, d)$ Metrischer Raum. Dann heißt

$$\dot{Y} := Y^\circ := \operatorname{int}(Y) := \{x \in Y \mid \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq Y\} \quad (\subseteq Y)$$

Inneres oder offener Kern von $Y$,

$$\overline{Y} := \operatorname{cl}(Y) := \{x \in X \mid \forall r > 0 : Y \cap B(x, r) \neq \emptyset\} \quad (\supseteq Y)$$

Abschluss oder abgeschlossene Hülle von $Y$ und

$$\partial Y := \overline{Y} \setminus \dot{Y}$$

Rand von $Y$.

Beispiele:

1. $Y := [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$
$$\dot{Y} = \emptyset \qquad \overline{Y} = [0, 1] \qquad \partial Y = [0, 1]$$
2. Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ (links: mit Rand, rechts: ohne Rand)
$$\dot{Y} = B(0, 1) \qquad \overline{Y} = B[0, 1] \qquad \partial Y = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| = 1\}$$

### 22.2.1 Satz: Eigenschaften

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Sei $Y \subseteq X$. Dann:

1. $\dot{Y}$ ist offen
2. $Y$offen $\Leftrightarrow Y = \dot{Y}$
3. $\overline{Y} = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus Y)$ und somit abgeschlossen
4. $Y$ abgeschlossen $\Leftrightarrow Y = \overline{Y}$
5. $\partial Y$ ist abgeschlossen. Es gilt:
$$\dot{Y} = Y \setminus \partial Y \qquad \overline{Y} = Y \cup \partial Y$$

Beweis:

1. direkt aus Definition
2. „$\Rightarrow$“: „$\subseteq$“: Sei $x \in Y$. Da $Y$ offen existiert $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq Y$. Nach Definition des Inneren ist $y \in \dot{Y}$
3. Es gilt:
$$\begin{aligned} \overline{Y} &= X \setminus X \setminus \overline{Y} \\ &= X \setminus \{x \in X \mid x \notin \{y \in X \mid \forall r > 0 : Y \cap B(y, r) \neq \emptyset\}\} \\ &= X \setminus \{x \in X \mid \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{Y \cap B(x, \varepsilon) = \emptyset}_{\Leftrightarrow B(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus Y}\} \\ &= X \setminus \operatorname{int}(X \setminus Y) \end{aligned}$$
4. Es gilt:
$$\begin{aligned} Y \text{abgeschlossen} &\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} X \setminus Y \text{ offen} \\ &\overset{2.}{\Leftrightarrow} X \setminus Y = \operatorname{int}(X \setminus Y) \\ &\overset{3.}{\Leftrightarrow} X \setminus Y = X \setminus \overline{Y} \\ &\overset{1.6.3}{\Leftrightarrow} Y = \overline{Y} \end{aligned}$$
5. $\partial Y \overset{Def}{=} \overline{Y} \setminus \dot{Y} \overset{1.6.4}{=} \overline{Y} \cap (X \setminus \dot{Y})$ ist Schnitt von abgeschlossenen Mengen und somit abgeschlossen. Rest folgt aus $\dot{Y} \subseteq Y \subseteq \overline{Y}, \partial Y = \overline{Y} \setminus \dot{Y}$



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 22.3 Kompaktheit

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Offene Überdeckung von $X$

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \text{ mit } \bigcup \mathcal{S} \left( = \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \right) = X$$

Dabei ist $\mathcal{S}$ ein „System“ von offenen Mengen.

$X$ heißt kompakt

- $:\Leftrightarrow$ Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{S}$ gibt es $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$, $\mathcal{F}$ endlich, mit $\bigcup \mathcal{F} = X$. (Kurz: Jede offene Überdeckung enthält eine endliche Teilüberdeckung.)
- $\Leftrightarrow$ Ist $\mathcal{R}$ ein System von abgeschlossenen Mengen mit der Endlichen-Durchschnitts-Eigenschaft, d.h. für alle $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}$, $\mathcal{E}$ endlich, gilt $\bigcap \mathcal{E} \neq \emptyset$, so ist $\bigcap \mathcal{R} \neq \emptyset$.

Zu „$\Rightarrow$“:

- Sei $\mathcal{R}$ wie angenommen. Definiere $\mathcal{S} = \{X \setminus A; A \in \mathcal{R}\} \subseteq \mathcal{T}$. Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ endlich. Dann:

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U = X \setminus \left( X \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U \right) = X \setminus \underbrace{\left( \bigcap_{U \in \mathcal{F}} \underbrace{X \setminus U}_{\in \mathcal{R}} \right)}_{\overset{(*)}{\neq} \emptyset} \neq X$$

  $(*)$ da $\mathcal{R}$ die Endliche-Durchschnitts-Eigenschaft hat.

- Also $\bigcup \mathcal{F} \neq X$ für alle $\mathcal{F} \subseteq S$. Damit gilt auch $\bigcup \mathcal{S} \neq X$ ($X$ kompakt; Sonst gäbe es ein endliches $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ mit $\bigcup \mathcal{F} = X$). Daraus

$$\emptyset \neq X \setminus \bigcup \mathcal{S} = X \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U = \bigcap_{U \in \mathcal{S}} X \setminus U = \bigcap_{A \in \mathcal{R}} A = \bigcap \mathcal{R}$$

Verallgemeinerung: $A \subseteq X$ heißt kompakt

- $:\Leftrightarrow$ $(A, d_A)$ ist kompakt, wobei $d_A$ die auf $A$ eingeschränkte Metrik ist.

#### 22.3.1 Satz: Kompaktheit & Folgenkompaktheit

Für $(X, d)$ äquivalent:

1. $X$ ist kompakt.
2. $X$ ist folgenkompakt. (Jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. (12.4))

Beweis:

1. „1. $\Rightarrow$ 2.“
   - Sei $(x_n)$ in $X$. Für $n \in \mathbb{N}$:
   $$A_n := \overline{\{x_j \mid j \geq n\}}$$
   Dann hat $\mathcal{R} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Endliche-Durchschnitts-Eigenschaft (Für $n_1 < \ldots < n_k$ ist $\bigcap_{j=1}^{k} A_{n_j} = A_{n_k} \neq \emptyset$). Da $X$ kompakt ist, ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.
   - $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ist abgeschlossen (22.1 Bemerkung 4), also ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \overset{22.2.1.3}{=} \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}$, wodurch wiederum für alle $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ gilt:
   $$\emptyset \overset{22.2}{\neq} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \cap B(x, r) \subseteq \overline{\{x_j \mid j \geq n\}} \cap B(x, r)$$



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- $\Rightarrow \overset{\frac{\varepsilon}{2}\text{-Argument}}{\cdots} \Rightarrow$ Sei $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Für alle $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$B(x,\varepsilon) \cap \{x_j \mid j \geq n\} \neq \emptyset$$

Also $x$ Häufungswert von $(x_n)$. Damit gibt es konvergente Teilfolge.

2. „2. $\Rightarrow$ 1."

   (a) Ist $X$ folgenkompakt, so gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $F \subseteq X$, $F$ endlich, sodass

$$X = \bigcup_{x\in F} B(x,\varepsilon)$$

(:$\Leftrightarrow$ $X$ präkompakt)

Annahme: dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(x_n)$, sodass

$$x_n \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} B(x_j,\varepsilon)$$

Damit $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$. Damit enthält $(x_n)$ keine Cauchy-Folge, also auch keine konvergente Teilfolge. Widerspruch!

   (b) Sei $\mathcal{S}$ eine offene Überdeckung von $X$. Dann gibt es $\lambda > 0$, sodass für jedes $x \in X$ ein $U_x \in \mathcal{S}$ mit $B(x,\lambda) \subseteq U_x$. ($\lambda$ heißt Lebesgue-Zahl der Überdeckung).

$$\begin{aligned} & \exists\lambda > 0\ \forall x \in X\ \exists U_x \in \mathcal{S} : B(x,\lambda) \subseteq U_x \\ \Leftrightarrow\ \neg\ & \forall\lambda > 0\ \exists x \in X\ \forall U\ \in \mathcal{S} : B(x,\lambda) \nsubseteq U \end{aligned}$$

Annahme: dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es eine Folge $(x_n)$ in $X$, sodass $B\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$ in keinem $U \in \mathcal{S}$ enthalten ist für $n \in \mathbb{N}$. Es gibt konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_j$, $x_{n_j} \to x$. Es gibt $U \in \mathcal{S}$ mit $x \in U$ ($\mathcal{S}$ ist Überdeckung) und $N \in \mathbb{N}$ mit $B\left(x, \frac{1}{N}\right) \subseteq U$. ($U$ ist offen) Es gibt $J \in \mathbb{N}$ sodass für alle $J \leqslant j$ gilt, dass $n_j \geq 2N$ und $x_{n_j} \in B\left(x, \frac{1}{2N}\right)$. Daher

$$B\left(x_{n_j}, \frac{1}{n_j}\right) \subseteq B\left(x, \frac{1}{N}\right) \subseteq U$$

Widerspruch!

Zu $\lambda$ gibt es nach a) $F \subseteq X$, endlich, mit

$$X = \bigcup_{x\in F} \underbrace{B(x,\lambda)}_{\subseteq U_x}$$

Also $\{U_x \mid x \in F\}$ eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{S}$.

### 22.4 Satz von Heine-Borel

Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

1. $A$ kompakt
2. $A$ beschränkt und abgeschlossen.

Beweis:

- $A$ kompakt $\Leftrightarrow$ $A$ folgenkompakt nach vorangegangenem Satz 22.3 spezialisert für $X = \mathbb{R}^n$
- $A$ folgenkompakt $\Leftrightarrow$ $A$ abgeschlossen und beschränkt nach Satz 12.4



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 23
# Kurven im $\mathbb{R}^n$

- Kurve in $\mathbb{R}^n$: stetige Abbildung $f\colon I \to \mathbb{R}^n$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Dann:

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

  wobei $f_j\colon I \to \mathbb{R}$ für $j = 1, \ldots, n$.

- $f$ differenzierbar in $a \in I$:

$$\begin{aligned} :\Leftrightarrow \quad & \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \cdot (f(x) - f(a))}_{=:f'(a)} \\ \overset{10.2.1}{\Leftrightarrow} \quad & f_1, \ldots, f_n \text{ in } a \text{ differenzierbar} \end{aligned}$$

- Beweis:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \begin{pmatrix} \frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a} \\ \vdots \\ \frac{f_n(x)-f_n(a)}{x-a} \end{pmatrix} \\ &\overset{10.2.1}{=} \begin{pmatrix} \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a} \\ \vdots \\ \lim_{x \to a} \frac{f_n(x)-f_n(a)}{x-a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_n'(a) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $f'(a)$ heißt Tangentialvektor zum Parameterwert $a$, falls $f'(a) \neq 0$ heißt

$$\frac{f'(a)}{|f'(a)|_2} := \underbrace{\frac{1}{|f'(a)|_2}}_{\in \mathbb{R}} \cdot f'(a) \in \mathbb{R}^n$$

  Tangenteneinheitsvektor.

- $f$ (stetig) differenzierbar $:\Leftrightarrow$ $f$ in jedem Punkt differenzierbar (und $f'$ stetig).

$$f' := a \mapsto f'(a)$$

- $f$ regulär $:\Leftrightarrow$ $f$ stetig differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ (schließt „Spitzen“ aus).
- $f$ Singulär $:\Leftrightarrow$ $f$ ist nicht regulär

- Eine Kurve ist nicht nur eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, sondern der Begriff schließt die Parametrisierung $f$ ein.
- Der Tangentialvektor ist der Limes der Sekantenvektoren.

Beispiele:

1. $s \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$$f(t) = s + t \cdot v$$
Gerade, regulär ($f'(t) \overset{10.2.1}{=} v \neq 0$)
2. $r > 0$, $c \neq 0$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$$f(t) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \\ c \cdot t \end{pmatrix}$$
Schraubenlinie
3. Die Neil'sche Parabel $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)^T$. Singulär für $I = \{0\}$

## 23.1 Rektifizierbarkeit

- Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ Kurve. Für eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ ist
$$\ell(f; t_0, \ldots, t_n) := \sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(t_{j-1})|_2$$
die Länge des Polygonzuges, der $f(t_0), \ldots, f(t_n)$ geradlinig verbindet.
- $f$ heißt rektifizierbar mit Länge $\ell(f) \in \mathbb{R}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta$ existiert, sodass für jede Unterteilung $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ mit Feinheit $\max_{1 \leq j \leq n}\{|t_j - t_{j-1}|\} < \delta$ gilt:
$$|\ell(f; t_0, \ldots, t_n) - \ell(f)| \leq \varepsilon$$

### 23.1.1 Satz: Rektifizierbarkeit stetig differenzierbarer Funktionen

$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar $\Rightarrow$ $f$ rektifizierbar mit Länge $\ell(f)$ und
$$\ell(f) = \int_a^b |f'(t)|_2 \, dt$$

Vorarbeit zum Beweis:

- Für $x, y \in \mathbb{K}^n$ definieren wir
$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \overline{y_j}$$
das Standard-Skalarprodukt. (siehe Lineare Algebra) Es gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (Abkürzung CSU):
$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle| &= \left| \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \overline{y_j} \right| \overset{10.1.2.8.3}{\leqslant} \sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot \overline{y_j}| \overset{\text{CSU}}{\leqslant} |x|_2 \cdot |y|_2 \\ \langle x, x \rangle &= (|x|_2)^2 =: |x|_2^2 \end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

## 23.2 Hilfssatz: „Mittelwertsatz“

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig, auf $(a,b)$ differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a,b)$, sodass

$$|f(b) - f(a)|_2 \leq |f'(\xi)|_2 \cdot (b-a)$$

Beweis:

- Für $y \in \mathbb{R}^n$ ist $t \mapsto \langle y, f(t)\rangle \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, auf $(a,b)$ stetig differenzierbar. Nach Mittelwertsatz gibt es $\xi_y \in (a,b)$ mit:

$$\begin{aligned} \langle y, f(b)\rangle - \langle y, f(a)\rangle &= \langle y, f(\xi_y)\rangle' \cdot (b-a) \\ \overset{23.0.3}{\Rightarrow} \langle y, f(b) - f(a)\rangle &= \langle y, f'(\xi_y)\rangle \cdot (b-a) \end{aligned}$$

- Für $y = f(b) - f(a)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} (|f(b) - f(a)|_2)^2 &= \langle f(b) - f(a), f'(\xi)\rangle \cdot (b-a) \\ &\overset{\text{CSU}}{\leqslant} (b-a) \cdot |f(b) - f(a)|_2 \cdot |f'(\xi)|_2 \end{aligned}$$

- Anschauung: $f$ beschreibt den Flug eines Partikels von Zeit 0 nach Zeit 1. $f([0,1])$ ist Flugbahn und $f'(x)$ der Geschwindigkeitsvektor zur Zeit $x$. Eine Flugbahn mit minnimaler Maximalbetragsgeschwindigkeit hat als Flugbahn die direkte Verbindungsgerade und konstante Betragsgeschwindigkeit $|f(b) - f(a)|_2$. Andere Kurven von $f(a)$ nach $f(b)$ nehmen einen Umweg. Die Aussage des Mittelwertsatzes ist jetzt: Damit das Partikel rechtzeitig ankommt muss zu irgendeinem Zeitpunkt die Gewschwindigkeit erhöht sein.

Beweis zu Satz 23.1:

- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, sodass $|f'(t) - f'(s)|_2 \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle $s, t \in [a,b]$ mit $|t-s| \leq \delta$ ($f'$ gleichmäßig stetig).
- Sei $a = t_0 < \ldots < t_k = b$ eine Unterteilung mit Feinheit $\leq \delta$. Dann:

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b |f'(t)|_2 \, dt - \sum_{j=1}^k |f(t_j) - f(t_{j-1})|_2 \right| \\ \overset{17.8}{\leq} & \sum_{j=1}^k \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f'(t)|_2 \, dt - |f(t_j) - f(t_{j-1})|_2 \right| \\ \overset{17.6}{=} & \sum_{j=1}^k \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left( |f'(t)|_2 - \frac{1}{(t_j - t_{j-1})} \cdot |f(t_j) - f(t_{j-1})|_2 \right) dt \right| \\ \overset{17.7}{\leq} & \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| |f'(t)|_2 - \frac{1}{(t_j - t_{j-1})} \cdot |f(t_j) - f(t_{j-1})|_2 \right| dt \\ \overset{10.1.1 \,\&\, 10.1.3.8}{\leq} & \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| f'(t) - \frac{1}{(t_j - t_{j-1})} \cdot (f(t_j) - f(t_{j-1})) \right|_2 dt \\ \overset{17.6}{=} & \sum_{j=1}^k \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \underbrace{|f(t_j) - f(t_{j-1}) - (t_j - t_{j-1}) \cdot f'(t)|_2}_{\leqslant\, ?} \, dt \end{aligned}$$



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Nach Hilfssatz 23.2 mit der Funktion $s \mapsto f(s) - s \cdot f'(t)$ und $a := t_{j-1}$ sowie $b := t_j$ existiert ein $\xi_j \in (t_{j-1}, t_j)$ mit:

$$\begin{aligned}
|f(t_j) - f(t_{j-1}) - (t_j - t_{j-1}) \cdot f'(t)|_2 &= |f(t_j) - t_j \cdot f'(t_j) - (f(t_{j-1}) - t_{j-1} \cdot f'(t_{j-1}))|_2 \\
&\overset{23.2}{\leqslant} (t_j - t_{j-1}) \cdot |\left(s \mapsto f(s) - s \cdot f'(t)\right)'(\xi_j)|_2 \\
&= (t_j - t_{j-1}) \cdot |f'(\xi_j) - f'(t)|_2 \\
&\leqslant (t_j - t_{j-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a}
\end{aligned}$$

- Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b |f'(t)|_2 \, dt - \sum_{j=1}^k |f(t_j) - f(t_{j-1})|_2 \right| &\leq \sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon
\end{aligned}$$

Somit ist $f$ rektifizierbar mit Länge $\int_a^b |f'(t)|_2 \, \mathrm{d}t$.
Beispiele:

1. Geradenstück. Es sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, a \in \mathbb{R}^n$, $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n, t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
f(t) &= a + t \cdot v, \qquad f'(t) = v \ \text{ stetig} \\
\ell(f) &= \int_0^1 |f'(t)|_2 \, dt = \int_0^1 |v|_2 \, dt = |v|_2 = |(a + 1 \cdot v) - (a + 0 \cdot v)|_2 = |f(1) - f(0)|_2
\end{aligned}$$

2. Kreisbogen, $0 \leq t \leq \varphi$:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\
\ell(f) &= \int_0^\varphi \sqrt{|-\sin t|^2 + |\cos t|^2} \, \mathrm{d}t = \int_0^\varphi \underbrace{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}}_{\overset{14.2.2}{=} 1} \, \mathrm{d}t = \varphi
\end{aligned}$$

3. Zykloide: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \qquad f'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\
\ell(f) &= \int_0^{2\pi} |f'(t)| \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cdot \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} \, dt \\
&\overset{\text{Additionstheorem mit } x=y=\frac{t}{2} \ \& \ 14.2.2}{=} \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} \, dt \\
&= -4 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4 - (-4) = 8
\end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Bemerkung:

- $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar,

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

  Dann:

$$\ell(\varphi) = \int_a^b (1 + f'(t)^2)^{\frac{1}{2}}\, dt$$

  Bogenlänge des Graphen von $f$

### 23.3 Parametertransformation

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ stetig und bijektiv. Dann ist $g = f \circ \varphi$ eine Kurve, $\varphi$ heißt Parametertransformation. Es gilt entweder oder:

1. $\varphi$ streng monoton wachsend $:\Leftrightarrow$ $\varphi$ orientierungstreu
2. $\varphi$ streng monoton fallend $:\Leftrightarrow$ $\varphi$ orientierungsumkehrend

Bemerkung:

- Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, $\varphi$ eine beliebige Parametertransformation. Dann

$$f \text{ rektifizierbar } \Leftrightarrow f \circ \varphi \text{ rektifizierbar}$$

  und in diesem Fall: $\ell(f) = \ell(f \circ \varphi)$.

  Beweis: ohne Einschränkung $\varphi$ orientierungstreu.

  1. „$\Rightarrow$“

     Es sei $f$ rektifizierbar und $\varphi$ eine Parametertransformation. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\tilde{\delta} > 0$, sodass für jede Unterteilung $a = t_0 < \ldots < t_k = b$ mit Feinheit $\leq \tilde{\delta}$ gilt:

$$|\ell(f) - \ell(f; t_0, \ldots, t_k)| \leq \varepsilon$$

     Außerdem $\varphi$ gleichmäßig stetig (12.5.1). Es existiert ein $\delta > 0$: Aus $|s - s'| \leq \delta$ folgt $|\varphi(s) - \varphi(s')| \leq \tilde{\delta}$. Ist $\alpha = s_0 < \ldots < s_k = \beta$ Unterteilung mit Feinheit $\leq \delta$, dann $a = \varphi(s_0) < \ldots < \varphi(s_k) = b$ Unterteilung mit Feinheit $\leq \tilde{\delta}$.

$$\begin{aligned} |\ell(f) - \ell(f \circ \varphi; s_0, \ldots, s_k)| &= |\ell(f) - \ell(f; \varphi(s_0), \ldots, \varphi(s_j))| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

     Also $(f \circ \varphi)$ rektifizierbar mit $\ell(f)$

  2. „$\Leftarrow$“

     Wegen $\varphi^{-1}: \underbrace{\varphi([\alpha,\beta])}_{=[a,b],\text{ da } \varphi \text{ bijektiv}} \to [\alpha,\beta]$ ist orientierungstreu (13.2). $\varphi([a,b]) = [\alpha,\beta]$, da $\varphi^{-1}$ bijektiv, also $\varphi^{-1}$ stetig (13.1). Sei $(f \circ \varphi)$ rektifizierbar. Wende „$\Rightarrow$“ auf $(f \circ \varphi)$ an. Daraus folgt $(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = f$ rektifizierbar.



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 24
# Partielle Ableitungen

- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$, $a \in U$, $j \in \{1, \dots, n\}$, dann ist $f$ in $a$ partiell differenzierbar (diffbar) in der $j$-ten Koordinatenrichtung

$$:\Leftrightarrow \lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{f(a + h \cdot e_j) - f(a)}{h}$$

  wobei $e_j = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(j-1)\text{-mal}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-j)\text{-mal}})^T$.

  $\Leftrightarrow$ Die Funktion $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)\colon U_a \to \mathbb{R}$ ist in $a_j \in U_a$ (10.1.3.2) differenzierbar, wobei

$$a_j \in U_a := \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) \in U\}$$

  Definiere

$$\partial_j f(a) := \lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{f(a + h \cdot e_j) - f(a)}{h}$$

  Es gilt:

$$\partial_j f(a) = \frac{d}{dt} f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)\Big|_{t = a_j}$$

- $f$ (stetig) partiell differenzierbar $:\Leftrightarrow$ $f$ in allen $x \in U$ und jeweils in jeder Koordinatenrichtung $j = 1, \dots, n$ partiell differenzierbar (und $f$ und $\partial_j f$ für $j = 1, \dots, n$ stetig).

- Sei $f$ partiell differenzierbar, $j \in \{1, \dots, n\}$, dann ist die partielle Ableitungen von $f$ in der $j$-ten Koordinatenrichtung definiert:

$$\partial_j f := \left( a \mapsto \lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{f(a + h \cdot e_j) - f(a)}{h} \right)$$

- $\partial_j$ ist eine Abbildung zwischen Funktionenräumen

$$\begin{aligned} \partial_j\colon (U \xrightarrow[\text{diffbar}]{\text{partiell}} \mathbb{R}) &\to (U \to \mathbb{R}) \\ f &\mapsto \partial_j f \end{aligned}$$

- Abweichend zur einzig wahren Bezeichnungen $\partial_j f(x)$ gibt es:

$$\partial_j f(x) =: D_j f(x) =: \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) =: \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) =: \dots$$

- Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ y \\ x_{y+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ auch:

$$\partial_j f(x) =: f_y(x) =: D_y f(x)$$

- 15.4 gilt auch für Partielle Ableitungen
- Beispiele:
  1. $r\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $r(x) = |x|_2 = (\sum_{j=1}^n x_j^2)^{\frac{1}{2}}$. $r$ ist auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar. Es gilt:

     $$\partial_j r(x) = \frac{x_j}{|x|_2}$$

     Beweis: Aus Kettenregel für $r = \left(t \mapsto \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{j-1}^2 + t^2 + x_{j+1}^2 + \ldots + x_n^2}\right)$ erhält man:

     $$\begin{aligned} \partial_j r(x) &= \frac{d}{dt}\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{j-1}^2 + t^2 + x_{j+1}^2 + \ldots + x_n^2}\Bigg|_{t=x_j} \\ &= \left(t \mapsto \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{j-1}^2 + t^2 + x_{j+1}^2 + \ldots + x_n^2}} \cdot 2t\right)(x_j) \\ &= \frac{x_j}{|x|_2} = \frac{x_j}{r(x)} \end{aligned}$$

  2. partiell differenzierbar $\not\Rightarrow$ stetig

     $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x^2 + y^2} & f(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & f(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann

  $$\operatorname{grad} f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix}$$

  der Gradient von $f$, auch $\nabla f(x) := \operatorname{grad} f(x)$ (Nabla-Operator). (Später zeigen wir dass $\operatorname{grad} f(x)$ die Richtung des stärksten Anstiegs von $f$ ist.)

  Beispiel:

  $$r(x) := |x|_2 \;\Rightarrow\; \operatorname{grad} r(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{|x|_2} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{|x|_2} \end{pmatrix} = \frac{x}{|x|_2}$$

- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. $f$ heißt ...
  - ... zweimal partiell differenzierbar $\Leftrightarrow$ $f$ partiell differenzierbar und alle Ableitungen $\partial_i f$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ nochmal partiell differenzierbar
  - ... $k$-mal partiell differenzierbar $\Leftrightarrow$ $f$ is $(k-1)$-mal partiell differenzierbar und alle Ableitungen $\partial_i f$ nochmal partiell differenzierbar



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

– … $k$-mal stetig differenzierbar $\Leftrightarrow$ $k$-mal partiell differenzierbar und alle Ableitungen der Ordnungen $\leq n$ stetig.

– Schreibweise mit $i_m \in \{1, \dots, n\}$, $m \in \mathbb{N}$

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_m} f := (\partial_{i_1} \cdots (\partial_{i_m} f) \cdots)$$

Beispiel: $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2^3$

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x_1, x_2) &= (\partial_1 f)(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 \cdot x_2^3 \\
\partial_2 f(x_1, x_2) &= = 3 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2 \\
\partial_1 \partial_1 f(x_1, x_2) &= \partial_1(\partial_1 f)(x_1, x_2) = 2 \cdot x_2^3 \\
\partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2) &= = 6 \cdot x_1 \cdot x_2^2 \\
\partial_1 \partial_2 f(x_1, x_2) &= = 6 \cdot x_1 \cdot x_2^2 \\
\partial_2 \partial_2 f(x_1, x_2) &= = 6 \cdot x_1^2 \cdot x_2
\end{aligned}$$

## 24.1 Lemma von Schwarz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar. Sei $a \in U$, $j, k \in \{1, \dots, n\}$ und $\partial_j \partial_k f$ sowie $\partial_k \partial_j f$ stetig in $a$. Dann:

$$\partial_j \partial_k f(a) = \partial_k \partial_j f(a)$$

Beweis:

- Ohne Einschränkung ist $n = 2$, $a = 0$, $j = 1$, $k = 2$.
- Es gibt $\delta > 0$, sodass $[-\delta, \delta]^2 \subseteq U$. Sei $0 < s < \delta$ und $0 < t < \delta$. Dann mit Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned}
& (f(s,t) - f(0,t)) - (f(s,0) - f(0,0)) \\
= \; & \big(\tau \mapsto f(s,\tau) - f(0,\tau)\big)(t) - \big(\tau \mapsto f(s,\tau) - f(0,\tau)\big)(0) \\
= \; & (t-0) \cdot \frac{d}{d\tau}(f(s,\tau) - f(0,\tau))\bigg|_{\tau=t_1} \qquad \text{MWS} : \exists t_1 (0 < t_1 < t) \\
= \; & t \cdot (\partial_2 f(s,t_1) - \partial_2 f(0,t_1)) \\
= \; & t \cdot (s-1) \cdot \frac{d}{d\sigma}(\partial_2 f(\sigma,t_1))\bigg|_{\sigma=s_1} \qquad \text{MWS} : \exists s_1 (0 < s_1 < s) \\
= \; & t \cdot s \cdot \partial_1 \partial_2 f(s_1,t_1)
\end{aligned}$$

- Aber auch (wie oben):

$$\begin{aligned}
& (f(s,t) - f(0,t)) - (f(s,0) - f(0,0)) \\
= \; & (f(s,t) - f(s,0)) - (f(0,t) - f(0,0)) \\
= \; & \big(\sigma \mapsto f(\sigma,t) - f(\sigma,0)\big)(s) - \big(\sigma \mapsto f(\sigma,t) - f(\sigma,0)\big)(0) \\
= \; & (s-0) \cdot \frac{d}{d\sigma}(f(\sigma,t) - f(\sigma,0))\bigg|_{\sigma=s_2} \qquad \text{MWS} : \exists s_2 (0 < s_2 < s) \\
= \; & s \cdot (\partial_1 f(s_2,t) - \partial_1 f(s_2,0)) \\
= \; & s \cdot (t-0) \cdot \frac{d}{d\tau}\partial_1 f(s_2,\tau)\bigg|_{\tau=t_2} \qquad \text{MWS} : \exists t_2 (0 < t_2 < t) \\
= \; & s \cdot t \cdot \partial_2 \partial_1 f(s_2,t_2)
\end{aligned}$$

- Damit:

$$\partial_1 \partial_2 f(s_1,t_1) = \partial_2 \partial_1 f(s_2,t_2)$$

für existierende $s_1$, $s_2 \in (0,s)$ und $t_1$, $t_2 \in (0,t)$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Für $t$, $s \to 0$ existieren also Folgen $x$, $y\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$, mit $x_n, y_n \to a$ und

$$\partial_1\partial_2 f(x_n) \quad = \quad \partial_2\partial_1 f(y_n)$$

(10.2.1). Daraus folgt:

$$\partial_1\partial_2 f(a) = \partial_1\partial_2 f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \partial_1\partial_2 f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \partial_2\partial_1 f(y_n) = \ldots = \partial_2\partial_1 f(a)$$

da Ableitungen stetig in $a$.

Bemerkung: $\partial_j\partial_k f(a) \neq \partial_k\partial_j f(a)$ kann bei weglassen der Stetigkeitsbedingung vorkommen, ist aber „pathologisch“. Hier ein Gegenbeispiel:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

### 24.2 Folgerung: Vertauschen partieller Ableitungen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon U \to \mathbb{R}$ $k$-mal stetig partiell differenzierbar. Seien $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$, $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine Permutation. Dann

$$\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_k} f = \partial_{j_{\pi(1)}} \cdots \partial_{j_{\pi(k)}} f$$

Notation: Ein $n$-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}_{\geqslant 0})^n$ heißt Multiindex,

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \sum_{i=1}^n \alpha_i \qquad \text{Ordnung von } \alpha \\ \partial^\alpha f &:= \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}} \\ &:= \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f \\ &= \underbrace{\partial_1 \cdots \partial_1}_{\alpha_1\text{-mal}} \cdots \underbrace{\partial_n \cdots \partial_n}_{\alpha_n\text{-mal}} f \end{aligned}$$

Beispiele:

1. $n = 2$

$$\partial^{(2,0)} f = \partial_1\partial_1 f \qquad \partial^{(1,1)} f = \partial_1\partial_2 f$$



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

2. Sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $g\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := f(|x|_2)$. Berechne $\Delta g$ (Laplace-Operator). $j \in \{1,\dots,n\}$

$$\begin{aligned}
\Delta g &:= \sum_{j=1}^n \partial_j^2 g \\
\partial_j g(x) &= \partial_j (f \circ |\cdot|_2)(x) \\
&= (t \mapsto f(|(x_1,\dots,x_{j-1},t,x_{j+1},\dots,x_n)|_2))'(x_j) \\
&= f'(|(x_1,\dots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\dots,x_n)|_2) \cdot |(x_1,\dots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\dots,x_n)|_2' \\
&= f'(|x|_2) \cdot \frac{x_j}{|x|_2} \\
\partial_j^2 g(x) &= \partial_j \left( f'(|x|_2) \cdot \frac{x_j}{|x|_2} \right) \\
&= (f')'(|x|_2) \frac{x_j}{|x|_2} \cdot \frac{x_j}{|x|_2} + f'(|x|_2) \cdot \left( \frac{1 \cdot |x|_2 - x_j \cdot \frac{x_j}{|x|_2}}{|x|_2^2} \right) \\
&= f''(|x|_2) \cdot \frac{x_j^2}{|x|_2^2} + f'(|x|_2) \cdot \left( \frac{1}{|x|_2} + x_j \cdot \left( -\frac{1}{|x|_2^2} \right) \cdot \frac{x_j}{|x|_2} \right) \\
\Rightarrow \Delta g(x) &= \sum_{j=1}^n \partial_j^2 g(x) \\
&= f''(|x|_2) \cdot \cancel{\frac{|x|_2^2}{|x|_2^2}} + f'(|x|_2) \cdot \left( \frac{n}{|x|_2} - \cancel{\frac{1}{|x|_2^2}} \cdot \cancel{\frac{|x|_2^2}{|x|_2}} \right) \\
&= f''(|x|_2) + \frac{n-1}{|x|_2} \cdot f'(|x|_2)
\end{aligned}$$

3. Sei $c \in \mathbb{R}$ Zeige, dass $F\colon \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$

$$F(t,x) = \frac{\cos(|x|_2 - ct)}{|x|_2}$$

eine Lösung der Wellengleichung

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_x \right) F = ((t,x) \mapsto 0)$$

ist wobei

$$\Delta_x := \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j}^2 = \sum_{j=2}^4 \partial_j^2$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2} F(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\cos(|x|_2 - ct)}{|x|_2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{-\sin(|x|_2 - ct)}{|x|_2} \cdot (-c) \right) \\
&= \frac{\cos''(|x|_2 - ct)}{|x|_2} \cdot (-c)^2 \\
&= -\frac{c^2}{|x|_2} \cdot \cos(|x|_2 - ct)
\end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Mit $f_t(r) := \frac{\cos(r-ct)}{r}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta_x F(t,x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sum_{j=2}^{4} F(t,x_1,\ldots,x_{j-1},y,x_{j+1},\ldots,x_3)\Big|_{y=x}\right)\Bigg|_{x=x_j} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sum_{j=1}^{3} (f_t\circ|\cdot|_2)(x_1,\ldots,x_{j-1},y,x_{j+1},\ldots,x_3)\Big|_{y=x}\right)\Bigg|_{x=x_j} \\
&= \Delta(f_t\circ|\cdot|_2)(x) \\
&\overset{2)}{=} f''(|x|)+\frac{2}{|x|}\cdot f'(|x|) \\
&= \frac{1}{|x|}\cdot(r\mapsto rf''(r)+2f'(r))(|x|) \\
&= \frac{1}{|x|}\cdot(r\mapsto r\cdot f(r))''(|x|) \\
&= \frac{1}{|x|}\cdot(r\mapsto \cos(r-ct))''(|x|) \\
&= -\frac{1}{|x|}\cdot(r\mapsto \cos(r-ct))(|x|) \\
&= -\frac{1}{|x|}\cdot\cos(|x|-ct)
\end{aligned}$$

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 25

# Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, $a \in U$. $f$ in $a$ (total) differenzierbar

$$\begin{aligned} :\Leftrightarrow \quad & \exists A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ linear}, \varphi\colon U \to \mathbb{R}^m \text{ mit } \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0 \in \mathbb{R}^m \text{ sodass} \\ & f(x) = f(a) + A(x-a) + |x-a|_2 \cdot \varphi(x) \end{aligned}$$

  für alle $x \in U$. $A$ heißt Ableitung von $f$ in $a$. Die Ableitung von $f$ in $a$ ist eine lineare Funktion. Schreibweisen:

$$f'(a) := \partial f(a) := Df(a) := D_a f := A$$

- Bemerkungen:

  1. Für $m = n = 1$ übliche Differenzierbarkeit, vgl. Kapitel 15 (15.3 Weierstraßsche Zerlegungsformel). Fasse $a \in \mathbb{R}$ als lineare Funktion $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto a \cdot x$ auf.
  2. Äquivalent zur Definition ist:

$$\lim_{x\to a} \underbrace{\frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|_2}}_{=\varphi(x)} = 0$$

  3. Für $n = 2$, $m = 1$ beschreibt $g(x) := f(a) + A(x-a)$ eine Ebene, die tangential zu $f$ in $(a, f(a))$ liegt.
  4. $f$ in $a$ differenzierbar $\Rightarrow$ $f$ in $a$ stetig

$$f(\xi) = f(a) + A(\xi - a) + |\xi - a|_2 \cdot \varphi(\xi) \xrightarrow{\xi \to a} f(a)$$

  5. Ableitung eindeutig: Seien $A$, $\varphi$, $\widetilde{A}$, $\widetilde{\varphi}$ wie in Definition. Dann:

$$A(x-a) + |x-a|_2 \cdot \varphi(x) = \widetilde{A}(x-a) + |x-a|_2 \cdot \widetilde{\varphi}(x)$$

     Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$. Für $t$ nahe bei 0 gilt $x = a + t \cdot \xi \in U$. Also:

$$\begin{aligned} t \cdot A(\xi) + t \cdot |\xi|_2 \cdot \varphi(a + t\cdot\xi) &= t \cdot \widetilde{A}(\xi) + t \cdot |\xi|_2 \cdot \widetilde{\varphi}(a + t \cdot \xi) \\ A(\xi) + |\xi|_2 \cdot \varphi(a + t\cdot\xi) &= \widetilde{A}(\xi) + |\xi|_2 \cdot \widetilde{\varphi}(a + t\cdot\xi) \end{aligned}$$

     Für $t \to 0$: $A(\xi) = \widetilde{A}(\xi)$, damit $A = \widetilde{A}$.
  6. Fasse $A$ als $(m \times n)$-Matrix $(a_{jk})_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bzgl. der Standardbasen auf (siehe Vorlesung Lineare Algebra). Sei

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix}$$

Sei $A_j$ die der $j$-ten Zeile $(a_{j1}, \ldots, a_{jn})$ von $A$ zughörige lineare Funktion (bzgl. der Standardbasen). Dann ergibt sich aus der Definition von tolaler Differenzierbarkeit:

$$f_j(x) = f_j(a) + A_j(x_k - a_k) + |x - a|_2 \cdot \varphi_j(x)$$

für $j = 1, \ldots, m$. Daraus folgt: $f$ in $a$ differenzierbar $\Leftrightarrow$ $f_j \colon U \to \mathbb{R}^1$ in $a$ total differenzierbar für $j = 1, \ldots, m$ (10.2.1)

- $f_1' = A_1$, $f_2' = A_2$, $\Rightarrow (\lambda \cdot f_1)' = \lambda \cdot A_1$, $\Rightarrow (f_1 + f_2)' = A_1 + A_2$

### 25.1 Satz: Berechnung der Jacobi-Matrix

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \colon U \to \mathbb{R}^m$ in $a \in U$ differenzierbar. Dann gilt: Alle Komponenten $f_j \colon U \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, m)$ sind im Punkt $a$ partiell differenzierbar und zugehörige Matrix zu $f'(a)$ ist:

$$J_f(a) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \cdots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \cdots & \partial_n f_m(a) \end{pmatrix} = (\partial_k f_j(a))_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,n}}$$

Die Matrix $J_f(a)$ heißt auch Jacobi-Matrix bzw. Funktionalmatrix.

Beweis:

- Sei $(a_{jk})_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,n}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die zu $f'(a)$ zughörige Matrix, $\varphi = (\varphi_1 \ldots \varphi_m)^T$ wie in Definition.
- Für $j = 1, \ldots, m$ gilt:

$$f_j(x) = f_j(a) + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot (x_k - a_k) + |x - a|_2 \cdot \varphi_j(x)$$

- Für $k = 1, \ldots, n$ und $h \in \mathbb{R}$ nahe genug bei 0:

$$f_j(a + h \cdot e_k) = f_j(a) + h \cdot a_{jk} + |h| \cdot \varphi_j(a + h \cdot e_k)$$

  Daher

$$\begin{aligned} a_{jk} &= a_{jk} + 0 \\ &= a_{jk} + \lim_{h \to 0} \varphi_j(a + h \cdot e_k) \\ &= \lim_{h \to 0} (a_{jk} + \varphi_j(a + h \cdot e_k)) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f_j(a + h \cdot e_k) - f_j(a)}{h} \\ &= \partial_k f_j(a) \end{aligned}$$

Beispiel:

1. $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2^2$. Dann:

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2^2 & 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

   Achtung:

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix} = J_f(x_1, x_2)^T$$

   Aber ist $f$ überhaupt differenzierbar? Die Antwort liefert der nächste Satz.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 25.2 Satz: Totale Differenzierbarkeit

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ in $U$ partiell differenzierbar. Alle Ableitungen $\partial_j f$ seien in $a \in U$ stetig. Dann $f$ in $a$ differenzierbar.

Beweis:

- Es existiert $\delta > 0$, sodass $B(a,\delta) \subseteq U$. Sei $\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi|_2 < \delta$. Definiere

$$x^{(j)} = a + \sum_{k=1}^{j} \xi_k \cdot e_k \qquad (j = 0, \dots, n)$$

Dann gilt:

$$x^{(0)} = a, \quad x^{(1)} = a + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = a + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad x^{(n)} = a + \xi$$

Wende den Mittelwertsatz auf $g_j(t) := f(x^{(j-1)} + t \cdot e_j)$, $g\colon [0, \xi_j] \to \mathbb{R}$ für $j = 1, \dots, n$ an: $\exists \eta \in (0, \xi_j)$

$$\begin{aligned} g_j'(\eta) &= \frac{g_j(\xi_j) - g_j(0)}{\xi_j - 0} \\ \Leftrightarrow \xi_j \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left((x^{(j-1)})_1, \dots, (x^{(j-1)})_{j-1}, t, 0, \dots, 0\right)\Big|_{t=\eta} &= f(x^{(j)}) - f(x^{(j-1)}) \\ \Leftrightarrow \partial_j f(x^{(j-1)} + \eta \cdot e_j) \cdot \xi_j &\underset{(*)}{=} f(x^{(j)}) - f(x^{(j-1)}) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(a+\xi) - f(a) &= f(x^{(n)}) - f(x^{(0)}) \quad \text{Teleskopsumme} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left( f(x^{(j)}) - f(x^{(j-1)}) \right) \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x^{(j-1)} + \vartheta_j \cdot \xi_j \cdot e_j) \cdot \xi_j \qquad (\vartheta_j \in (0,1)) \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a) \cdot \xi_j}_{=A(\xi)} - \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot \underbrace{\left( \partial_j f(x^{(j-1)} + \vartheta_j \cdot \xi_j \cdot e_j) - \partial_j f(a) \right)}_{=:\tilde{\varphi}_j(a+\xi)} \\ &= A(\xi) - \langle \xi, \tilde{\varphi}(a+\xi) \rangle \\ &= A(\xi) - |\xi| \cdot \underbrace{\frac{\langle \xi, \varphi(a+\xi) \rangle}{|\xi|}}_{:=\varphi(a+\xi)} \end{aligned}$$

mit $A = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n f(a) \end{pmatrix}$.

- Jetzt muss noch $\lim_{\xi \to 0} \varphi(a+\xi) = 0$ gelten:

$$\begin{aligned} \varphi(a+\xi) &= \frac{\langle \xi, \varphi(a+\xi) \rangle}{|\xi|_2} \\ &\overset{\text{CSU}}{\leqslant} |\varphi(a+\xi)|_2 \\ &= \left( \sum_{j=1}^{n} |\underbrace{\partial_j f(x^{(j-1)} + \vartheta_j \cdot \xi_j \cdot e_j)}_{\to \partial f_j(a)(\xi \to 0),\ \text{Stetigkeit}} - \partial_j f(a)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\to 0, \quad (|\xi| \to 0) \end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Damit $f$ in $a$ differenzierbar.

Bemerkungen:

1. $f\colon U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ stetig $\Rightarrow$ $f$ differenzierbar $\Rightarrow$ $f$ stetig
2. $f$ stetig differenzierbar ($:\Leftrightarrow$ $f$ stetig partiell differenzierbar) $\Rightarrow$ $f$ total differenzierbar $\Rightarrow$ $f$ partiell differenzierbar (Umkehrung i.A. falsch)

### 25.3 Satz: Kettenregel

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, $g\colon V \to \mathbb{R}^k$, $f(U) \subseteq V$. Sei $f$ in $a \in U$ differenzierbar, $g$ in $f(a)$ differenzierbar. Dann $g \circ f\colon U \to \mathbb{R}^k$ in $a$ differenzierbar und

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$$
$$D_a(g \circ f) = D_{f(a)}(g) \cdot D_a(f)$$

Beweis:

- Sei $A := f'(a)$, $B := g'(f(a))$.

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{(1)}{=} f(a) + A(x-a) + |x-a|_2 \cdot \varphi(x) \\ g(y) &\underset{(2)}{=} g(f(a)) + B(y - f(a)) + |y - f(a)|_2 \cdot \psi(y) \end{aligned}$$

  mit $\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$, $\lim_{y \to f(a)} \psi(x) = 0$. Dann:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &\overset{(2)}{=} (g \circ f)(a) + B(f(x) - f(a)) + |f(x) - f(a)|_2 \cdot \psi(f(x)) \\ &\overset{(1)}{=} (g \circ f)(a) + B(A(x-a) + |x-a|_2 \cdot \varphi(x)) + |\dots|_2 \cdot \psi(f(x)) \\ &\overset{B \text{ linear}}{=} (g \circ f)(a) + (B \circ A)(x-a) + \\ &\quad \underbrace{|x-a|_2 \cdot B(\varphi(x)) + |A(x-a) + |x-a|_2 \cdot \varphi(x)|_2 \cdot \psi(f(x))}_{\overset{!}{=} |x-a|_2 \cdot \omega(x)} \end{aligned}$$

- Es gilt:

$$|\omega(x)|_2 \le |B(\varphi(x))|_2 + \left| A\left(\frac{x-a}{|x-a|_2}\right)\right|_2 \cdot |\psi(f(x))|_2 + |\varphi(x)|_2 \cdot |\psi(f(x))|_2$$

  Außerdem (Satz vom Maximum) (12.3, 12.4.2, 12.4.1):

$$\begin{aligned} \left| A\left(\frac{x-a}{|x-a|_2}\right)\right|_2 &\le \sup\{|A(\xi)|_2 \,;\, |\xi|_2 = 1\} \\ &=: \|A\| < \infty \end{aligned}$$

  Somit $|\omega(x)|_2 \xrightarrow{x \to a} 0$ wodurch $g \circ f$ in $a$ differenzierbar und

$$(g \circ f)'(a) = B \circ A = g'(f(a)) \circ f'(a)$$

Bemerkungen:

- vorherige Satz in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \partial_1 (g \circ f)_1(a) & \cdots & \partial_n (g \circ f)_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 (g \circ f)_k(a) & \cdots & \partial_n (g \circ f)_k(a) \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} \partial_1 (g_1)(f(a)) & \cdots & \partial_m (g_1)(f(a)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 (g_k)(f(a)) & \cdots & \partial_m (g_k)(f(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 (f_1)(a) & \cdots & \partial_n (f_1)(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 (f_m)(a) & \cdots & \partial_n (f_m)(a) \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Also

$$\partial_j (g \circ f)_i(a) = \sum_{l=1}^{m} \partial_l g_i(f(a)) \cdot \partial_j f_l(a)$$

- Spezialfall: $n = k = 1$. Also $U \subseteq \mathbb{R}^1$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $g\colon V \to \mathbb{R}^1$ differenzierbar, $f(U) \subseteq V$.

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{d}{dx} g(f_1(x), \ldots, f_n(x))\big|_{x=t}\right) &= \left(\tfrac{d}{dx}(g \circ f)(x)\big|_{x=t}\right) \\
&\overset{15.3}{=} \partial(g \circ f)(t) \\
&= g'(f(t)) \circ f'(t) \\
&= \begin{pmatrix} \partial_1 g(f(t)) & \cdots & \partial_m g(f(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_m'(t) \end{pmatrix} \\
&= \left(\textstyle\sum_{j=1}^m \partial_j g(f(t)) \cdot f_j'(t)\right)
\end{aligned}$$

- Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$, $a \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$, so heißt

$$\partial_v f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t}$$

Richtungsableitung, falls diese existiert. Spezialfall ist partielle Ableitung.

- Ist $f$ in Punkt $a$ differenzierbar, dann existiert $\partial_v f(a)$ für jedes $v$. Es gilt:

$$\partial_v f(a) = \langle v, \operatorname{grad} f(a) \rangle$$

Begründung: Kettenregel

$$\begin{aligned}
g\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n, g(t) &= a + t \cdot v \\
\mathbb{R} \ni \partial_v f(a) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f(g(t)) - f(g(0))}{t - 0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ g)(t)\Big|_{t=0} \\
&\overset{15.3}{=} \underbrace{\underbrace{\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ g)(t)\big|_{t=0}\right)}_{:\, \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1,\ \text{linear}}(1)}_{\in \mathbb{R}^1}(1)_{\in \mathbb{R}} \\
&\mapsto \partial(f \circ g)(0) \\
&= f'(g(0)) \circ g'(0) \\
&= f'(a) \circ g'(0) \\
&= \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n f(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\
&\leftarrow \langle v, \operatorname{grad} f(a) \rangle
\end{aligned}$$

Wobei bei den $\mapsto$ der gleiche Isomorphismus verwendet wurde, damit folgt Gleichheit.

- Ist $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$, so wird $\partial_v f(a)$ maximal für

$$v = \frac{\operatorname{grad} f(a)}{|\operatorname{grad} f(a)|_2}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

(= Richtung des größten Anstieges von $f$ im Punkt $a$)

Beweis: Für alle $v$ gilt:

$$|\langle v, \operatorname{grad} f(a)\rangle|_2 \leq |\operatorname{grad} f(a)|_2$$

Für $v := \frac{\operatorname{grad} f(a)}{|\operatorname{grad} f(a)|_2}$ gilt:

$$\partial_v f(a) = \langle v, \operatorname{grad} f(a)\rangle = |\operatorname{grad} f(a)|_2$$

Die Gleichheit gilt nur für dieses $v$. Angenommen $w \neq v$ mit $|w| = 1$ erfüllt $\langle w, \operatorname{grad} f(a)\rangle = |\operatorname{grad} f(a)|$. Dann ist $\langle w-v, \operatorname{grad} f(a)\rangle = 0$. Somit erfüllt $z := v+\frac{1}{2}(w-v)$ auch die Gleichheit. Allerdings ist

$$\begin{aligned}
|z|_2 &= \frac{1}{2}|v+w|_2 \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\langle v+w, v+w\rangle} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{|v|_2^2 + 2\langle v, w\rangle + |w|_2^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{\langle v, w\rangle} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{|v|_2\cdot|w|_2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}} \\
&< 1
\end{aligned}$$

woraus

$$|\operatorname{grad} f(a)|_2 = |\langle z, \operatorname{grad} f(a)\rangle|_2 \overset{\text{CSU}}{\leqslant} \underbrace{|z|_2}_{<1}\cdot|\operatorname{grad} f(a)|_2 < |\operatorname{grad} f(a)|_2$$

folgt. Dies ist ein Wiederspruch.

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 26

# Normierte Räume, lineare Abbildungen

- Normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$
  - $X$ Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
  - $\|\cdot\|$ Abbildung $X \to [0, \infty)$ mit
    1. $\forall \lambda \in K, \forall x \in X : \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (absolute Homogenität)
    2. $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Subadditivität oder Dreiecksungleichung)
    3. $\forall x \in X : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit)

  Mit der Metrik $d(x, y) := \|x - y\|$ wird $(X, \|\cdot\|)$ zum metrischen Raum.

- Banachraum := vollständiger normierter Raum := Vektorraum, der vollständig und normiert ist

- Beispiele:
  1. $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_2)$, $(\mathbb{C}^n, |\cdot|_2)$ sind Banachräume
  2. $$C[0,1] := \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

     und

     $$\|f\|_{[0,1]} := \sup\{|f(t)| \,;\, 0 \leq t \leq 1\}$$

     Dann $(C[0,1], \|\cdot\|_{[0,1]})$ Banachraum:

     (a) Homogenität:

     $$\begin{aligned} \|\lambda f\| &= \sup\{|\lambda f(t)| \,;\, 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \sup\{|\lambda| \cdot |f(t)| \,;\, 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \sup\left(|\lambda| \cdot \{|f(t)| \,;\, 0 \leq t \leq 1\}\right) \\ &= |\lambda| \cdot \sup\{|f(t)| \,;\, 0 \leq t \leq 1\} \\ &= |\lambda| \cdot \|f\|_{[0,1]} \end{aligned}$$

     (b) Dreiecksungleichung:

     $$\begin{aligned} \|f + g\|_{[0,1]} &= \sup\{|f(t) + g(t)| \,;\, 0 \leq t \leq 1\} \\ \forall t \in [0,1] : |f(t) + g(t)| &\leq |f(t)| + |g(t)| \\ &\leq \|f\|_{[0,1]} + \|g\|_{[0,1]} \quad \text{ist eine obere Schranke.} \\ \Rightarrow \|f + g\|_{[0,1]} &\leq \|f\|_{[0,1]} + \|g\|_{[0,1]} \end{aligned}$$

     (c) Vollständigkeit beweisen wir später (siehe auch Kapitel 20)

### 26.1 Satz: Stetigkeit linearer Abbildungen

Seien $X$, $Y$ normierte Räume, $A\colon X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:

1. $A$ stetig
2. $\|A\|_A := \sup\{\|A(x)\|_Y \,;\, x \in X, \|x\|_X \leq 1\} < \infty$

Sind diese Bedingungen erfüllt, dann gilt für alle $x \in X$:

$$\|A(x)\|_Y \leq \|A\|_A \cdot \|x\|_X$$

$\|A\|_A$ heißt Norm von $A$.

Beweis:

1. $1 \Rightarrow 2$
   - Da $A$ stetig, ist $A$ stetig in 0 und wegen Linearität
     $$A(0) = A(0_X) = A(0_{\mathbb{K}} \cdot 0_X) \overset{\text{Linearität}}{=} 0_{\mathbb{K}} \cdot A(0_X) = 0_Y$$
     Also:
     $$\exists \delta > 0 \, \forall x \in X \text{ mit } \|x - 0\|_X \leq \delta \;\text{ gilt }\; \|A(x)\|_Y \leq 1$$
     Für $x \in X$, $\|x\|_X \leq 1$, ist
     $$\|\delta \cdot x\|_X = |\delta| \cdot \underbrace{\|x\|_X}_{\leqslant 1} \leqslant |\delta| = \delta$$
     also mit der Stetigkeit in 0 gilt
     $$\|A(\delta x)\|_Y \leq 1 \text{ also } \delta \cdot \|A(x)\|_Y \leq 1$$
     Somit obere Schranke gefunden:
     $$\|A\|_A = \sup\{\|A(x)\|_Y \,;\, x \in X, \|x\|_X \leqslant 1\} \leq \frac{1}{\delta} < \infty$$
2. Zusatz, falls 2 gilt:
   - Falls $x \in X$, $x \neq 0$, $\|\cdot\|$ Norm, ist:
     $$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\|x\|} \cdot x \right\| &= \left| \frac{1}{\|x\|} \right| \cdot \|x\| \\ &= \left| \frac{1}{\|x\|} \right| \cdot \|x\| \\ &= \frac{1}{\|x\|} \cdot \|x\| \\ &= 1 \end{aligned}$$
   - Somit:
     $$\|A(x)\|_Y = \left\| A\left( \frac{1}{\|x\|_X} \cdot x \right) \right\|_Y \cdot \|x\|_X \leqslant \|A\|_A \cdot \|x\|_X$$
3. $2 \Rightarrow 1$
   - Mit Zusatz gilt:
     $$\begin{aligned} \|A(x) - A(y)\|_Y &= \|A(x-y)\|_Y \\ &\leq \|A\|_A \cdot \|x - y\|_X \end{aligned}$$
     Also $A$ lipschitz-stetig, damit auch stetig.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Notation: $Ax := A(x)$

Beispiele:

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, d.h. $A$ kann als lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aufgefasst werden. Die Normen seien die euklidischen Normen.

$$\begin{aligned} \|A\| &:= \sup\{|Ax|_2 \,;\, x \in \mathbb{R}^n, |x|_2 \leq 1\} \\ &= \max\{|Ax|_2 \,;\, x \in \mathbb{R}^n, |x|_2 \leq 1\} \end{aligned}$$

   Das Maximum wird angenommen, da $\{x \in \mathbb{R} \,;\, |x|_2 < 1\}$ kompakt und $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig ist. Nimmt man auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ andere Normen, so ändert sich diese Matrixnorm.

2. Für einen Zeilenvektor $z \in \mathbb{R}^{1\times n} \cong \mathbb{R}^n$ dann gilt:

$$\|z\|_A = \left|z^T\right|_2 = \left(\sum_{j=1}^n z_{1j}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

   Begründung: Für $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|_2 \leq 1$ gilt mit Schwarzscher Ungleichung:

$$|zx| = |z(x)| = \left|(z_1 \cdots z_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right| = \left|\left\langle z^T, x\right\rangle\right| \leq \left|z^T\right|_2 \cdot |x|_2 \leqslant \left|z^T\right|_2$$

   Damit $\|z\|_A \leq |z^T|$. Für $\tilde{x} := \frac{1}{|z^T|} \cdot z^T$ gilt:

$$z \cdot \tilde{x} = z \cdot \frac{1}{|z^T|} \cdot z^T = \frac{1}{|z^T|_2}\left\langle z^T, z^T\right\rangle \overset{23.1.1}{=} |z^T|$$

3. Sei $k\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere den Integraloperator $K\colon C[0,1] \to C[0,1]$ durch

$$(Kf) := x \mapsto \int_0^1 k(x,y) \cdot f(y)\, dy \qquad (x \in [0,1])$$

   ($Kf$ stetig! ohne Beweis.) Dann $K$ linear ($K(\alpha f + g) = \alpha \cdot Kf + Kg$) und $K$ stetig, denn:

$$\begin{aligned} |Kf(x)| &\leq \int_0^1 |k(x,y)| \cdot |f(y)| dy \\ &\leq \underbrace{\sup_{x,y\in[0,1]} |k(x,y)|}_{=:C} \cdot \|f\|_{[0,1]} \\ \Rightarrow \|Kf\|_{[0,1]} &\leq C \cdot \|f\|_{[0,1]} \\ \Rightarrow \|K\| &= \{\|Kf\|_{[0,1]} \mid f \in C[0,1], \|f\|_{[0,1]} \leqslant 1\} \\ &\leq C \end{aligned}$$

   Dann Satz 26.1

## 26.2 Satz: Mittelwertsatz/Schrankensatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $x$, $y \in U$, sodass die Verbindungsstrecke zwischen $x$ und $y$ in $U$:

$$\underbrace{\{(1-t)\cdot x + t \cdot y \mid 0 \leq t \leq 1\}}_{\text{Verbindungsgerade zwischen } x \text{ und } y} \subseteq U$$

Dann gibt es $t_0 \in (0,1)$, sodass

$$|f(y) - f(x)|_2 \leq \|f'((1-t_0)\cdot x + t_0 \cdot y)\|_A \cdot |y - x|_2$$

Beweis:



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

1. Fall $n = 1$. Fasse $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^m$ als Kurve $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ auf

   - $$\partial f(a) \quad „=“ \quad \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) \\ \vdots \\ \partial_1 f_n(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_n'(a) \end{pmatrix} = \tilde{f}'(a)$$

   - Dann Satz 23.2 (Hilfssatz: „Mittelwertsatz“)

2. allgemeiner Fall:

$$\begin{aligned}
g &: [0,1] \to \mathbb{R}^m \\
g(t) &:= f((1-t)\cdot x + t \cdot y) \\
&= f(x + t\cdot(y-x)) \\
(x + t\cdot(y-x))' &= (x + t\cdot y - t\cdot x)' \\
&= (x + t\cdot y)' + (0 - t\cdot x)' \\
&\overset{23.0.10}{=} y - x \\
g'(t) &\overset{25.3}{=} f'(x + t\cdot(y-x))\cdot(x + t\cdot(y-x))' \\
&= f'(x + t\cdot(y-x))\cdot(y-x) \\
|f(y) - f(x)|_2 &= |g(1) - g(0)|_2 \\
&\overset{1.}{\leqslant} (1-0)\cdot|g'(\xi)| \\
&= |\underbrace{f'(x + \xi\cdot(y-x))}_{:\,\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m}\underbrace{(y-x)}_{\in\mathbb{R}^n}|_2 \\
&\overset{26.1.3}{\leqslant} \|f'(x + \xi\cdot(y-x))\|_A \cdot |y-x|_2
\end{aligned}$$

Weitere Normen auf $\mathbb{K}^n$:

- Für $1 \le p < \infty$ sei die $p$-Norm $|\cdot|_p\colon \mathbb{K}^n \to [0,\infty)$ definiert durch

  $$|x|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

  Außerdem

  $$|x|_\infty := \max_{j=1,\dots,n} |x_j|$$

  Gezeigt werden soll: $|\cdot|_p$ ist Norm. Absolute Homogenität und Definitheit sind leicht zu zeigen:

$$\begin{aligned}
|\lambda\cdot x|_p &= \left(\sum_{j=1}^n |\lambda\cdot x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^n |\lambda|^p\cdot|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(|\lambda|^p\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda|^{\frac{p}{p}}\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda|\cdot|x|_p
\end{aligned}$$



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

$$
\begin{aligned}
|x|_p = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|x_j|}_{>0} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} : |x_j| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} : x_j = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0
\end{aligned}
$$

- Für $p = 2$ leitet sich die Norm vom Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$ her durch $|x|_2 = \langle x, x \rangle^{1/2}$
- Für $j = 1, \ldots, n$

$$
\begin{aligned}
1 &= |x|_p \\
\Rightarrow 1 &= \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
\Rightarrow 1^p &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \\
\Rightarrow 1 &\geqslant |x_j|^p \\
\Rightarrow 1 &\geqslant |x_j|
\end{aligned}
$$

- Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \colon D \to \mathbb{R}$ heißt
  - konvex $:\Leftrightarrow \forall x_1,\, x_2 \in D,\, \lambda \in (0, 1)$:

$$
f((1 - \lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2) \leqslant (1 - \lambda) \cdot f(x_1) + \lambda \cdot f(x_2)
$$

  - konkav $:\Leftrightarrow -f$ konvex, ($\leqslant$ dreht sich rum)

### 26.3 Satz: Konvexe Funktion

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \colon D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, $f^{(2)}(x) \geq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist $f$ konvex. (Umkehrung gilt auch, s. Hausaufgabe)

Beweis:

- Aus $(f')'(x) \geq 0$, $x \in D$ folgt $f' \colon D \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Seien $x_1,\, x_2 \in D$, $\lambda \in (0, 1)$ und

$$
x := (1 - \lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2
$$

- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $x_1 < x_2$. Daher $x_1 < x < x_2$. Mit Mittelwertsatz: Es existieren $\xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_2)$ mit:

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} &= f'(\xi_1) \\
\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} &= f'(\xi_2)
\end{aligned}
$$

- Stelle fest:

$$
x - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x_1) \qquad x_2 - x = (1 - \lambda) \cdot (x_2 - x_1)
$$

  Wegen Monotonie:

$$
f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)
$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

und zwei mal Einsetzen gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(x_1)}{\lambda\cdot(x_2-x_1)} &\leq \frac{f(x_2)-f(x)}{(1-\lambda)\cdot(x_2-x_1)} \\
(1-\lambda)\cdot(f(x)-f(x_1)) &\leq \lambda\cdot(f(x_2)-f(x)) \\
f(x) &\leq \lambda\cdot f(x_2)-\cancel{\lambda\cdot f(x)}+f(x_1)+\cancel{\lambda\cdot f(x)}-\lambda\cdot f(x_1) \\
f(x) &\leq (1-\lambda)\cdot f(x_1)+\lambda\cdot f(x_2)
\end{aligned}$$

### 26.4 Folgerung

Seien $p$, $q \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Dann gilt für alle $x$, $y \geq 0$:

$$x^{\frac{1}{p}}\cdot y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p}+\frac{y}{q}$$

Beweis:

- Fall $x=0$ oder $y=0$ ist einfach
- Betrachte $x$, $y>0$.

  $$\frac{1}{p}\in(0,1) \qquad \frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}\in(0,1)$$

  $\ln\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}$ ist konkav, denn $\ln''(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}<0$. Damit:

  $$\begin{aligned}
  \ln\left(\frac{1}{p}\cdot x+\frac{1}{q}\cdot y\right) &\geqslant \frac{1}{p}\cdot\ln x+\frac{1}{q}\cdot\ln y \\
  &\overset{13.2.2}{=} \ln(x^{\frac{1}{p}}\cdot y^{\frac{1}{q}})
  \end{aligned}$$

  Da exp monoton wachsend ist, bleibt nach Anwendung von exp auf die Gleichung die Richtung von $\geqslant$ erhalten

### 26.5 Satz: Höldersche Ungleichung

Seien $p$, $q \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Für alle $x=(x_1,\ldots,x_n)$ und $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{C}^n$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}|x_j\cdot y_j| &\leq \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}|y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= |x|_p\cdot|y|_q
\end{aligned}$$

Beweis:

- Ohne Einschränkung $|x|_p\neq 0$, $|y|_p\neq 0$. Sei

  $$\xi := \frac{1}{|x|_p}\cdot x \qquad \eta := \frac{1}{|y|_q}\cdot y$$

  Dann $|\xi|_p=1$ und $|\eta|_q=1$.
- Mit Folgerung 26.4:

  $$\begin{aligned}
  \frac{|x_j\cdot y_j|}{|x|_p\cdot|y|_q} &= \left|\frac{1}{|x|_p}\cdot x_j\right|\cdot\left|\frac{1}{|y|_q}\cdot y_j\right| \\
  &= |\xi_j|\cdot|\eta_j| \\
  &= (|\xi_j|^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(|\eta_j|^q)^{\frac{1}{q}} \\
  &\leq \frac{|\xi_j|^p}{p}+\frac{|\eta_j|^q}{q}
  \end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Damit:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|x|_p \cdot |y|_q} \sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j| &\leqslant \frac{1}{p} \cdot \underbrace{\left( \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p \right)}_{=1} + \frac{1}{q} \cdot \underbrace{\left( \sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^q \right)}_{=1} \\
&= 1 \\
\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j| &\leq |x|_p \cdot |y|_q
\end{aligned}$$

Bemerkung:

- Für $p = q = 2$: Schwarzsche Ungleichung

### 26.6 Satz: Minkowskische Ungleichung

Sei $p \in [1, \infty)$. Für alle $x$, $y \in \mathbb{C}^n$ gilt:

$$|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p$$

(Dreiecksungleichung für $|\cdot|_p$)

Beweis:

- Einfach für $p = 1$.

$$\begin{aligned}
|x + y|_1 &= \sum_{j=1}^{n} |(x + y)_j| \\
&= \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} (|x_j| + |y_j|) \\
&= \sum_{j=1}^{n} |x_j| + \sum_{j=1}^{n} |y_j| \\
&= |x|_1 + |y|_1
\end{aligned}$$

- Sei $p > 1$, wähle $q$, sodass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Definiere $z \in \mathbb{C}^n$ durch $(j = 1, \ldots, n)$

$$z_j := |x_j + y_j|^{p-1} = \left| |x_j + y_j|^{p-1} \right| = |z_j|$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Dann:

$$\begin{aligned}
|x+y|_p^p &= \sum_{j=1}^n |x_j+y_j|^p \\
&= \sum_{j=1}^n |x_j+y_j| \cdot |x_j+y_j|^{p-1} \\
&= \sum_{j=1}^n |x_j+y_j| \cdot |z_j| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^n \left(|x_j| \cdot |z_j| + |y_j| \cdot |z_j|\right) \\
&= \sum_{j=1}^n |x_j \cdot z_j| + \sum_{j=1}^n |y_j \cdot z_j| \\
&\overset{26.5}{\leqslant} |x|_p \cdot |z|_q + |y|_p \cdot |z|_q \\
&= \left(|x|_p + |y|_p\right) \cdot |z|_q
\end{aligned}$$

Aus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ folgt nach Umstellen $p = (p-1) \cdot q$ sowie $\frac{1}{q} = \frac{1}{p}(p-1)$. Somit:

$$\begin{aligned}
|z|_q &= \left(\sum_{j=1}^n \left(|x_j+y_j|^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^n |x_j+y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}(p-1)} \\
&= |x+y|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

Setze zusammen woraus dann die Behauptung folgt:

$$|x+y|_p^p \leqslant \left(|x|_p + |y|_p\right) |x+y|_p^{p-1}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 27
# Taylorformel, lokale Extrema

- Für Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$:
$$\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

## 27.1 Multinomialtheorem

- Polynomische Formel (Multinomialtheorem): Für $x \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\frac{1}{m!}(x_1 + \ldots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \cdot x^\alpha$$
wobei $x^\alpha := 1 \cdot x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$

  Begründung:

  - Es gilt:
$$\frac{1}{m!} \cdot (x_1 + \ldots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \cdot x^\alpha$$
mit geeigneten $c_\alpha$
  - Für $|\beta| = m$:
$$\begin{aligned} \partial^\beta \left( \frac{1}{m!} \cdot (x_1 + \ldots + x_n)^m \right) &= \frac{1}{m!} \cdot \partial^\beta \left( (x_1 + \ldots + x_n)^m \right) \\ &= \frac{1}{m!} \cdot \left( m! \cdot (x_1 + \ldots + x_n)^0 \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{m\text{-mal}} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$
sowie
$$\begin{aligned} \partial^\beta \left( \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \cdot x^\alpha \right) &= \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \cdot \left( \partial^\beta x^\alpha \right) \\ &= \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \cdot \begin{cases} \beta! & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} \\ &= c_\beta \cdot \beta! \end{aligned}$$

## 27.2 Hilfssatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \colon U \to \mathbb{R}$, $f$ ist $m$-mal stetig differenzierbar (d.h. $m$-mal stetig partiell differenzierbar), $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit
$$\{x + t \cdot \xi \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq U$$

Sei $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$h(t) := f \circ g, \quad g(t) := x + t \cdot \xi$$

Dann:

$$\frac{1}{m!} h^{(m)}(t) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + t \cdot \xi) \xi^\alpha$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)' &= t \mapsto \sum_{j=1}^n \partial_j f(x + t \cdot \xi) \xi_j \\
&\overset{11.1.1.2.1}{=} t \mapsto \sum_{j=1}^n (\xi_j \cdot \partial_j) f(x + t \cdot \xi) \\
&\overset{11.1.1.2.1}{=} t \mapsto ((\xi_1 \partial_1 + \ldots + \xi_n \partial_n) f)(x + t \cdot \xi) \\
&= ((\xi_1 \partial_1 + \ldots + \xi_n \partial_n) f) \circ g \\
h''(t) &= ((f \circ g)')' \\
&= ((\underbrace{(\xi_1 \partial_1 + \ldots + \xi_n \partial_n) f}_{: U \to \mathbb{R}}) \circ g)' \\
&= ((\xi_1 \partial_1 + \ldots + \xi_n \partial_n)((\xi_1 \partial_1 + \ldots + \xi_n \partial_n) f)) \circ g \\
&= (((\xi_1 \partial_1 + \ldots + \xi_n \partial_n) \circ (\xi_1 \partial_1 + \ldots + \xi_n \partial_n)) f) \circ g \\
&= ((\xi_1 \partial_1 + \ldots + \xi_n \partial_n)^2 f) \circ g \\
h^{(m)} &\overset{\text{Induktion}}{=} ((\xi_1 \partial_1 + \ldots + \xi_n \partial_n)^m f) \circ g \\
&\overset{\textit{Beweislücke}}{=} \left( \left( m! \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \xi^\alpha \partial^\alpha \right) f \right) \circ g \\
&= t \mapsto m! \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \xi^\alpha \partial^\alpha f(x + t \cdot \xi)
\end{aligned}$$

### 27.3 Satz: Taylorsche Formel

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + t \cdot \xi \in U$ für $0 \leq t \leq 1$. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \cdot \xi^\alpha + R_{k+1}(x + \xi)$$

mit

$$R_{k+1}(x + \xi) := (k+1) \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^k \partial^\alpha f(x + t \cdot \xi)\, dt \cdot \xi^\alpha$$

Beweis:

- Für $g(t) := f(x + t \cdot \xi)$ gilt mit 1-dimensionaler Taylor-Formel:

$$\begin{aligned}
g(1) &= \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \cdot g^{(j)}(0) \cdot (1-0)^j + \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k \cdot g^{(k+1)}(t)\, dt \\
&\overset{27.1}{=} \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha} \partial^\alpha f(x) \xi^\alpha + R_{k+1}(x + \xi) \\
R_{k+1}(x + \xi) &= (k+1) \int_0^1 (1-t)^k \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(t)\, dt
\end{aligned}$$

  mit

$$\frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(t) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + t \cdot \xi) \xi^\alpha$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Bemerkungen:

- Ist $U = B(0,1)$, $\partial^\alpha f = 0$ für alle $|\alpha| = k+1$, dann ist $f$ Polynom vom Grad $\leq n$.
- Es gilt:
$$P_j(\xi) := \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x) \cdot \xi^\alpha$$
ist homogenes Polynom vom $j$-ten Grad, d.h.
$$P_j(t \cdot \xi) = t^j \cdot P_j(\xi)$$
da
$$\begin{aligned} (t \cdot \xi)^\alpha &= (t \cdot \xi_1, \ldots, t \cdot \xi_n)^\alpha \\ &= t^{\alpha_1} \cdot \xi_1^{\alpha_1} \cdots t^{\alpha_n} \cdot \xi_n^{\alpha_n} \\ &= t^{|\alpha|} \cdot \xi^\alpha \end{aligned}$$
- Es folgt für $|\alpha| = k$
$$\begin{aligned} |\xi^\alpha| &= |\xi|_p^k \cdot \left| \left( \frac{\xi}{|\xi|_p} \right)^\alpha \right| \\ &\overset{26.2.5}{=} |\xi|_p^k \cdot \underbrace{\left| \frac{\xi_1}{|\xi|_p} \right|^{\alpha_1}}_{<1} \cdots \underbrace{\left| \frac{\xi_n}{|\xi|_p} \right|^{\alpha_n}}_{<1} \\ &\leqslant |\xi|_p^k \end{aligned}$$
- Damit Taylorformel:
$$f(x+\xi) = \sum_{j=1}^{k} P_j(\xi) + R_{k+1}(x+\xi)$$
Außerdem gilt:
$$\begin{aligned} P_0(\xi) &= f(x) \\ P_1(\xi) &= \partial_1 f(x) \cdot \xi_1 + \ldots + \partial_n f(x) \cdot \xi_n \\ &= \langle \operatorname{grad} f(x), \xi \rangle \\ P_2(\xi) &= \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \cdot \xi^\alpha \\ &= \sum_{i<j} \partial_j \partial_k f(x) \cdot \xi_j \cdot \xi_k + \frac{1}{2} \sum_{i=j} \partial_j \partial_k f(x) \cdot \xi_j \cdot \xi_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{n} \partial_j \partial_k f(x) \cdot \xi_k \right) \xi_j \\ &= \frac{1}{2} \langle A \cdot \xi, \xi \rangle \quad \text{mit} \quad A := (\partial_j \partial_k f(x))_{j,k=1,\ldots,n} =: \operatorname{Hess} f(x) \end{aligned}$$
($\operatorname{Hess} f(x)$: Hessesche Matrix)

### 27.4 Folgerung: Restglied Taylorformel

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ $k$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt für die Funktion $\varphi$ definiert für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ wobei $x + \xi \in U$ und definiert durch die Gleichung:
$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \cdot \xi^\alpha + |\xi|^k \cdot \varphi(\xi)$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

dass gilt:

$$\lim_{\xi \to 0} \varphi(\xi) = 0$$

Für $k = 2$ ergibt sich:

$$f(x+\xi) = f(x) + \langle \operatorname{grad} f(x), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \operatorname{Hess} f(x) \cdot \xi, \xi \rangle + |\xi|^2 \cdot \varphi(\xi)$$

Beweis:

- Nach Taylorformel:

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \cdot \xi^\alpha + R_k(x+\xi)$$

  mit

$$\begin{aligned} R_k(x+\xi) &= k \cdot \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} \partial^\alpha f(x+t\cdot\xi)\,\mathrm{d}t\,\xi^\alpha \\ &- k \cdot \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \cdot \xi^\alpha \underbrace{\int_0^1 (1-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{k}} \\ &+ \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \cdot \xi^\alpha \\ &= \underbrace{k \cdot \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} [\, \partial^\alpha f(x+t\cdot\xi) - \partial^\alpha f(x) \,]\, dt \cdot \xi^\alpha}_{\stackrel{!}{=} |\xi|^k \cdot \varphi(\xi)} \\ &+ \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \cdot \xi^\alpha \end{aligned}$$

  ergibt sich eine konkretere Darstellung von $\varphi$, falls die Verbindungsstrecke zwischen $x$ und $x+\xi$ in $U$ liegt.

- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$ mit $B(x,\delta) \subseteq U$ und

$$|\partial^\alpha f(y) - \partial^\alpha f(x)| \leq \varepsilon$$

  für alle $y \in B(x,\delta)$ und $|\alpha| = k$.

- Sei $|\xi| \leq \delta$, $|\alpha| = k$. Dann:

$$\begin{aligned} C := \left| \int_0^1 (1-t)^{k-1} [\, \partial^\alpha f(x+t\cdot\xi) - \partial^\alpha f(x) \,]\,\mathrm{d}t \cdot \xi^\alpha \right| &\leqslant \varepsilon \cdot \int_0^1 |1-t|^{k-1}\,dt \cdot |\xi^\alpha| \\ &\leqslant \varepsilon \cdot \frac{1}{k} \cdot |\xi|^k \end{aligned}$$

  Damit:

$$\begin{aligned} |\varphi(\xi)| &= \frac{1}{|\xi|^k} \cdot k \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha} \cdot C \\ &\leq \varepsilon \cdot \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \\ &= \varepsilon \cdot \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} (1,\ldots,1)^\alpha \\ &= \varepsilon \cdot \frac{1}{k!} \cdot (\underbrace{1+\ldots+1}_{n\text{-mal}})^k \\ &= \varepsilon \cdot \frac{1}{k!} \cdot n^k \end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Damit Grenzwertverhalten gezeigt.

### 27.5 Satz: Notwendiges Kriterium für Extremum

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ besitze in $x \in U$ ein lokales Maximum.

1. Ist $f$ in $x$ partiell differenzierbar, dann $\operatorname{grad} f(x) = 0$.
2. Ist $f$ zweimal stetig differenzierbar, so ist $\operatorname{Hess} f(x)$ negativ semidefinit, d.h.

$$\langle \operatorname{Hess} f(x) \cdot \xi, \xi \rangle \leq 0$$

   für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Beweis:

1. $t \mapsto f(x + t \cdot e_j)$ hat bei $t = 0$ ein lokales Maximum, daher für $j = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \partial_j f(x) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x - t \cdot e_j) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x - t \cdot e_j) - f(x - 0 \cdot e_j)}{t - 0} \\ &= (t \mapsto f(x + t \cdot e_j))'(0) \\ &\overset{16.1}{=} 0 \end{aligned}$$

   Also $\operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$

2. Nach 1. und Folgerung 27.3: Für $\xi \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ nahe bei 0 gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant f(x + t \cdot \xi) - f(x) \\ &= f(x) + 0 + \frac{t^2}{2} \cdot \langle \operatorname{Hess} f(x) \cdot \xi, \xi \rangle + t^2 \cdot |\xi|^2 \cdot \varphi(t \cdot \xi) - f(x) \\ \Rightarrow 0 &\geqslant \frac{1}{2} \langle \operatorname{Hess} f(x) \cdot \xi, \xi \rangle + |\xi|^2 \cdot \varphi(t \cdot \xi) \end{aligned}$$

   Für $t \to 0$ mit Stetigkeit von $\varphi$ folgt Behauptung.

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. $A$ heißt

- … positiv definit $:\Leftrightarrow \langle A \cdot \xi, \xi \rangle > 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- … positiv semidefinit $:\Leftrightarrow \langle A \cdot \xi, \xi \rangle \geq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$
- … negativ definit $:\Leftrightarrow -A$ positiv definit
- … negativ semidefinit $:\Leftrightarrow -A$ positiv semidefinit
- … semidefinit $:\Leftrightarrow A$ positiv semidefinit oder negativ semidefinit
- … indefinit $:\Leftrightarrow A$ weder positiv noch negativ semidefinit

Bemerkung:

- $A$ positiv definit

$$\Leftrightarrow \forall k = 1, \ldots, n : \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

  (Hurwitz-Kriterium, Silvester-Kriterium)



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Beispiele:

1. Für $f(x,y) = x^2 + y^2$ (Paraboloid):

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \operatorname{grad} f(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \operatorname{Hess} f(0,0) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Hess $f(0,0)$ ist positiv definit. Also hat $f$ in $(0,0)$ ein lokales Minimum. (s. Satz 27.6)

   Ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ positiv definit, dann ist

$$g(x,y) := \left\langle A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

   ein elliptisches Paraboloid.

2. Für $f(x,y) = x^2 - y^2$ (Hyperbolisches Paraboloid):

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x,y) &= \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \operatorname{grad} f(0,0) &= 0 \\ \operatorname{Hess} f(0,0) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Hess $f(0,0)$ ist indefinit.

### 27.6 Satz: Hinreichende Kriterien für Extrema

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $x \in U$ mit $\operatorname{grad} f(x) = 0$. Dann:

1. Ist Hess $f(x)$ positiv definit, dann hat $f$ in $x$ ein striktes lokales Minimum.
2. Ist Hess $f(x)$ negativ definit, dann hat $f$ in $x$ ein striktes lokales Maximum.
3. Ist Hess $f(x)$ indefinit, dann hat $f$ kein lokales Extremum in $x$.

Beweis:

1. Sei $A := \operatorname{Hess} f(x)$. Dann gibt es $\alpha > 0$, sodass

$$\langle A \cdot \xi, \xi \rangle \geq \alpha \cdot |\xi|^2$$

   für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, denn für $\alpha := \min\{\langle A \cdot \xi, \xi \rangle, |\xi| = 1\} > 0$ gilt (oBdA $\xi \neq 0$):

$$\begin{aligned} \min\{\langle Ax, x\rangle; |x| = 1\} \cdot |\xi|^2 &= \min\{\langle A(|\xi|x), (|\xi|x)\rangle; |x| = 1\} \\ &= \min\{\langle Ay, y\rangle; y = |\xi|x, |x| = 1\} \\ &= \min\left\{\langle Ay, y\rangle; \frac{y}{|\xi|} = x, |x| = 1\right\} \\ &= \min\left\{\langle Ay, y\rangle; \left|\frac{y}{|\xi|}\right| = 1\right\} \\ &= \min\left\{\langle Ay, y\rangle; |y| = |\xi|\right\} \\ &\leqslant \langle A\xi, \xi\rangle \end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Nach Folgerung 27.3:

$$\begin{aligned} f(x+\xi) &\overset{27.4}{=} f(x) + \langle 0, \xi\rangle + \frac{1}{2}\langle A\cdot\xi,\xi\rangle + |\xi|^2\cdot\varphi(\xi) \\ &\geqslant f(x) + \left(\frac{1}{2}\alpha + \varphi(\xi)\right)\cdot|\xi|^2 \end{aligned}$$

Es gibt $\delta > 0$, sodass $\xi \in B(x,\delta) \subseteq U$,

$$-\varphi(\xi) \leqslant |\varphi(\xi)| \leqslant \frac{1}{4}\alpha$$

(Grenzwertverhalten von $\varphi$) Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \frac{1}{4}\alpha + \varphi(\xi) \\ \Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{4}\alpha &\leqslant \left(\frac{1}{2}\alpha + \varphi(\xi)\right) \end{aligned}$$

Damit für $\xi \neq 0$:

$$f(x+\xi) \geq f(x) + \frac{1}{4}\alpha\cdot|\xi|^2 > f(x)$$

2.

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess} f(x) \text{ negativ definit} &\Leftrightarrow -\operatorname{Hess} f(x) \text{ positiv Definit} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Hess}(-f)(x) \text{ positiv definit} \\ &\Rightarrow -f \text{ hat in } x \text{ striktes lokales Minnimum} \\ &\Leftrightarrow f \text{ hat in } x \text{ striktes lokales Maximum} \end{aligned}$$

3. Hat $f$ in $x$ ein lokales Extremum, dann $\operatorname{Hess} f(x)$ semidefinit wegen Satz 27.5

Beispiel:

1. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 - x^2 + (x+y)^2$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2x + 2(x+y) \\ 2(x+y) \end{pmatrix}$$

Es soll nun gelten $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$. Offensichtlich dann $x = -y$. Damit:

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^3 - 2x + 0 \\ &= 2x\cdot(2x^2-1) \\ \Rightarrow x_1 &= 0 \qquad x_{2/3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{mit } y_i = -x_i,\ i \in \{1,2,3\} \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 f(x,y) &= 12x^2 - 2 + 2 = 12x^2 \\ \partial_x\partial_y f(x,y) &= 2 \\ \partial_y^2 f(x,y) &= 2 \end{aligned}$$

(a) Für $x_1, y_1$ gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess} f(x_1,y_1) &= \operatorname{Hess} f(0,0) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x\partial_x f(0,0) & \partial_x\partial_y f(0,0) \\ \partial_y\partial_x f(0,0) & \partial_y\partial_y f(0,0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12\cdot 0^2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Hess $f(x_1, y_1)$ ist indefinit (es liegt also kein Extremum vor), da:

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= 2 > 0 \\
\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle &= -2 < 0
\end{aligned}$$

(b) Für $x_{2/3}, y_{2/3}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hess} f(x_{2/3}, y_{2/3}) &= \operatorname{Hess} f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Hess $f(x_{2/3}, y_{2/3})$ ist positiv definit, z.B. nach Hurwitz-Kriterium. Also liegen an $(x_2, y_2)$ und $(x_3, y_3)$ lokale Minima vor.

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 28

# Implizite Funktionen, 1. Auflösungssatz

- Motivation:
  - Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $F\colon U \to \mathbb{R}$.
  - Betrachte $\{(x,y) \in U : F(x,y) = 0\}$.
  - Frage: Ist $\{(x,y) \in U : F(x,y) = 0\}$ Graph einer Funktion?
  - Gibt es also eine Funktion $g\colon I \to \mathbb{R}$ mit $F(x, g(x)) = 0$. Was sind Bedingungen dafür? Die Funktion $g$ ist dann implizit durch die Bedingung $F(x, g(x)) = 0$ definiert.
  - Bei der Behandlung der Fragestellung wird man von einem Punkt $(a,b)$ mit $F(a,b) = 0$ ausgehen und versuchen, Lösungen in einer Umgebung von $(a,b)$ zu beschreiben.
- Beispiel:
  - Es sei
    $$F\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x_1, x_2, y) := x_1^2 + x_2^2 + y^2 - 1$$
    $F^{-1}(0)$ bildet die Einheitssphäre.
  - Seien $a = (0,0)$, $b = 1$
    $$g\colon \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$
    Damit gilt $F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) = 0$. Die Funktion $g$ beschreibt so die obere Hälfte der Einheitssphäre.

Als Vorbereitung für später wird folgender Satz benötigt:

### 28.1 Satz: Banach'scher Fixpunktsatz

Sei $(X,d)$ ein vollständiger metrischer Raum, $X \neq \emptyset$. Sei $\varphi\colon X \to X$. Es gebe $k \in [0,1)$, sodass

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq k \cdot d(x,y)$$

für alle $x, y \in X$. Dann besitzt $\varphi$ genau einen Fixpunkt $x_0 \in X$, d.h.

$$\varphi(x_0) = x_0$$

Beweis:

- Eindeutigkeit: Es seien $x_0$, $x_1 \in X$ Fixpunkte. ($\varphi(x_0) = x_0$, $\varphi(x_1) = x_1$) dann gilt:
$$\begin{aligned} d(x_0, x_1) &= d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \leq k \cdot d(x_0, x_1) \\ \Rightarrow 0 &\leqslant \underbrace{(k-1)}_{<0} \cdot d(x_0, x_1) \\ \Rightarrow 0 &\geqslant d(x_0, x_1) \\ \Rightarrow 0 &= d(x_0, x_1) \\ \Rightarrow x_0 &= x_1 \end{aligned}$$

- Existenz: Sei $x \in X$. Behauptung: $(\varphi^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge. Es gilt:

$$d(\varphi^j(x), \varphi^{j-1}(x)) \leq k^{j-1} \cdot d(x, \varphi(x))$$

für $j \in \mathbb{N}$ (Induktion).

Für $0 \leq n \leq m$ folgt mit Dreiecksungleichung ($\Delta$):

$$\begin{aligned} d(\varphi^n(x), \varphi^m(x)) &\overset{\Delta}{\leqslant} \sum_{j=n+1}^{m} d(\varphi^{j-1}(x), \varphi^j(x)) \\ &\leq \underbrace{d(x, \varphi(x))}_{\in\mathbb{R}} \cdot \sum_{j=n+1}^{m} k^{j-1} \\ &\overset{6.1}{\to} 0\,(n, m \to \infty) \end{aligned}$$

Also $(\varphi^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. Da $X$ vollständig ist, existiert $x_0 := \lim_{n\to\infty} \varphi^n(x)$.

$\varphi$ ist stetig, denn für $a \in X$, $\varepsilon > 0$, $\delta := \frac{\varepsilon}{k}$, $x \in X$ und $d(x, a) < \delta$ gilt: (11.1.2)

$$d(\varphi(x), \varphi(a)) \leqslant k \cdot d(x, a) < k \cdot \delta = \varepsilon$$

Damit ist $x_0$ Fixpunkt:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= \varphi\left(\lim_{n\to\infty} \varphi^n(x)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\varphi^n(x)\right) \\ &= x_0 \end{aligned}$$

### 28.2 Satz über implizite Funktionen, 1. Auflösungssatz

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F\colon X \times U \to \mathbb{R}^n$ stetig bzgl. der Metrik $\widetilde{d}$ auf $X \times U$ wobei

$$\widetilde{d}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d(x_1, x_2) + |y_1 - y_2|_2$$

und differenzierbar nach $y$-Variablen, d.h. für jedes $x \in X$ sei $F(x, \cdot)\colon U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Sei $a \in X$, $b \in U$ mit $F(a, b) = 0$. Es sei $D_bF(a, \cdot)$ invertierbar ($\cong n \times n$-Matrix) und

$$(x, y) \mapsto D_yF(x, \cdot)\colon X \times U \to (\mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{linear}} \mathbb{R}^n)$$

stetig im Punkt $(a, b)$. (Metrik: $(f, g) \mapsto \|f - g\|_A$) Dann gibt es offene Umgebungen $\hat{\hat{X}} \subseteq X$ von $a$ und $\hat{\hat{U}} \subseteq U$ von $b$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Existenz: Es gibt $g\colon \hat{\hat{X}} \to \hat{\hat{U}}$ stetig mit $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in \hat{\hat{X}}$.
2. Eindeutigkeit: Aus $(x, y) \in \hat{\hat{X}} \times \hat{\hat{U}}$, $F(x, y) = 0$ folgt $y = g(x)$.

Beweis:

- $B := D_bF(a, \cdot)$ sei invertierbar. Definiere $G\colon X \times U \to \mathbb{R}^n$ mit

$$G(x, y) := y - B^{-1} \cdot F(x, y)$$

Dann gilt:

$$F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G(x, y) = y$$

Sprich: Umwandlung der Nullstellensuche zu $F(x, \cdot)$ in Fixpunktsuche für $G(x, \cdot)$ für festes $x$.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Aus

$$\begin{aligned} D_yG(x,\cdot) &= D_y\left(\mathrm{id} - B^{-1}\circ F(x,\cdot)\right) \\ &= \underbrace{D_y\,\mathrm{id}}_{=\mathrm{id}} - \underbrace{D_{F(x,y)}\left(B^{-1}\right)}_{=B^{-1}}\circ D_yF(x,\cdot) \\ &= \mathrm{id} - B^{-1}\circ D_yF(x,\cdot) \end{aligned}$$

  folgt durch $a$ und $b$ einsetzen:

$$\begin{aligned} D_bG(a,\cdot) &= \mathrm{id} - B^{-1}\circ \underbrace{D_bF(a,\cdot)}_{=B} \\ &= \mathrm{id} - \mathrm{id} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Da $(x,y)\mapsto D_yG(x,\cdot)$ in $(a,b)$ stetig ist, gibt es Umgebungen $\hat{X}\subseteq X$ von $a$ und $\hat{U}\subseteq U$ von $b$, sodass für alle $(x,y)\in\hat{X}\times\hat{U}$:

$$\begin{aligned} \|D_yG(x,\cdot)\|_A &= \|D_yG(x,\cdot) - 0\|_A \\ &= \|D_yG(x,\cdot) - D_b(a,\cdot)\|_A \\ &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Es gibt $r>0$, sodass $B_{\mathbb{R}^n}[b,r] := B[b,r]\subseteq\hat{U}$. Da $G(a,b)=b$ ist, gibt es eine offene Umgebung $\hat{\hat{X}}\subseteq\hat{X}$ von $a$, sodass

$$\sup_{x\in\hat{\hat{X}}} |G(x,b)-b|_2 < \frac{r}{2}$$

- Wir zeigen, dass für $x\in\hat{\hat{X}}$ der Banach'sche Fixpunktsatz auf $G(x,\cdot)\colon B_{\mathbb{R}^n}[b,r]\to\mathbb{R}^n$ anwendbar ist:
  - $G(x,\cdot)$ ist „strikte“ Kontraktion:

    Für $y$, $y'\in B_{\mathbb{R}^n}[b,r]$ gilt:

$$\begin{aligned} |G(x,y)-G(x,y')|_2 &\leq \left\|D_{y'+\xi\cdot(y-y')}G(x,\cdot)\right\|_A\cdot|y-y'|_2 \\ &\leq \frac{1}{2}\cdot|y-y'|_2 \end{aligned}$$

    mit geeigneten $\xi\in(0,1)$ nach Satz 26.2 (Mittelwertsatz im $\mathbb{R}^n$).
  - Für $|y-b|_2<r$ gilt:

$$\begin{aligned} |G(x,y)-b|_2 &\leq \underbrace{|G(x,y)-G(x,b)|_2}_{\leq\frac{1}{2}|y-b|_2} + \underbrace{|G(x,b)-b|_2}_{<\frac{r}{2}} \\ &< r \end{aligned}$$

    Damit: $G(x,\cdot)\colon B_{\mathbb{R}^n}[b,r]\to\hat{\hat{U}} := B_{\mathbb{R}^n}(b,r)\subseteq B_{\mathbb{R}^n}[b,r]$

- Somit sind alle Vorraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes gezeigt. $\left(k:=\frac{1}{2}\right)$ Es folgt die Existenz und Eindeutigkeit von $g(x)\in\hat{\hat{U}}$ mit $G(x,g(x))=g(x)$.

- Stetigkeit von $g$: Für $x$, $x'\in\hat{\hat{X}}$ gilt:

$$\begin{aligned} |g(x)-g(x')| &= |G(x,g(x)) - G(x',g(x'))| \\ &\leq |G(x,g(x)) - G(x',g(x))| + |G(x',g(x)) - G(x',g(x'))| \\ &\leq |G(x,g(x)) - G(x',g(x))| + \frac{1}{2}\cdot|g(x)-g(x')| \\ \Rightarrow |g(x)-g(x')| &\leq 2|G(x,g(x)) - G(x',g(x))| \\ &\to 0\ (x'\to x) \end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Also $g$ stetig in $x$. (11.1.3)

Beispiele:

1. Es sei $X = \mathbb{R}^2$, $n = 1$, $F((x,y),z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

$$S := \{((x,y),z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid F((x,y),z) = 0\} \quad \text{(Einheitssphäre)}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} D_z F((x,y),\cdot) =: \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = 2z \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 < 1, \quad (x,y,z) \in S \end{aligned}$$

Ist $a \in X$, $b \in \mathbb{R}$ mit $F(a,b) = 0$.

$$\begin{aligned} F((x,y),z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad z^2 = 1 - x^2 - y^2 \\ &\overset{1-x^2-y^2>0}{\Leftrightarrow} \quad z \in \left\{\sqrt{1-x^2-y^2}, -\sqrt{1-x^2-y^2}\right\} \end{aligned}$$

Der erste Auflösungssatz erlaubt zwei Fälle: Ist $b > 0$ so kann nur gelten:

$$g(a) = \sqrt{1 - (a_1)^2 - (a_2)^2}$$

Da $g$ laut erstem Auflösungssatz stetig ist, gilt ferner:

$$g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

ist die stetige Lösung von $F(x,y,g(x,y)) = 0$ in einer Umgebung von $a$. Ist $b < 0$, dann

$$g(x,y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

2. Sei $X := \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n$ (Menge der linearen Gleichungssysteme), $U := \mathbb{R}^n$ (Menge der Lösungskandidaten), $F \colon X \times U \to \mathbb{R}^n$ der Defekt mit

$$F((A,b),y) := A \cdot y - b$$

Also ein Lösungskandidat löst das Gleichungsystem $\Leftrightarrow$ der Defekt ist 0.

$$F((A,b),y) = 0 \Leftrightarrow A \cdot y = b$$

Dann:

$$\partial F((A,b),\cdot) = \partial(A - \operatorname{const} b) = A$$

invertierbar falls $A$ invertierbar, außerdem ist $(A,b) \mapsto A$ stetig.

Satz 28.2: Ist $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, $b_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $A_0 \cdot y_0 = b_0$, so lässt sich für $A$ und $b$ in Umgebungen von $A_0$ und $b_0$ die Gleichung $A \cdot y = b$ lösen, mit $y$ stetig abhängig von $A$ und $b$, d.h. $y = A^{-1} \cdot b$. Dies folgt auch aus der Cramer'schen Regel. (Lineare Algebra) Und zwar ist

$$g(A,b) = A^{-1} b = \left(\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)\right) b$$

stetig.

3. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f \colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $c \in \mathbb{R}$ und für alle $(x,y) \in U$ mit $f(x,y) = c$ gelte $\operatorname{grad} f(x,y) \neq 0$. Dann lässt sich die „Höhenlinie“

$$\{(x,y) \mid f(x,y) = c\}$$

immer lokal nach $x$ oder $y$ auflösen. (manchmal nur nach $x$ oder manchmal nur nach $y$)



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Wir kommen jetzt noch zur Differenzierbarkeit der in Satz 28.2 implizit definierten Funktion $g$, falls $X \subseteq \mathbb{R}^k$ offen:

Vorbetrachtung:

- Ist $F$ in $(a,b)$ differenzierbar, $g$ differenzierbar in $a$, so folgt mit Kettenregel:

$$\begin{aligned} 0 &= (x \mapsto F(x, g(x)))'(a) \\ &= \frac{\partial F(a,g(a))}{\partial x} + \frac{\partial F(a,g(a))}{\partial y} \cdot g'(a) \\ g'(a) &= -\left(\frac{\partial F(a,g(a))}{\partial y}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F(a,g(a))}{\partial x} \end{aligned}$$

Beispiel:

- Es sei $g\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$. Also:

$$\begin{aligned} x^2 + g(x)^2 - 1 &= 0 \\ \Rightarrow F(x,y) &= x^2 + y^2 - 1 \\ \Rightarrow 2x + 2 \cdot g(x) \cdot g'(x) &= 0 \\ g'(x) &= \frac{-x}{g(x)} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

### 28.3 Satz: Differenzierbarkeit impliziter Funktionen

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^k, U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F\colon X \times U \to \mathbb{R}^n$ mit $(x,y) \mapsto F(x,y)$. Sei $(a,b) \in X \times U$ mit $F(a,b) = 0$, $F$ in $(a,b)$ differenzierbar, $\frac{\partial F(a,b)}{\partial y}$ invertierbar. Sei $g\colon X \to U$ stetig in a, $g(a) = b$, $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in X$. Dann $g$ in $a$ differenzierbar und es gilt:

$$g'(a) = -\left(\frac{\partial F(a,b)}{\partial y}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F(a,b)}{\partial x}$$

Beweis:

- Ohne Einschränkung $(a,b) = (0,0)$. $A := \frac{\partial F(0,0)}{\partial x} \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $B := \frac{\partial F(0,0)}{\partial y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar.
- $F$ differenzierbar in $(0,0)$:

$$F(x,y) = A \cdot x + B \cdot y + (|x| + |y|) \cdot \varphi(x,y)$$

  mit $\lim_{x,y \to 0} \varphi(x,y) = 0$. F(x,g(x)) schreibt sich also:

$$g(x) = \underbrace{-B^{-1} \cdot A}_{g'(0)} \cdot x - (|x| + |g(x)|) \cdot B^{-1} \cdot \varphi(x, g(x))$$

- Beweis, dass zweiter Term sich wie $|x| \cdot \psi(x)$ verhält in 2 Schritten:
  1. $\exists \delta > 0, K > 0$, sodass $B(0,\delta) \subseteq X$ mit

$$|g(x)| \leq K \cdot |x|$$

     für $|x| < \delta$.

     Beweis:



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

– Es existiert $\delta > 0$ mit

$$|B^{-1} \cdot \varphi(x, g(x))| \leq \frac{1}{2}$$

für $|x| < \delta$. Damit:

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq |B^{-1} \cdot A \cdot x| + \frac{1}{2}|g(x)| + \frac{1}{2}|x| \\ |g(x)| &\leq (2\|B^{-1} \cdot A\| + 1) \cdot |x| \end{aligned}$$

2. Für $|x| < \delta$ gilt:

$$g(x) = -B^{-1} \cdot A \cdot x + |x| \cdot \psi(x)$$

mit

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -\frac{1}{|x|} \cdot (|x| + |g(x)|) \cdot B^{-1} \cdot \varphi(x, g(x)) \\ |\psi(x)| &\leq (1 + K) \cdot |B^{-1} \cdot \varphi(x, g(x))| \\ &\to 0 \ (x \to 0) \end{aligned}$$

### 28.4 Satz: Stetige Differenzierbarkeit impliziter Funktionen (Zusatz zu 28.2)

Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 28.2: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $F\colon X \times U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann kann $V_1$ so gewählt werden, dass $g\colon V_1 \to V_2$ stetig differenzierbar ist.

Beweis:

- Wähle $V_1$ so, dass $\frac{\partial F(x,g(x))}{\partial y}$ für alle $x \in V_1$ invertierbar ist. (Möglich, da $\mathbb{R}^{n \times n} \ni A \mapsto \det A$ stetig ist) Dann Satz 28.3.
- Die Stetigkeit von g' folgt aus:

$$g'(x) = -\left(\frac{\partial F(x, g(x))}{\partial y}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F(x, g(x))}{\partial x}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 29

# Lokale Invertierbarkeit, Lagrange-Multiplikatoren

Seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U_1 \to U_2$ heißt Diffeomorphismus $:\Leftrightarrow f$ bijektiv, $f$ und $f^{-1}(: U_2 \to U_1)$ stetig differenzierbar.

Bemerkung:

- Mit $g = f^{-1}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} g \circ f &= \mathrm{id}_{U_1} \\ g'(f(x)) \cdot f'(x) &= E_n \end{aligned}$$

  für alle $x \in U_1$, $f'(x)$ ist invertierbar,

$$g'(f(x)) = f'(x)^{-1}$$

### 29.1 Satz: Satz der lokalen Invertierbarkeit, 2. Auflösungssatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $a \in U$, $f'(a)$ invertierbar. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_1 \subseteq U$ von $a$ und eine offene Umgebung $U_2$ von $f(a) =: b$, sodass $f\colon U_1 \to U_2$ ein Diffeomorphismus ist. Mit $g = f^{-1}$ gilt:

$$g'(b) = f'(a)^{-1}$$

Beweis:

- Sei $F\colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x,y) := f(x) - y$. (Dann $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = y$, d.h. zum Finden von $g = f^{-1}$ ist $F(x,y) = 0$ nach x „aufzulösen"; beachte vertauschte Rollen von $x$ und $y$ gegenüber 1. Auflösungssatz)
- Es gilt: $F(a,b) = 0$ und

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial x} = f'(a)\,\text{invertierbar}$$

  Auch

$$\begin{aligned} F'(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= (f'(x) \;\; -E_n) \end{aligned}$$

  stetig, damit ist F stetig differenzierbar.
- Aus Satz 28.2 und Zusatz 28.4: $\exists U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von b, $V \subseteq U$ offene Umgebung von $a$ mit $g\colon U_2 \to V$ eindeutig definiert durch $F(g(y), y) = 0$ ($\Leftrightarrow f(g(y)) = y$) und $g$ stetig differenzierbar.
- Für $x \in V, y \in U_2$ gilt:

$$x = g(y) \;\Leftrightarrow\; F(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow y = f(x)$$

  Daher

$$U_1 := g(U_2) = f^{-1}(U_2) \cap V$$

  offen (Analysis I, Übung Aufgabe 64). $f\colon U_1 \to U_2$ bijektiv, $g = f^{-1}|_{U_1}$.

Beispiel:

1. Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} f\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\,(r,\varphi) &\mapsto \begin{pmatrix} r\cdot\cos\varphi \\ r\cdot\sin\varphi \end{pmatrix} \\ f'(r,\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\cdot\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cdot\cos\varphi \end{pmatrix} \\ \det f'(r,\varphi) &= r\cdot\cos^2\varphi + r\cdot\sin^2\varphi = r\neq 0 \end{aligned}$$

   Also $f'(r,\varphi)$ lokal invertierbar.

### 29.2 Satz: Notwendige Bedingung für lokales Extremum unter Nebenbedingung

Sei $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen. Sei $1\leq m\leq n$, $f\colon U\to\mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. $f'(x)$ habe Rang $m$ für alle $x\in U$. Sei $h\colon U\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $a\in U$ mit $f(a)=0$ und $h$ habe in $a$ ein lokales Maximum unter der Nebenbedingung $f=0$, d.h. es gibt eine Umgebung $V\subseteq U$ von $a$ mit $h(a)\geq h(x)$ für alle $x\in V\cap M$, wobei

$$M := \{x\in U; f(x)=0\}$$

Dann gibt es $\lambda\in\mathbb{R}^m$, sodass

$$\operatorname{grad} h(a) = \sum_{j=1}^{m}\lambda_j \operatorname{grad} f_j(a)$$

$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ heißen Lagrange-Multiplikatoren. (Notwendige Bedingung für lokales Extremum mit Nebenbedingung, geeignet zur „Kandidatensuche“)

Beweis:

- Nach Umnummerieren der Variablen und Verkleinern von $U$:

$$\begin{aligned} k &:= n-m \\ x &= (\check{x},\hat{x})\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k}\ f(x)=f(\check{x},\hat{x}) \\ &\Rightarrow \frac{\partial f(\check{x},\hat{x})}{\partial\hat{x}}(\check{x},\hat{x})\,\text{invertierbar für alle}\,(\check{x},\hat{x})\in U \end{aligned}$$

  ($f'(a)$ hat $m$ linear unabhängige Spalten, o.E. die letzten, d.h. $\frac{\partial f(a)}{\partial\hat{x}}$ invertierbar.)

- Satz über implizite Funktionen und Zusatz 28.4: $\exists$ offene Umgebung $\check{V}\subseteq\mathbb{R}^k$ von $\check{a}$, offene Umgebung $\hat{V}\subseteq\mathbb{R}^{n-k}$ von $\hat{a}$, $g\colon\check{V}\to\hat{V}$ stetig differenzierbar mit $f(\check{x},g(\check{x}))=0$ für alle $\check{x}\in\check{V}$ und $g(\check{a})=\hat{a}$. ($(\check{x},g(\check{x}))\in M$)

- Kettenregel:

$$\begin{aligned} 0 &= (\check{x}\mapsto f(\check{x},g(\check{x})))'\,(a) \\ &= \frac{\partial f(a)}{\partial\check{x}} + \frac{\partial f(a)}{\partial\hat{x}}\cdot g'(\check{x}) \end{aligned}$$

- Die Funktion $H\colon\check{V}\to\mathbb{R}$, $\check{x}\mapsto h(\check{x},g(\check{x}))$ besitzt in $\check{x}=\check{a}$ ein lokales Maximum, daher

$$\begin{aligned} 0 &= H'(\check{a}) = \frac{\partial h(a)}{\partial\check{x}} + \frac{\partial h(a)}{\partial\hat{x}}\cdot g'(\check{a}) \\ &= \frac{\partial h(a)}{\partial\check{x}} - \underbrace{\left(\frac{\partial h(a)}{\partial\hat{x}}\cdot\frac{\partial f(a)}{\partial\hat{x}}^{-1}\right)}_{=:\lambda}\cdot\frac{\partial f(a)}{\partial\check{x}} \\ \Rightarrow \frac{\partial h(a)}{\partial\check{x}} &= \lambda\cdot\frac{\partial f(a)}{\partial\check{x}} \end{aligned}$$



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Auch:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h(a)}{\partial \hat{x}} &= \left(\frac{\partial h(a)}{\partial \hat{x}} \cdot \frac{\partial f(a)}{\partial \hat{x}}^{-1}\right) \cdot \frac{\partial f(a)}{\partial \hat{x}} \\ &= \lambda \cdot \frac{\partial f(a)}{\partial \hat{x}}\end{aligned}$$

Also:

$$h'(a) = \lambda \cdot f'(a)$$

Transponiert:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} h(a) &= \begin{pmatrix}\operatorname{grad} f_1(a) & \dots & \operatorname{grad} f_m(a)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m\end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \operatorname{grad} f_j(a)\end{aligned}$$

Bemerkung:

1. Erklärung für $m = 1$:

   Falls $\operatorname{grad} h(a)$ nicht gleiche Richtung wie $\operatorname{grad} f(a)$, dann würde $h$ in Umgebung von $a$ (auf $f = 0$) noch anwachsen, also $a$ nicht Maximum.

2. Andere Formulierung der Methode:

   Betrachte

   $$H \colon U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ H(x, \lambda) = h(x) - \lambda_1 \cdot f_1(x) - \ldots - \lambda_m \cdot f_m(a)$$

   und suche nach $x$, $\lambda$ mit $H'(x, \lambda) = 0$. Dann:

   $$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial h(x, \lambda)}{\partial x}^T) = \operatorname{grad} h(x) - \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} f_1(x) \ldots \\ 0 &= \frac{\partial H(x, \lambda)}{\partial \lambda} = -\begin{pmatrix}f_1(x) & \dots & f_m(x)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Beispiele:

1. Lokale Extrema der Funktion

   $$h(x, y) = x \cdot y^2$$

   unter der Nebenbedingung $x + y = 1$

   $$\begin{aligned}f(x, y) &= x + y - 1 \\ \operatorname{grad} h &= \begin{pmatrix}y^2 \\ 2xy\end{pmatrix} \qquad \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

   Zu lösendes Gleichungssystem:

   $$\begin{aligned}y^2 &= \lambda \\ 2xy &= \lambda \\ x + y - 1 &= 0\end{aligned}$$

   Lösungen:

   $$\begin{aligned}y_1 &= 0 \qquad \lambda = 0 \qquad x_1 = 1 \\ y_2 &= 2x \qquad x_2 = \frac{1}{3} \qquad y_2 = \frac{2}{3}\end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Damit:

$$h(x_1, y_1) = 0 \qquad h(x_2, y_2) = \frac{4}{27} > h(x_1, y_1)$$

Globale Betrachtungen bei $f = 0$:

$$\begin{aligned} h(x, y) &\to \infty \qquad (x \to \infty) \\ h(x, y) &\to -\infty \qquad (x \to -\infty) \end{aligned}$$

Also $(x_1, y_1)$ lokales Minimum, $(x_2, y_2)$ lokales Maximum.

2. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann besitzt $A$ eine Orthogonalbasis von Eigenvektoren, d.h. $x^1, \ldots, x^n \in \mathbb{R}^n$ mit $(x^j | x^k) = \delta_{jk}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $A \cdot x^j = \lambda \cdot x^j$ für $j = 1, \ldots, n$.

   Beweis:

   - Betrachte

$$\begin{aligned} h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, &\qquad h(x) = (A \cdot x | x) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \cdot x_j \cdot x_k \\ f_0 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, &\qquad f_0(x) = |x|^2 - 1 \end{aligned}$$

   Maximumstelle $x^1$ von $h$ unter $f_0 = 0$ existiert ($\{x; f_0(x) = 0\}$ kompakt und $h$ stetig). Nach Satz 29.2 existiert $\lambda_1 \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{grad} h(x^1) = \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} f_0(x^1)$$

   Nun gilt wegen der Symmetrie von $A$:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} h(x) &= 2Ax \\ \operatorname{grad} f_0(x) &= 2x \\ \Rightarrow A \cdot x^1 &= \lambda_1 \cdot x^1 \end{aligned}$$

   Jetzt weitere Nebenbedingung: $f_1(x) = (x | x^1)$.

$$\operatorname{grad} f_1(x) = x^1 \qquad \operatorname{grad} f_0(x) = 2x$$

   sind linear unabhängig auf $M_2$

$$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^n; f_0(x) = f_1(x) = 0\}$$

   und daher in Umgebung von $M_2$. Aus Kompaktheit von $M_2$ folgt: Es existiert Maximumstelle $x^2$ von $h$ auf $M_2$. Nach Satz 29.2 gibt es $\lambda_1', \lambda_2$:

$$2Ax^2 = 2\lambda_2 \cdot x^2 + \lambda_1' \cdot x^1$$

   Wegen

$$(Ax^2 | x^1) = (x^2 | Ax^1) = \lambda_1' \cdot (x^2 | x^1) = 0$$

   folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (2Ax^2 - 2\lambda_2 \cdot x^2 - \lambda_1' \cdot x^1 | x^1) \\ &= -\lambda_1' \cdot (x^1 | x^1) \\ \Rightarrow \lambda_1' &= 0 \end{aligned}$$

   Also:

$$Ax^2 = \lambda_2 \cdot x^2$$

   u.s.w. (nächste Nebenbedingung $f_2(x) := (x | x^2)$)



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 31

# Integral von Treppenfunktionen im $\mathbb{R}^n$

- Ziel: Berechnung von Volumina, z.B. $\mathrm{vol}_n(B_{\mathbb{R}^n}(0,1))$:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_n(B_{\mathbb{R}^n}(0,1)) &= \int_{B(0,1)} 1\,dx \\ &= 2\int_{B_{\mathbb{R}^{n-1}}(0,1)} \sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2}\,dx_1\ldots dx_{n-1}\end{aligned}$$

- Für $a,b\in\mathbb{R}^n$:

$$a\le b :\Leftrightarrow a_j\le b_j \text{ für alle } j=1,\ldots,n$$

  Falls $a\le b$:

$$\begin{aligned}[a,b] &= [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_n,b_n] \\ &= \{x\in\mathbb{R}^n; a\le x\le b\}\end{aligned}$$

  (n-dimensionales abgeschlossenes Intervall)

$$\mathrm{vol}_n[a,b] := (b_1-a_1)\cdot\cdots\cdot(b_n-a_n)$$

  ($n$-dimensionales Volumen (Maß) von $[a,b]$)

- Für $B\subseteq\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{1}_B\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ \mathbb{1}_B := \begin{cases}1 & x\in B\\ 0 & x\notin B\end{cases}$$

  Indikatorfunktion von $B$ (charakteristische Funktion), auch $\chi_b := \mathbb{1}_B$

- Treppenfunktionen:

$$T(\mathbb{R}^n) := \mathrm{lin}\{\mathbb{1}_{[a,b]}; a,b\in\mathbb{R}^n, a\le b\}$$

  (Vektorraum). Jede Treppenfunktion $f$ hat die Gestalt

$$f=\sum_{j=1}^m c_j\cdot\mathbb{1}_{[a^j,b^j]}$$

  mit $m\in\mathbb{N}$, $c_1,\ldots,c_m\in\mathbb{R}$, $a^1,\ldots,a^m,b^1,\ldots,b^m\in\mathbb{R}^n, a^j\le b^j$ für alle $j=1,\ldots,m$.

- Bemerkungen:

  1. Für $n=1$: Bekannte Treppenfunktionen, abgesehen davon, dass bisher nur auf Intervallen definiert. Beispiel:

$$\varphi(x) := \frac{1}{2}\cdot\mathbb{1}_{[-2,0]}+3\cdot\mathbb{1}_{[0,1]}+96,5\cdot\mathbb{1}_{[0,0]}$$

  2. Ergänzung: Auch im $\mathbb{R}^n$ ist folgende Definition möglich: Gegeben sei Intervallsystem $\{I\}$ mit $\mathrm{int}\,I\cap\mathrm{int}\,\tilde{I}=\emptyset$ für $I\ne\tilde{I}$.

$$f(x)=c_I \qquad \text{für } x\in\mathrm{int}(I)$$

     Für $x\notin\bigcup I$ sei $f(x)=0$.

3. Sei $1 \leq k \leq n-1$, $f \in T(\mathbb{R}^n)$. Für jedes $\hat{x} = (x_{k+1} \dots x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$ ist dann $f(.,\hat{x}) \in T(\mathbb{R}^k)$.

   Beweis:

   – Es genügt $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$ zu betrachten. Seien $a = (\check{a}, \hat{a})$, $b = (\check{b}, \hat{b}) \in \mathbb{R}^n$. Dann

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbb{1}_{[a,b]}(\check{x}, \hat{x}) \\ &= \mathbb{1}_{[\check{a},\check{b}]}(\check{x}) \cdot \mathbb{1}_{[\hat{a},\hat{b}]}(\hat{x}) \end{aligned}$$

   Damit:

$$f(.,\hat{x}) = \begin{cases} \mathbb{1}_{[\check{a},\check{b}]} & \text{falls } \hat{x} \in [\hat{a}, \hat{b}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für $f \in T(\mathbb{R}^n)$,

$$f = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot \mathbb{1}_{[a^j,b^j]}$$

  mit $a^j, b^j \in \mathbb{R}^n, a^j \leq b^j$ für $j = 1, \dots, k$ definieren wir das Integral

$$\int f(x)\, dx := \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot \mathrm{vol}_n([a^j, b^j])$$

  Hierbei ist zu zeigen, dass dies wohldefiniert ist, also die rechte Seite unabhängig von der Darstellung von $f$ ist.

### 31.1 Satz: Eigenschaften des Integrals

1. Für $f \in T(\mathbb{R}^n)$ ist das soeben definierte Integral wohldefiniert, d.h. es hängt nicht von der Darstellung ab.
2. Die Abbildung $f \in T(\mathbb{R}^n) \mapsto \int f(x)\, dx$ ist linear.
3. Sei $1 \leq k \leq n-1$. Für $f \in T(\mathbb{R}^n)$ ist dann $\hat{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(\check{x}, \hat{x})\, d\check{x}$ eine Treppenfunktion und

$$\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \left( \int f(\check{x}, \hat{x}) d\check{x} \right) d\hat{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$$

   Es folgt somit:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \dots \left( \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, f(x_n)) dx_1 \right) dx_2 \right) \dots dx_n$$

Beweis:

1. 
   - Es genügt zu zeigen: $f \in T(\mathbb{R}^n), f = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbb{1}_{[a^j,b^j]}$ mit $f(x) = 0$ für alle $x$, so gilt

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \mathrm{vol}_n [a^j, b^j] = 0$$

   - Für $n = 1$:

     Für $f = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \mathbb{1}_{[a^j,b^j]}$ sei $x_0 < \dots < x_l$ mit $\{x_k\} = \{a^j, b^j; j = 1, \dots, m\}$. Dann gilt:

$$\mathrm{vol}[a^j, b^j] = \sum_{[x_i, x_{i+1}] \subseteq [a^j, b^j]} \mathrm{vol}[x_i, x_{i+1}]$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Dann:

$$\begin{aligned}\int f &= \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \mathrm{vol}[a^j, b^j] \\ &= \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \sum_{[x_i, x_{i+1}] \subseteq [a^j, b^j]} \mathrm{vol}[x_i, x_{i+1}] \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} \mathrm{vol}[x_i, x_{i+1}] \left( \sum_{j:[x_i, x_{i+1}] \subseteq [a^j, b^j]} c_j \right)\end{aligned}$$

Nun gilt für $x \in (x_i, x_{i+1})$:

$$f(x) = \sum_{j:[x_i, x_{i+1}] \subseteq [a^j, b^j]} c_j = 0$$

wegen $f = 0$. Damit $\int f = 0$.

- Sei $n \geq 2$ und die Aussage für $1, \ldots, n-1$ bewiesen. Sei $1 \leq k \leq n-1$. Für $\check{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$ ist die Treppenfunktion

$$f(\check{x}, \cdot) = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \mathbb{1}_{[\check{a}^j, \check{b}^j]}(\check{x}) \cdot \mathbb{1}_{[\hat{a}^j, \hat{b}^j]}(.)$$

die Nullfunktion und nach Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \mathbb{1}_{[\check{a}^j, \check{b}^j]} \cdot \mathrm{vol}[\hat{a}^j, \hat{b}^j] = 0$$

Abermals nach Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \mathrm{vol}[\check{a}^j, \check{b}^j] \cdot \mathrm{vol}[\hat{a}^j, \hat{b}^j] &= 0 \\ \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \mathrm{vol}[a^j, b^j] &= 0 \\ \int f &= 0\end{aligned}$$

2. Klar nach Definition.
3. Es genügt diese Eigenschaft für die Indikatorfunktion zu zeigen (wegen Linearität). Sei $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int \mathbb{1}_{[a,b]}(\check{x}, \hat{x}) d\check{x} &= \mathrm{vol}[\check{a}, \check{b}] \cdot \mathbb{1}_{[\hat{a}, \hat{b}]} \\ \int \left( \int \mathbb{1}_{[a,b]}(\check{x}, \hat{x}) d\check{x} \right) d\hat{x} &= \mathrm{vol}[\check{a}, \check{b}] \cdot \int \mathbb{1}_{[\hat{a}, \hat{b}]} d\hat{x} \\ &= \mathrm{vol}[\check{a}, \check{b}] \cdot \mathrm{vol}[\hat{a}, \hat{b}] \\ &= \mathrm{vol}[a, b] \\ &= \int f\end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Wiederholte Anwendung der letzten Formel von Satz 31.1 ergibt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \ldots \left( \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, f(x_n)) dx_1 \right) dx_2 \right) \ldots dx_n$$

2. Obige Formel für allgemeinere Funktionen erlaubt die Berechnung von mehrdimensionalen Integralen.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

### 31.2 Folgerung: Positivität des Integrals

Aus $f, g \in T(\mathbb{R}^n)$, $f \leq g$ folgt:

$$\int f(x)\,dx \leq \int g(x)\,dx$$

Beweis: per Induktion (ähnlich 31.1)

### 31.3 Satz: Weitere Treppenfunktionen

Sei $f \in T(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt: $f^{\pm}, |f|, f \wedge 1$ sind ebenfalls Treppenfunktionen.

$$\begin{aligned} f^+ &= \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases} = \max\{f(x), 0\} \\ (f \wedge 1)(x) &= \begin{cases} f(x) & f(x) < 1 \\ 1 & f(x) \geq 1 \end{cases} = \min\{f(x), 1\} \end{aligned}$$

### 31.4 Hilfssatz

Sei $\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{1}_A \in T(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A}$$

Beweis: siehe Übung

Beweis zu Satz 31.3:

- Sei $f = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$ mit $n$-dimensionalen abgeschlossenen Intervallen $A_i$. Für $\emptyset \neq J \subseteq \{1, \ldots, k\}$:

  $$\begin{aligned} A_J &:= \bigcap_{j \in J} A_j \setminus \bigcup_{j \notin J} A_j \\ a_J &:= \sum_{j \in J} a_j \end{aligned}$$

  Dann gilt:

  $$f = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1, \ldots, k\}} a_J \cdot \mathbb{1}_{A_J}$$

  und $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$. ($A_J$ besteht genau aus den $x$, die in $A_j$ sind für $j \in J$, aber nicht in $A_j$ für $j \notin J$.) Daher:

  $$\begin{aligned} f^+ &= \sum_J \max\{a_J, 0\} \cdot \mathbb{1}_{A_J} \\ f \wedge 1 &= \sum_J \min\{f(x), 1\} \cdot \mathbb{1}_{A_J} \end{aligned}$$

  sind Treppenfunktionen.

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 32

# Das $n$-dimensionale Riemann-Integral

- Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann
$$\overline{\int} f(x)\,dx := \inf\{\int \psi(x)\,dx; \psi \in T(\mathbb{R}^n), \psi \geq f\}$$
Oberintegral von $f$,
$$\underline{\int} f(x)\,dx := \sup\{\int \varphi(x)\,dx; \varphi \in T(\mathbb{R}^n), \varphi \leq f\}$$
Unterintegral von f. (Dabei $\overline{\int} f = \infty$, falls $\nexists \psi \in T(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi \geq f$.) Offenbar $\underline{\int} f \leq \overline{\int f}$.
- $f$ heißt Riemann-Integrierbar, wenn
$$\underline{\int} f = \overline{\int} f$$
und $\int f(x)\,dx = \overline{\int} f(x)\,dx$.
- Bemerkung: $\overline{f} < \infty \Leftrightarrow \exists \psi \in T(\mathbb{R}^n), \psi \geq f \Leftrightarrow f$ nach oben beschränkt und $\exists r > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus B[0,r] : f(x) \leq 0$

### 32.1 Hilfssatz: Rechenregeln Ober- und Unterintegral

Seien $f$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann:

1. $\underline{\int} f(x)\,dx = -\overline{\int}(-f)(x)\,dx$
2. $\overline{\int} c\dot{f}(x)\,dx = c \cdot \overline{\int} f(x)\,dx$ für $c \geq 0$
3. $\overline{\int}(f+g)(x)\,dx \leq \overline{\int} f(x)\,dx + \overline{\int} g(x)\,dx$, falls $\overline{\int} f(x)\,dx$, $\overline{\int} g(x)\,dx < \infty$

„Rechenregeln“:
$$\begin{aligned} c \cdot \infty &= \infty \qquad c \cdot (-\infty) = -\infty \qquad (c > 0) \\ \infty + a &= a + \infty = \infty \qquad (-\infty < a \leq \infty) \\ -\infty + a &= a - \infty = -\infty \qquad (-\infty \leq a < \infty) \end{aligned}$$

Beweis:

- Siehe n=1. Für 3.: Es existieren $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^n)$ mit $f \leq \varphi$, $g \leq \psi$. Dann $f + g \leq \varphi + \psi$. Daher:
$$\begin{aligned} \overline{\int} f + g &\leq \int \varphi + \psi \\ &= \int \varphi + \int \psi \\ \Rightarrow \overline{\int} f + g &\leq \overline{\int} f + \int \psi \\ \Rightarrow \overline{\int} f + g &\leq \overline{\int} f + \overline{\int} g \end{aligned}$$

### 32.2 Satz: Linearität des Riemann-Integrals

Die Menge $R(\mathbb{R}^n)$ der Riemann-integrierbaren Funktionen ist ein Vektorraum und die Abbildung

$$R(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \int f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

ist linear. Aus $f, g \in R(\mathbb{R}^n)$, $f \leq g$ folgt:

$$\int f(x)\,dx \leq \int g(x)\,dx$$

(Monotonie des Integrals)

Beweis: siehe $n = 1$

Bemerkung:

- Aus Monotonie: Ist $f \in R(\mathbb{R}^n)$, $m \leq f \leq M$ für geeignete $m, M \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leq b$, $f(x) = 0$ für $x \notin [a, b]$, dann
$$m \cdot \mathbb{1}_{[a,b]} \leq f \leq M \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}$$
daher:
$$m \cdot \mathrm{vol}_n[a, b] \leq \int f \leq M \cdot \mathrm{vol}_n[a, b]$$

### 32.3 Satz: Riemannsches Integrierbarkeitskriterium

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann äquivalent:

1. $f \in R(\mathbb{R}^n)$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \psi, \varphi \in T(\mathbb{R}^n) : \varphi \leq f \leq \psi$, $\int (\psi - \varphi)\,dx \leq \varepsilon$
3. $\forall \varepsilon > 0 \exists g, h \in R(\mathbb{R}^n) : g \leq f \leq h$, $\int (h - g)\,dx \leq \varepsilon$

Beweis:

1. 1. $\Leftrightarrow$ 2.: Klar nach Definition
2. 2. $\Rightarrow$ 3.: Trivial
3. 3. $\Rightarrow$ 1.:

   Sei $\varepsilon > 0$ und g,h wie in 3. vorausgesetzt. dann:

$$\begin{aligned} \int g \leq \underline{\int} f \quad &\leq \quad \overline{\int} f \leq \int h \leq \int g + \varepsilon \\ \Rightarrow \overline{\int} f - \underline{\int} f \quad &\leq \quad \varepsilon \end{aligned}$$

### 32.4 Satz: Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$, $f|_{[a,b]}$ stetig, $f|_{\mathbb{R}^n \setminus [a,b]} = 0$. Dann $f \in R(\mathbb{R}^n)$.

Beweis:

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Sei $\varepsilon > 0$. Da $f|_{[a,b]}$ gleichmäßig stetig, gibt es $\delta > 0$, sodass aus $x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta$ folgt:

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Man findet eine Überdeckung von $[a,b]$ durch abgeschlossene $n$-dimensionale Intervalle $Q_1, \ldots, Q_m$ mit Seitenlängen $\leq \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, alle $Q_j \subseteq [a,b]$. Für $x, y \in Q_j$ folgt dann:

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y) < \varepsilon$$

Wir disjunktieren

$$\tilde{Q}_1 := Q_1 \qquad \tilde{Q}_2 := Q_2 \setminus Q_1 \qquad \tilde{Q}_j := Q_j \setminus \cup_{k=1,\ldots,j-1} Q_k$$

und wählen $x^j \in Q_j$ für $j = 1, \ldots, m$ (ohne Einschränkung $\tilde{Q}_j \neq \emptyset$). Nach Hilfssatz 31.4 sind $\mathbb{1}_{\tilde{Q}_j} \in T(\mathbb{R}^n)$ für $j = 1, \ldots, m$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sum_{j=1}^{m} f(x^j) \cdot \mathbb{1}_{\tilde{Q}_j} - \varepsilon \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}}_{=:g} &\leq f \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{m} f(x^j) \cdot \mathbb{1}_{\tilde{Q}_j} + \varepsilon \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}}_{=:h} \\
\Rightarrow \int (h-g)(x)\, dx &= \int 2\varepsilon \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}\, dx \\
&= 2\varepsilon \cdot \mathrm{vol}_n[a,b]
\end{aligned}$$

Mit Satz 32.3: $f \in R(\mathbb{R}^n)$

### 32.4.1 Kompakte Träger

- Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,

$$C(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ stetig}\}$$

ist ein Vektorraum. Für $f \in C(\Omega)$: Träger von $f$

$$\operatorname{spt} f := \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$

und

$$C_c(\Omega) := \{f \in C(\Omega); \operatorname{spt} f \text{ kompakt}\}$$

Vektorraum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger.

$$\operatorname{spt}(f+g) \subseteq \operatorname{spt}(f) + \operatorname{spt}(g)$$

Aus Satz 32.4: $C_c(\mathbb{R}^n) \subset R(\mathbb{R}^n)$

- Beispiele:
  1. $\Omega = (-1,1), \varphi(x) := x^2 - 1$. Dann: $\operatorname{spt}(\varphi) = (-1,1) \Rightarrow \varphi \notin C_c((-1,1))$
  2. $\Omega = \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &:= \begin{cases} x^2 - 1 & x \in (-1,1) \\ 0 & x \notin (-1,1) \end{cases} \\
\operatorname{spt}(\varphi) &= [-1,1] \Rightarrow \varphi \in C_c(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

## 32.5 Satz: Fundamentale Ungleichung

Seien $f, g \in R(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt: $f^+, f^-, |f|, \max\{f,g\}, \min\{f,g\}, f \cdot g \in R(\mathbb{R}^n)$. Außerdem gilt:

$$\left| \int f(x)\, dx \right| \leq \int |f(x)|\, dx$$

(fundamentale Ungleichung)

Beweis:



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- $f^+$: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \leq f \leq \psi$, $\int(\psi - \varphi) < \varepsilon$. Dann $\varphi^+ < f^+ < \psi^+$ und $\psi^+ - \varphi^+ \leq \psi - \varphi$ mit $\varphi^+, \psi^+ \in T(\mathbb{R}^n)$. Also:

$$\int(\psi^+ - \varphi^+) \leq \int(\psi - \varphi) < \varepsilon$$

  Damit $f^+ \in R(\mathbb{R}^n)$. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} f^- &= (-f)^+ \in R(\mathbb{R}^n) \\ |f| &= f^+ + f^- \in R(\mathbb{R}^n) \\ \max\{f,g\} &= \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2} \cdot |f-g| \in R(\mathbb{R}^n) \\ \min\{f,g\} &= \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2} \cdot |f-g| \in R(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

- $f \cdot g$: o.E.: $0 \leq f \leq 1, 0 \leq g \leq 1$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in T(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \varphi_1 \leq f \leq \psi_1 \leq 1$, $0 \leq \varphi_2 \leq g \leq \psi_2$, $\int(\psi_1 - \varphi_1) \leq \varepsilon$, $\int(\psi_2 - \varphi_2) \leq \varepsilon$. Dann:

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 \leq f \cdot g \leq \psi_1 \cdot \psi_2$$

  mit $\varphi_1 \cdot \varphi_2, \psi_1 \cdot \psi_2 \in T(\mathbb{R}^n)$. Damit:

$$\begin{aligned} \int(\psi_1 \cdot \psi_2 - \varphi_1 \cdot \varphi_2) &= \int \underbrace{(\psi_1 - \varphi_1)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\psi_2}_{\leq 1} + \int \underbrace{(\psi_2 - \varphi_2)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\varphi_1}_{\leq 1} \\ &\leq \int(\psi_1 - \varphi_1) + \int(\psi_2 - \varphi_2) \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

- Fundamentale Ungleichung: Aus $\pm f \leq |f|$ folgt:

$$\pm \int f \leq \int |f|$$

### 32.5.1 Jordan-Messbarkeit

- Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$. $B$ heißt Jordan-messbar $:\Leftrightarrow \mathbb{1}_B \in R(\mathbb{R}^n)$. Dann:

$$\mathrm{vol}_n(B) := \int \mathbb{1}_B(x)\, dx$$

  Volumen (Jordan-Inhalt).

- Für $f \in R(\mathbb{R}^n)$ ist dann $\mathbb{1}_B \cdot f \in R(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_B f(x)\, dx := \int \mathbb{1}_B \cdot f(x)\, dx$$

- Ebenso: Ist $f\colon B \to \mathbb{R}$ sodass $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\tilde{f} := \begin{cases} f(x) & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases} \in R(\mathbb{R}^n)$$

  , dann:

$$\int_B f(x)\, dx := \int \mathbb{1}_B \cdot \tilde{f}\, dx$$

- B heißt Jordan-Nullmenge $:\Leftrightarrow$ B Jordan-messbar und $\mathrm{vol}_n(B) = 0$.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Bemerkungen:

  1. $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar $\Leftrightarrow$ B beschränkt, $\partial B$ [Rand von B] ist Jordan-Nullmenge. (folgt aus Aufgabe 71b))
  2. $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar $\Rightarrow$ $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ Jordan-messbar

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A\cap B} &= \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B \in R(\mathbb{R}^n) \\ \mathbb{1}_{A\setminus B} &= \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A\cap B} \in R(\mathbb{R}^n) \\ \mathbb{1}_{A\cup B} &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B\setminus A} \in R(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

     Menge der Jordan-messbaren Mengen bilden einen Mengenring.

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 33

# Satz von Fubini, Berechnung von Integralen

## 33.1 Satz von Fubini

Sei $f \in R(\mathbb{R}^n)$. Sei $1 \leq k \leq n-1$. $(x \in \mathbb{R}^n : x = (\check{x}, \hat{x}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k})$. Dann ist

$$\mathbb{R}^{n-k} \ni \hat{x} \mapsto \overline{\int} f(\check{x}, \hat{x}) d\check{x}$$

Riemann-integrierbar und

$$\int f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \left( \overline{\int_{\mathbb{R}^k}} f(\check{x}, \hat{x}) d\check{x} \right) d\hat{x}$$

Bemerkung: Statt $\overline{\int}$ auch $\underline{\int}$ möglich.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \leq f \leq \psi$, $\int(\psi - \varphi) < \varepsilon$. Für alle $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$ folgt:

$$\begin{aligned} \varphi(., \hat{x}) &\leq f(., \hat{x}) \leq \psi(., \hat{x}) \\ \Rightarrow \underbrace{\int \varphi(\check{x}, \hat{x}) d\check{x}}_{=:\varphi_2(\hat{x})} &\leq \underbrace{\overline{\int} f(\check{x}, \hat{x})}_{=:f_2(\hat{x})} \leq \underbrace{\int \psi(\check{x}, \hat{x}) d\check{x}}_{=:\psi_2(\hat{x})} \end{aligned}$$

  Dann $\varphi_2(\hat{x}), \psi_2(\hat{x}) \in T(\mathbb{R}^{n-k})$ nach Satz 31.1.

$$\int_{\mathbb{R}^{n-k}} (\psi_2(\hat{x}) - \varphi_2(\hat{x})) d\hat{x} = \int (\psi(x) - \varphi(x)) dx < \varepsilon$$

  Aus Satz 32.3: $f_2 \in R(\mathbb{R}^{n-k})$. Außerdem:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-k}} f_2(\hat{x}) d\hat{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \psi \\ \int \varphi &\leq \int f \leq \int \psi \end{aligned}$$

  Damit:

$$\left| \int f_2(\hat{x}) d\hat{x} - \int f \right| < \int \psi - \int \varphi < \varepsilon$$

## 33.2 Folgerung: Berechnung von Integralen

Sei $f \in R(\mathbb{R}^n)$. Dann:

$$\int f(x)\, dx = \int_{x_n \in \mathbb{R}} \dots \int_{x_1 \in \mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

falls die Integrale existieren. Reihenfolge der Integration ist vertauschbar.

Beispiel:

1. Volumen eines abgeschnittenen Drehparaboloids

$$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$$

später: $B$ ist Jordan-messbar.

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(B) &= \int\int\int \mathbb{1}_B \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1-x^2-y^2} 1 \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy dx \\
&= 2 \cdot \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{4}{3} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \, dx \\
&= \frac{8}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \qquad x = \cos t \\
&= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot \sin t \, dt \\
&= \frac{8}{12} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos(2t) + \cos^2(2t)) \, dt \\
&= \frac{2}{3} \cdot (\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\pi
\end{aligned}$$

mit $sin^4 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$. Einfacher:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(B) &= \int\int \mathbb{1}_B(x,y,z) \, d(x,y) \, dz \\
&= \int_0^1 \int_{x^2+y^2 \leq 1-z} 1 \, d(x,y) \, dz \\
&= \int_0^1 \pi \cdot \sqrt{1-z^2} dz \\
&= \pi \cdot \left[ z - \frac{1}{2} \cdot z^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

### 33.3 Folgerung: Prinzip von Cavalieri

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Sei $1 \leq k \leq n-1$ und für alle $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$ seien

$$\begin{aligned}
A_{\hat{x}} &:= \{\check{x} \in \mathbb{R}^k | (\check{x}, \hat{x}) \in A\} \\
B_{\hat{x}} &:= \{\check{x} \in \mathbb{R}^k | (\check{x}, \hat{x}) \in B\}
\end{aligned}$$

Jordan-messbar und $\mathrm{vol}_k(A_{\hat{x}}) = \mathrm{vol}_k(B_{\hat{x}})$. Dann:

$$\mathrm{vol}_n(A) = \mathrm{vol}_n(B)$$

Beweis:

- Für $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$ gilt:

$$\mathbb{1}_A(., \hat{x}) = \mathbb{1}_{A_{\hat{x}}} \qquad \mathbb{1}_B(., \hat{x}) = \mathbb{1}_{B_{\hat{x}}}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Dann:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_n(A) &= \int \mathbb{1}_A(x)\,dx \\
&= \int_{\hat{x}\in\mathbb{R}^{n-k}} \int_{\check{x}\in\mathbb{R}^k} \underbrace{\mathbb{1}_A}_{\mathbb{1}_{A_{\hat{x}}}}(\check{x},\hat{x})d\check{x}\,d\hat{x} \\
&= \int_{\hat{x}} \mathrm{vol}_k(A_{\hat{x}})d\hat{x} \\
&= \int_{\hat{x}} \mathrm{vol}_k(B_{\hat{x}})d\hat{x} \\
&= \ldots = \mathrm{vol}_n(B)
\end{aligned}$$

### 33.4 Satz: Stetigkeit bei iterierten Integralen

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $1 \le k \le n-1$. Dann ist

$$[\hat{a}, \hat{b}] \ni \hat{x} \mapsto \int_{\check{x}\in[\check{a},\check{b}]} f(\check{x},\hat{x})d\check{x}$$

stetig.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$. (f gleichmäßig stetig)
- Für $\hat{x}, \hat{y} \in [\hat{a}, \hat{b}]$, $|\hat{x} - \hat{y}| < \delta$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{[\check{a},\check{b}]} f(\check{x},\hat{x})d\check{x} - \int_{[\check{a},\check{b}]} f(\check{x},\hat{y}) \right| &\le \int_{[\check{a},\check{b}]} \underbrace{|f(\check{x},\hat{x}) - f(\check{x},\hat{y})|}_{<\varepsilon} d\check{x} \\
&\le \varepsilon \cdot \mathrm{vol}_{n-k}[\check{a},\check{b}]
\end{aligned}$$

  da

$$|(\check{x},\hat{x}) - (\check{x},\hat{y})| = |\hat{x} - \hat{y}| < \delta$$

### 33.5 Satz: Jordan-Messbarkeit

Seien $f_1, f_2 \in R(\mathbb{R}^n)$, $f_1 \le f_2$. Dann ist

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} | f_1(x) < y < f_2(x)\}$$

Jordan-messbar,

$$\mathrm{vol}_{n+1}(B) = \int_{\mathbb{R}^n} (f_2(x) - f_1(x))\,dx$$

### 33.6 Hilfssatz: Jordan-Messbarkeit kartesisches Produkt

Seien $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $B \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ Jordan-messbar. Dann $A \times B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\varphi_1, \psi_1 \in T(\mathbb{R}^k)$ mit $0 \le \varphi_1 \le \mathbb{1}_A \le \psi_1 \le 1$ und $\int(\psi_1 - \varphi_1) < \varepsilon$. Entsprechend $\varphi_2, \psi_2$ zu B. Dann:

$$\begin{aligned}
\varphi(\check{x},\hat{x}) &:= \varphi_1(\check{x}) \cdot \varphi_2(\hat{x}) \\
\psi(\check{x},\hat{x}) &:= \psi_1(\check{x}) \cdot \psi_2(\hat{x})
\end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Dann $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^n)$,

$$\varphi(\check{x}, \hat{x}) \leq \underbrace{\mathbb{1}_A(\check{x}) \cdot \mathbb{1}_B(\hat{x})}_{\mathbb{1}_{A\times B}} \leq \psi(\check{x}, \hat{x})$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int (\psi(\check{x}, \hat{x}) - \varphi(\check{x}, \hat{x}))dx &= \int (\psi_1(\check{x}) - \varphi_1(\check{x})) \cdot \psi_2(\hat{x})dx + \int \varphi_1(\check{x}) \cdot (\psi_2(\hat{x}) - \varphi_2(\hat{x}))dx \\
&= \int (\psi_1(\check{x}) - \varphi_1(\check{x}))d\check{x} \cdot \int \psi_2(\hat{x})d\hat{x} \\
&\quad + \int \varphi_1(\check{x})d\check{x} \cdot \int (\psi_2(\hat{x}) - \varphi_2(\hat{x}))d\hat{x} \\
&\leq \varepsilon \cdot (\mathrm{vol}_{n-k}(B) + \varepsilon) + \mathrm{vol}_k(A) \cdot \varepsilon
\end{aligned}$$

Beweis zu Satz 33.5:

1. Sind $f_1, f_2 \in T(\mathbb{R}^n)$ so gilt die Behauptung:

   Es gibt Jordan-messbare Mengen $A_1, \ldots, A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A_j \cap A_i = \emptyset$ für $j \neq i$, sodass

   $$\begin{aligned}
   f_1 &= \sum_{j=1}^{k} c'_j \cdot \mathbb{1}_{A_j} \\
   f_2 &= \sum_{j=1}^{k} c''_j \cdot \mathbb{1}_{A_j}
   \end{aligned}$$

   (Beweis von Satz 31.3) Dann:

   $$B_j := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} | c'_j < y < c''_j, x \in A_j\} = A_j \times (c'_j, c''_j)$$

   Jordan-messbar nach Hilfssatz 33.6. Damit auch

   $$B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$$

   Jordan-messbar.

2. Allgemeiner Fall:

   Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2 \in T(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1 \leq f_1 \leq \psi_1$, $\varphi_2 \leq f_2 \leq \psi_2$, $\int(\psi_j - \varphi_j) < \varepsilon$ für j=1,2. Dann sind

   $$\begin{aligned}
   B_i &:= \{(x, y) | \psi_1(x) < y < \varphi_2(x)\} \\
   B_a &:= \{(x, y) | \varphi_1(x) < y < \psi_2(x)\}
   \end{aligned}$$

   Jordan-messbar nach 1. und $B_i \subseteq B \subseteq B_a$ (oder $\mathbb{1}_{B_i} \leq \mathbb{1}_B \leq \mathbb{1}_{B_a}$). Außerdem:

   $$\begin{aligned}
   \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (\mathbb{1}_{B_a} - \mathbb{1}_{B_i}) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\psi_2 - \varphi_1) - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_2 - \psi_1)^+}_{\geq \int(\varphi_2 - \psi_1)} \\
   &\leq \int ((\psi_2 - \varphi_1) - (\varphi_2 - \psi_1)) \\
   &= \int (\psi_2 - \varphi_2) + \int (\psi_1 - \varphi_1) \\
   &\leq 2\varepsilon
   \end{aligned}$$

   Damit $\mathbb{1}_B \in R(\mathbb{R}^n)$. Gleichheit: Satz von Fubini



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Bemerkungen:

1. $B_{\mathbb{R}^n}(0,1)$ ist Jordan-messbar: $f_1, f_2 \colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f_2(x) &:= \begin{cases} \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2} & x \in B_{\mathbb{R}^{n-1}}(0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ f_1(x) &:= -f_2(x) \end{aligned}$$

   Dann $B_{\mathbb{R}^n}(0,1) = B$ aus Satz 33.5.

2. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar $\Rightarrow \partial A$ Jordan-Nullmenge

   Beweis: Mit Aufgabe 71b) bzw. 74. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\varphi, \psi \in C_C(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \varphi \leq \mathbb{1}_A \leq \psi \leq 1$, $\int(\psi - \varphi) < \varepsilon$. Es gilt:

$$\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n | 0 < \varphi(x)\}}_{\text{offen}} \subseteq \underbrace{A}_{A^o \subseteq A \subseteq \bar{A}} \subseteq \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n | \psi(x) = 1\}}_{\text{abgeschlossen}}$$

   Also

$$\partial A \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n | \underbrace{\psi(x) = 1, \varphi(x) = 0}_{\psi(x) - \varphi(x) = 1}\}$$

   Damit $0 \leq \mathbb{1}_{\partial A} \leq (\psi - \varphi)$. Aus $\int(\psi - \varphi) < \varepsilon$ folgt die Behauptung.

3. Damit $B_{\mathbb{R}^n}[0,1] = B_{\mathbb{R}^n} \cup \partial B_{\mathbb{R}^n}(0,1)$ Jordan-messbar.

4. Sei $f \in R(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $f(. - a) \in R(\mathbb{R}^n)$,

$$\int f(x - a)\, dx = \int f(x)\, dx$$

   Für $r > 0$ ist $f(r.) \in R(\mathbb{R}^n)$,

$$\int f(r \cdot x)\, dx = \frac{1}{r^n} \int f(x)\, dx$$

   Klar für Treppenfunktionen, allgemein aus Konstruktion des Riemann-Integrals.

Beispiel:

1. Volumen von $B_{\mathbb{R}^n}(0,1) =: B_n$

$$\omega_n := \operatorname{vol}_n B_{\mathbb{R}^n}(0,1)$$

   Nach vorheriger Bemerkung:

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}_n B(\mathbb{R}^n) &= r^n \cdot \omega_n \\ \omega_1 &= 2 \end{aligned}$$

   Für $n > 1$:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \int_{B_n} 1\, dx \\ &= \int_{x_n=-1}^{1} \int_{|x_1,\ldots,x_{n-1}|^2 \leq 1 - x_n^2} 1\, d(x_1, \ldots, x_{n-1})\, dx_n \\ &= \int_{t=-1}^{1} \underbrace{\sqrt{1-t^2}^{n-1} \cdot \omega_{n-1}}_{\operatorname{vol}_n B_{n-1}(0, \sqrt{1-t^2})}\, dt \\ &= c_n \cdot \omega_{n-1} \end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

mit

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dt \qquad t = \cos x \\ &= \int_0^{\pi} \sin^n x\, dx \end{aligned}$$

Dann $c_0 = \pi$, $c_1 = 2$.

Für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^{\pi} \sin^n x\, dx \\ &= \underbrace{-\sin^{n-1} x\, dx \cdot \cos x|_0^{\pi}}_{0} + (n-1) \cdot \int_0^{\pi} \sin^{n-2} \cdot \cos^2 x\, dx \\ &= (n-1) \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^{n-2}\, dx}_{c_{n-2}} - (n-1) \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^n x\, dx}_{c_n} \\ \Rightarrow c_n &= \frac{n-1}{n} \cdot c_{n-2} \end{aligned}$$

Damit $c_2 = \frac{1}{2} c_0 = \frac{\pi}{2}$ und $\omega_2 = c_2 \cdot \omega_1 = \pi$. Es gilt:

$$\begin{aligned} c_n \cdot c_{n-1} &= \frac{n-1}{n} \cdot c_{n-1} \cdot c_{n-2} \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot c_{n-2} \cdot c_{n-3} \\ &= \ldots = \frac{1}{n} \cdot c_1 \cdot c_0 \\ &= \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

Für $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} \omega_n &= c_n \cdot \omega_{n-1} \\ &= c_n \cdot c_{n-1} \cdot \omega_{n-2} \\ &= \frac{2\pi}{n} \cdot \omega_{n-2} \end{aligned}$$

Also für $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \omega_{2k} &= \frac{2\pi}{2k} \cdot \omega_{2(k-1)} \\ &= \frac{\pi}{k} \cdot \frac{\pi}{k-1} \cdot \omega_{2(k-2)} \\ &= \frac{\pi^{k-1}}{k!} \cdot \omega_2 \\ &= \frac{\pi^k}{k!} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}!\right)} \\ w_{2k+1} &= \frac{2\pi}{2k+1} \cdot \omega_{2k+1} \\ &= \ldots = \frac{(2\pi)^k}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} \cdot \omega_1 \\ &= \frac{2^{k+1} \cdot \pi^k}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} \end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Einheitliche Schreibweise mit der Gamma-Funktion $\Gamma$:

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

für beliebige $n \geq 1$.

Bemerkung:

- Die Eulersche Gamma-Funktion ist

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt$$

für $x > 0$. Uneigentlich bei $\infty$ und für $x < 1$ auch bei 0. (Existiert bei 0, da $0 \leq t^{x-1} \cdot e^{-t} \leq t^{x-1}$; bei $\infty$, da $t^{x-1} \cdot e^{-\frac{t}{2}}$ beschränkt auf $(1, \infty)$ für alle $x > 0$.)

Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t}\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-t}\, dt \\
&= \lim_{R\to\infty} [-e^{-t}]_0^R = \lim_{R\to\infty} (1 - e^{-R}) = 1 \\
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x \cdot e^{-t}\, dt \\
&= \underbrace{-t^x \cdot e^{-t}|_0^\infty}_{0} + x \cdot \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt \\
&= x \cdot \Gamma(x)
\end{aligned}$$

für beliebige $x > 0$. Daher:

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \Gamma(n-1) \\
&= \ldots = n! \cdot \Gamma(1) = n!
\end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gerade:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \left(\frac{n}{2}\right)!$$

Außerdem $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (wird später bewiesen).

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t}\, dt \qquad t = \frac{1}{2}s^2 \\
&= \sqrt{2} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{s} \cdot e^{-\frac{1}{2}s^2} \cdot s\, ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds = \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Damit für $n = 2k+1$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}+1\right) &= \frac{2k+1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{2k-1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{2k-1}{2}\right) \\
&= \ldots = \frac{(2k+1)\cdots 3 \cdot 1}{2^{k+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Also:

$$\omega_{2k+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}+1\right)} \cdot \pi^k = \frac{\pi^{\frac{2k+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}+1\right)}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

dabei $w_n \to 0$ für $n \to \infty$. Genauer: Bestimmt man $r_n$ so, dass

$$\underbrace{\operatorname{vol}_n B_n(0,r)}_{r_n^n \cdot \omega_n} = 1$$

d.h.

$$r_n = \left(\frac{1}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\frac{1}{n}}$$

dann

$$\begin{aligned} r_n &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \cdot \sqrt{n} \\ \frac{r_n}{\sqrt{n}} &\to \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \end{aligned}$$

(Stirlingsche Formel)

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 34
# Transformationsformel

### 34.1 Satz: Urform der Transformationsformel

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Für alle $f \in C_C(V)$ gilt:

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\,dx$$

Bemerkungen:

1. Ist $f \in C_c(V)$, dann $f \circ \Phi \in C_c(U)$ ($\Leftrightarrow (f \circ \Phi)(x) \cdot |\det \Phi'(x)| \in C_c(U)$). Ist $Q \subseteq V$ ein n-dimensionales abgeschlossenes Intervall, dann ist i.a.

$$\mathbb{1}_Q \circ \Phi \notin T(\mathbb{R}^n)$$

   Beweis: Sei $K \subseteq V$. Dann K kompakt $\Leftrightarrow \Phi^{-1}(K)$ kompakt.

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}\{y \in V | f(y) \neq 0\} &= \{x \in U | f(\Phi(x)) \neq 0\} \text{ kompakt} \\
\overline{\Phi^{-1}\{y \in V | f(y) \neq 0\}} &= \overline{\Phi^{-1}\{y \in V | f(y) \neq 0\}} \\
&= \underbrace{\{x \in U | f(\Phi(x)) \neq 0\}}_{\operatorname{spt}(f \circ \Phi)}
\end{aligned}$$

2. Für n=1 folgt der Satz aus der Substitutionsregel: $\Phi\colon (a,b) \to (c,d)$ bijektiv, z.B. monoton fallend, und ein Diffeomorphismus.

$$\begin{aligned}
\int_{(c,d)} f(y)\,dy &= -\int_d^c f(y)\,dy \\
&= -\int_a^b f(\Phi(x)) \cdot \underbrace{\Phi'(x)}_{<0}\,dx \\
&= \int_a^b f(\Phi(x)) \cdot |\Phi'(x)|\,dx
\end{aligned}$$

3. Ist $a \in \mathbb{R}^n$, $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x - a$. Dann $\Phi'(x) = E_n, \det \Phi'(x) = 1$. Also

$$\int f(x-a)\,dx = \int f(y)\,dy$$

   Ist $r > 0$, $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto r \cdot x$. Dann $\Phi'(x) = r \cdot E_n$, $\det \Phi'(x) = r^n$. Also

$$r^n \cdot \int f(r \cdot x)\,dx = \int f(y)\,dy$$

4. $|\det \Phi'(x)|$ ist „Verzerrungsfaktor“.

Beweis: im nächsten Kapitel

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar (auf U), $f \in R(U)$, falls es eine kompakte Menge $K \subseteq U$ gibt, sodass $f|_{U\setminus K} = 0$ und $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Riemann-integrierbar.

$$\int_U f(x)\,dx := \int \tilde{f}(x)\,dx$$

### 34.2 Satz: Transformationsformel

Seien $U, V, \Phi$ wie in Satz 34.1. Dann gilt: Für $f \in R(V)$ ist $f \circ \Phi \cdot |\det \Phi'(x)| \in R(U)$ und

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\,dx$$

Beweis: Ende des Kapitels

Beispiele:

1. Polarkoordinaten

$$\Phi\colon \underbrace{(0,\infty) \times (-\pi,\pi)}_{U} \to \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty,0] \times \{0\})}_{V}$$
$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$$

ist Diffeomorphismus,

$$\det \Phi'(r,\varphi) = r$$

Berechnung von Schwerpunkt eines halben Kreisringes: $B$ ist Jordan-messbar,

$$x_s = \frac{\int_B x\,d(x,y)}{\mathrm{vol}_2(B)}$$

mit $\mathrm{vol}_2(B) = \frac{\pi}{2} \cdot (R^2 - R_1^2)$ und

$$\begin{aligned} \int_B x\,d(x,y) &= \int_V \mathbb{1}_B(x,y) \cdot x d(x,y) \\ &= \int_U \underbrace{\mathbb{1}_B(\Phi(r,\varphi))}_{\mathbb{1}_{\Phi^{-1}(B)}(r,\varphi)} \cdot r \cdot \cos\varphi \cdot r\,d(r,\varphi) \\ &= \int_{R_1<r<R} \int_{-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}} r^2 \cdot \cos\varphi d\varphi\,dr \\ &= \frac{2}{3} \cdot (R^3 - R_1^3) \end{aligned}$$

Damit:

$$x_s = \frac{\frac{2}{3} \cdot (R^3 - R_1^3)}{\frac{\pi}{2} \cdot (R^2 - R_1^2)} = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{R^3 - R_1^3}{R^2 - R_1^3}$$

Für $R_1 \to 0$: (Schwerpunkt Halbkreis, mit Polarkoordinaten nicht „direkt“ zugänglich)

$$x_2 = \frac{4}{3\pi} R \approx 0,4024R$$

Bemerkung: Für Polarkoordinaten ist $r \cdot d\varphi\,dr$ das „Flächenelement“.



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

2. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (und damit auch $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$)

Folgende Rechnung „naiv“:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) \\
&= \int_{r>0,-\pi<\varphi<\pi} e^{-r^2} \cdot r\, d(r,\varphi) \\
&= \int_{r>0} e^{-r^2} \cdot r\, dr \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \\
&= -\frac{1}{2} e^{-r^2}|_0^{\infty} \cdot 2\pi = \pi
\end{aligned}$$

Rechtfertigung dieser Schritte:

- Im 1.Schritt:
$$I_R := \int_{B[0,R]} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y)$$
für $R > 0$. Für $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < R$ definiere
$$S_k := \Phi([-\frac{1}{k}, R] \times [-\pi + \frac{1}{k}, \pi - \frac{1}{k}]) \subseteq B[0,R]$$
Dann
$$B[0,R] \setminus S_k \subseteq [-R, \frac{1}{k}] \times [-\max\{R \cdot \sin\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \max\{R \cdot \sin\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$$
damit
$$\mathrm{vol}_2\, B[0,R] \setminus S_k \leq 2 \cdot (R + \frac{1}{k}) \cdot \max\{R \cdot \sin\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \to 0 (k \to \infty)$$
Damit
$$I_R = \lim_{k\to\infty} \int_{S_k} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y)$$
Mit Transformationsformel:
$$\begin{aligned}
\int_{S_k} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) &= \int_{[\frac{1}{k},R]\times[-\pi+\frac{1}{k},\pi-\frac{1}{k}]} e^{-r^2} \cdot r\, d(r,\varphi) \\
&= \int_{r=\frac{1}{k}}^{R} e^{-r^2} \cdot r dr \cdot 2 \cdot (\pi - \frac{1}{k}) \\
&= \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right]_{\frac{1}{k}}^{R} \cdot 2(\pi - \frac{1}{k}) \\
&= (\pi - \frac{1}{k}) \cdot (e^{-\frac{1}{k^2}} - e^{-R^2}) \\
&\to \pi \cdot (1 - e^{-R^2}) \qquad (k \to \infty) \\
&= \int_{B[0,R]} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y)
\end{aligned}$$

- Außerdem:
$$\int_{\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, dx$$



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Es gibt $(R_n) \subseteq (1, \infty)$ mit $R_{n+1} \geq \sqrt{2} \cdot R_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Damit:

$$\begin{aligned}\int_{[-R_n,R_n]} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) &\leq \int_{B[0,R_{n+1}]} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) \\ &\leq \int_{[-R_{n+1},R_{n+1}]} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y)\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\left(\int_{-R_n}^{R_n} e^{-x^2}\, dx\right)^2 &= \int_{[-R_n,R_n]} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) \\ &\to \lim_{k\to\infty} \int_{B[0,R_n]} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) = \pi\end{aligned}$$

Also:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

3. Zylinderkoordinaten in $\mathbb{R}^3$, d.h. Polarkoordinaten in x-y-Ebene, z unverändert

$$\begin{aligned}\Phi\colon (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ \Phi(r,\varphi,\zeta) &= \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ \zeta \end{pmatrix} \\ dx\, dy\, dz &= r\, dr\, d\varphi\, d\zeta\end{aligned}$$

Berechnung des Volumens von

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}; 0 \leq |z| \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$$

Satz von Fubini:

$$\mathrm{vol}_3(B) = 2 \cdot \int_{B((\frac{1}{2},0),\frac{1}{2})} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, d(x,y)$$

Polarkoordinaten:

$$A := \{(r,\varphi) | -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \cos\varphi\}$$

Dann:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_3(B) &= 2 \cdot \int_A \sqrt{1 - r^2} \cdot r\, d(r,\varphi) \\ &= 2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\varphi} \sqrt{1 - r^2} \cdot r\, dr\, d\varphi \\ &= 2 \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-(1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right]_0^{\cos\varphi} d\varphi \\ &= \frac{2}{3} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - |\sin\varphi|^3) d\varphi \\ &= \frac{4}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\varphi) d\varphi \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{4}{3}\left[\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{8}{9} \approx 1,21\end{aligned}$$

Halbkugel ohne B hat das Volumen $\frac{8}{9}$.



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

4. Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\Phi\colon (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) &\to \mathbb{R}^3\setminus\{(x,y,z)|x\le 0, y=0\}\\
\Phi(r,\varphi,\vartheta) &= \begin{pmatrix} r\cdot\cos\varphi\cdot\cos\vartheta\\ r\cdot\cos\vartheta\cdot\sin\varphi\\ r\cdot\sin\vartheta\end{pmatrix}\\
\det\Phi'(r,\varphi,\vartheta) &= r^2\cdot\cos\vartheta\\
\Rightarrow r^2\cdot\cos\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta &= dx\,dy\,dz
\end{aligned}$$

Berechnung des Schwerpunktes der Halbkugel:

$$B := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; |(x,y,z)|\le 1, z\ge 0\}$$

Dann

$$z_2 = \frac{\int_b z\,d(x,y,z)}{\mathrm{vol}_3(B)}$$

mit $\mathrm{vol}_3(B) = \frac{2}{3}\pi$.

$$\begin{aligned}
\int_B z\,d(x,y,z) &= \int_{r=0}^{1}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=-\pi}^{\pi}(r\cdot\sin\vartheta)\cdot(r^2\cdot\cos\vartheta)\,d\varphi\,d\vartheta\,dr\\
&= 2\pi\cdot\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\,d\vartheta\underbrace{\int_{r=0}^{1}r^3\,dr}_{\frac{1}{4}}\\
&= \frac{1}{2}\pi\left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\pi
\end{aligned}$$

Also:

$$z_s = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{3}{2\pi} = \frac{3}{8}$$

### 34.3 Satz: Riemann-Integrierbarkeit auf $U\subseteq\mathbb{R}^n$

Sei $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U\to\mathbb{R}$, $\tilde{f}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, \tilde{f}|_U = f$, $\tilde{f}|_{\mathbb{R}^n\setminus U} = 0$.

1. Es gebe $K\subseteq U$ kompakt, sodass $f|_{U\setminus K} = 0$. Dann:

$$\begin{aligned}
\overline{\int}\tilde{f} &= \inf\{\int_U\psi(x)\,dx|\psi\in C_C(U),\psi\ge f\}\\
\underline{\int}\tilde{f} &= \sup\{\int_U\varphi(x)\,dx|\varphi\in C_C(U),\varphi\le f\}
\end{aligned}$$

2. $f\in R(U)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\,\exists\varphi,\psi\in C_C(U):\varphi\le f\le\psi, \int(\psi-\varphi)\le\varepsilon$

Beweis:

1. Bekannt für $U=\mathbb{R}^n$ (Aufgabe 74). Allgemein: Es gibt $\chi\in C_C(U)$ mit $0\le\chi\le 1, \chi|_K = 1$

$$\chi(x) = \max\{1-k\cdot\mathrm{dist}(x,K),0\}\qquad k\,\text{groß}$$

Klar:

$$\begin{aligned}
\overline{\int}\tilde{f} &= \inf\{\int\psi(x)\,dx;\psi\in C_C(\mathbb{R}^n)|\psi\ge\tilde{f}\}\\
&\le \inf\{\int\psi(x)\,dx;\psi\in C_C(U),\psi\ge\tilde{f}\}
\end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Sei $\psi \in C_C(\mathbb{R}^n)$, $\psi \geq \tilde{f}$. Dann $\psi^-, \chi \cdot \psi^+ \in C_C(U)$, $f \leq \chi \cdot \psi^+ - \psi^-$.

$$\int \psi(x)\,dx = \underbrace{\int (1-\chi)\cdot\psi^+}_{\geq 0} + \int (\chi\cdot\psi^+ - \psi^-) \geq \int \chi\cdot\psi^+ - \psi^-$$

Damit „$\geq$“.

2. Klar mit 1.

### 34.4 Beweis: Satz 34.2

- Sei $f \in R(V)$. Für $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi \in C_c(V) \Leftrightarrow \varphi \circ \Phi \in C_c(U)$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\underline{\int_V} f(x)\,dx &= \sup\{\int_V \varphi(y)\,dy; \varphi \in C_c(V), \varphi \leq f\} \\
&\overset{34.1}{=} \sup\{\int \varphi\circ\Phi(x)\cdot|\det\Phi'(x)|\,dx; \varphi \in C_c(V), \varphi \leq f\} \\
&= \sup\{\int \tilde{\varphi}\,dx; \tilde{\varphi} \in C_c(U), \tilde{\varphi} \leq f\circ\Phi\cdot|\det\Phi'(x)|\} \\
&= \underline{\int_U} f\circ\Phi(x)\cdot|\det\Phi'(x)|\,dx
\end{aligned}$$

Entsprechend für Oberintegral:

$$\overline{\int_V} f(y)\,dy = \ldots = \overline{\int_U} f\circ\Phi(x)\cdot|\det\Phi'(x)|\,dx$$

Wegen $\underline{\int}_V f = \overline{\int}_V f$ folgt Gleichheit der rechten Seiten, also $f\circ\Phi\cdot|\det\Phi'(x)| \in R(U)$ und

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U (f\circ\Phi)(x)\cdot|\det\Phi'(x)|\,dx$$



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 35 Beweis der Transformationsformel

Bemerkungen:

1. Besonders einfacher Diffeomorphismus $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: Vertauschung von Koordinaten ($\pi$ ... Permutation von $\{1,\dots,n\}$, $x = (x_1,\dots,x_n) \mapsto (x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)})$). Jede Spalte und jede Zeile der Darstellungsmatrix enthält genau eine 1. Dafür Transformationsformel klar, zunächst für Treppenfunktionen, dann auch für $R(\mathbb{R}^n)$, insbesondere für $C_c(\mathbb{R}^n)$.

2. $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear, $x \mapsto A \cdot x$ mit

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix}$$

   mit $B \in \mathbb{R}^{k\times k}, C \in \mathbb{R}^{k\times n-k}$ beliebig und Satz 34.1 für k bewiesen, dann auch für A (s.u. für Beispiel).

   Beispiel: $n = 2$, $k = 1$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \int f(A\cdot x)\cdot|\det A| &\overset{SvF}{=} \int_{x_2}\int_{x_1} f(x_1+x_2,x_2)\,dx_1\,dx_2 \\ &= \int_{x_2}\int_{y_1} f(y_1,x_2)\,dy_1\,dx_2 \\ &= \int f(y)\,dy \end{aligned}$$

3. Mit 1. und 2. und geeigneter Zerlegung von beliebiger Matrix A, kann man die Transformationsformel für beliebige linear Abbildungen $\Phi$ zeigen. Allgemeines $\Phi$ durch lokale Approximation.

### 35.1 Hilfssatz: Transformationsformel auf Produkt von Diffeomorphismen

Seien $U, V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi\colon U \to W, \psi\colon W \to V$ Diffeomorphismen, für die die Transformationsformel gilt. Dann gilt sie auch für $\psi \circ \Phi\colon U \to V$.

Beweis:

- Sei $f \in C_C(V)$. Dann:

$$\begin{aligned} (\psi\circ\Phi)'(x) &= \psi'(\Phi(x))\cdot\Phi'(x) \\ \det(\psi\circ\Phi)'(x) &= \det\psi'(\Phi(x))\cdot\det\Phi'(x) \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}\int f(\psi\circ\Phi)(x)\cdot|\det(\psi\circ\Phi)'(x)|\,dx &= \int_U f\circ\psi(\Phi(x))\cdot|\det\psi'(\Phi(x))|\cdot|\det\Phi'(x)|\,dx\\ &= \int_W f\circ\psi(z)\cdot|\det\psi'(z)|\,dz\\ &= \int_V f(y)\,dy\end{aligned}$$

### 35.2 Hilfssatz: Induktion

Seien Voraussetzungen wie in Satz 34.1. Außerdem sei $1 \leq k \leq n-1$ und die Gültigkeit der Transformationsformel für k anstatt von n sei vorausgesetzt und sei $\Phi$ in der Form

$$\Phi(\check{x},\hat{x}) = \begin{pmatrix}\check{\Phi}(\check{x},\hat{x})\\ \hat{x}\end{pmatrix}$$

mit $\check{\Phi}\colon U \to \mathbb{R}^k$. Dann gilt die Behauptung von Satz 34.1

Beweis:

- Für $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$ seien

$$\begin{aligned}U_{\hat{x}} &:= \{\check{x}; (\check{x},\hat{x}) \in U\}\\ V_{\hat{x}} &:= \{\check{x}; (\check{x},\hat{x}) \in V\}\end{aligned}$$

  Dann ist $\check{\Phi}(\cdot,\hat{x})\colon U_{\hat{x}} \to V_{\hat{x}}$ ein Diffeomorphismus.

- Sei $f \in C_C(V)$. Dann:

$$\begin{aligned}\int_V f(y)\,dy &= \int_{\hat{y}\in\mathbb{R}^{n-k}}\int_{\check{y}\in V_{\hat{y}}} f(\check{y},\hat{y})\,d\check{y}\,d\hat{y}\\ &= \int_{\hat{x}\in\mathbb{R}^{n-k}}\int_{U_{\hat{x}}} f(\check{\Phi}(\check{x},\hat{x}),\hat{x})\cdot\left|\det\frac{\partial\check{\Phi}(\check{x},\hat{x})}{\partial\check{x}}\right|\,d\check{x}\,d\hat{x}\\ &= \int_{\hat{x}\in\mathbb{R}^{n-k}}\int_{\check{x}\in U_{\hat{x}}} f(\Phi(\check{x},\hat{x}))\cdot|\det\Phi'(\check{x},\hat{x})|\,d\check{x}\,d\hat{x}\\ &= \int_U f(\Phi(x))\cdot|\det\Phi'(x)|\,dx\end{aligned}$$

  da

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix}\frac{\partial\check{\Phi}(\check{x},\hat{x})}{\partial\check{x}} & & & & \frac{\partial\check{\Phi}(\check{x},\hat{x})}{\partial\hat{x}} & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & & 0\\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & 1\end{pmatrix}$$

Bemerkung:

- Entsprechend folgert man wie in Hilfssatz 35.2 die Aussage für

$$\Phi(\check{x},\hat{x}) = \begin{pmatrix}\check{x}\\ \hat{\Phi}(\check{x},\hat{x})\end{pmatrix}$$

### 35.3 Satz: Zerlegung des Diffeomorphismus

Seien U,V wie in Satz 34.1, $a \in U$, $b := \Phi(a)$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_a \subseteq U$ von a, eine offene Umgebung $W \subseteq \mathbb{R}^n$ und Diffeomorphismen $\Psi\colon U_a \to W$, $\tilde{\Psi}\colon W \to V_b := \Phi(U_a)$ von der Form wie in Hilfssatz 35.2, sodass $\Phi|_{U_a} = \tilde{\Psi}\circ\Psi$ gilt.

Beweis:



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Sei $1 \leq k \leq n-1$. Die Zeilen von $\Phi'(a)$ sind linear unabhängig, also auch die oberen k Zeilen. Nach Permutation der Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} & & \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

  hat linear unabhängige Spalten.

- Die Abbildung $\Psi\colon U \to \mathbb{R}^n$,

$$\Psi(x) := \begin{pmatrix} \check{\Phi}(x) \\ \hat{x} \end{pmatrix}$$

  hat in $a$ die Ableitung

$$\Psi'(a) = \begin{pmatrix} \check{\Phi}'(a) & \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix}$$

  Diese ist invertierbar (Spalten sind linear unabhängig). Nach Satz von der lokalen Invertierbarkeit gibt es eine offene Umgebung $U_a$ von $a$ und eine offene Umgebung $W \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass $\Psi\colon U_a \to W$ ein Diffeomorphismus ist.

- Sei

$$\tilde{\Psi} := \Phi \circ \Psi^{-1}\colon W \to V_b$$

  (ist Diffeomorphismus) und von der Form

$$\tilde{\Psi}(z) = \begin{pmatrix} \check{z} \\ \hat{\tilde{\Psi}}(z) \end{pmatrix}$$

  Zu $z \in W$ und $y := \tilde{\Psi}(z) \in V_b$ gibt es $x \in U_a$ mit

$$\begin{aligned} z &= \Psi(x) = \begin{pmatrix} \check{\Phi}(x) \\ \hat{x} \end{pmatrix} \\ y &= \Phi(x) = \begin{pmatrix} \check{\Phi}(x) \\ \hat{\Phi}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  d.h. $\check{y} = \check{\Phi}(x) = \check{z}$.

### 35.4 Satz: Partition der Eins (leichte Form)

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $K \subseteq V$ kompakt, $m \in \mathbb{N}$, $(V_j)_{j=1,\ldots,m}$ eine offene Überdeckung von K mit $V_j \subseteq V$ offen. Dann gibt es $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in C_C(V)$ mit $0 \leq \varphi_j \leq 1$, $\operatorname{spt} \varphi_j \subseteq V_j$ für $j = 1, \ldots, m$ und

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_j = 1$$

für alle $x \in K$. (Die Familie $(\varphi_j)_{j=1,\ldots,m}$ heißt der Überdeckung $(V_j)$ untergeordnete Partition der Eins.)

Beweis:

- Für alle $x \in K$ gibt es $j \in \{1, \ldots, m\}$ und $r_x > 0$, sodass $B(x, 2r_x) \subseteq V_j$. Wegen Kompaktheit von K besitzt die offene Überdeckung $(B(x, r_x))_{x \in K}$ von K eine endliche Teilüberdeckung $(B(x_k, r_{x_k}))_{k=1,\ldots,p}$. Für $1 \leq j \leq m$ setze

$$K_j := \bigcup_{k \in \{1,\ldots,p\} : B(x_k, 2r_{x_k}) \subseteq V_j} B[x_k, r_{x_k}] \cap K$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

Dann $K_j$ kompakt, $K_j \subseteq V_j$ für $j = 1, \ldots, m$ und $\bigcup_{j=1}^m K_j = K$. Für $1 \leq j \leq m$ findet man $\psi_j \in C_C(V)$ mit $\operatorname{spt} \psi_j \subseteq V_j$, $0 \leq \psi_j \leq 1$ und $\psi_j(x) = 1$ für alle $x \in K_j$ (Vgl. § 34). Definiere

$$\psi_0(x) := d(x, K) \qquad (x \in V)$$

Dann ist $\psi$,

$$\psi := \sum_{j=0}^m \psi_j(x)$$

eine stetige Funktion $\psi \colon V \to (0, \infty)$

$$\varphi_j := \frac{\psi_j}{\psi} \qquad j = 1, \ldots, m$$

haben die behaupteten Eigenschaften.

### 35.5 Beweis: Satz 34.1

- Gemäß Induktionsvoraussetzung gilt die Transformationsformel für $k$ mit $1 \leq k \leq n-1$.
- Für $b \in V$ sei $V_b$ gemäß Satz 35.3 bestimmt (also gilt die Transformationsformel für $U_a$, $V_b$, $\Phi$ wobei $\Phi(a) = b$).
- Sei $f \in C_C(V)$. Zu $K := \operatorname{spt} f$ gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(V_{b_1}, \ldots, V_{b_m})$ der offenen Überdeckung $(V_b)_{b \in V}$. Definiere $a_j := \Phi^{-1}(b_j)$ und $U_{a_j} := \Phi^{-1}(V_{b_j})$ für $j = 1, \ldots, m$.
- Zu $(V_{b_1}, \ldots, V_{b_m})$ wähle $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ wie in Satz 35.3. Dann:

$$\begin{aligned}
\int_V f(y)\,dy &= \int_V \sum_{j=1}^m \varphi_j(y) \cdot f(y)\,dy \\
&= \sum_{j=1}^m \int_{V_{b_j}} \varphi_j(y) \cdot f(y)\,dy \\
&= \sum_{j=1}^m \int_{U_{a_j}} \varphi_j(\Phi(x)) \cdot f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\,dx \\
&= \int_U \underbrace{\sum_{j=1}^m \varphi_j(\Phi(x))}_{1 \text{für } x : f(\Phi(x)) \neq 0} \cdot f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\,dx \\
&= \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\,dx
\end{aligned}$$

Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

# 36
# Fourier-Reihen

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt periodisch mit Periode $2\pi$
$$:\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : f(x+2\pi) = f(x)$$
Dann ist $f$ schon bestimmt durch $f|_{[0,2\pi]}$ bzw. $f|_{[-\pi,\pi]}$.
- Beispiele: $\sin x$, $\cos x$, $\sin(n \cdot x)$, $\cos(n \cdot x)$
- Ziel: $2\pi$-periodische Funktionen als Fourier-Reihe
$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n \cdot x + b_n \cdot \sin n \cdot x)$$
darzustellen, für möglichst allgemeine Funktionen; Reihen der Form
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i \cdot nx} \qquad (c_n \in \mathbb{C})$$
- Entsprechungen:
$$\begin{aligned} a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx &= c_n \cdot e^{i \cdot nx} + c_{-n} \cdot e^{-i \cdot nx} \\ &= c_n \cdot (\cos nx + i \cdot \sin nx) + c_{-n} \cdot (\cos nx - i \cdot \sin nx) \end{aligned}$$
mit
$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= i \cdot (c_n - c_{-n}) \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$
- Bemerkungen: Integration komplexer Funktionen
  1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt Riemann-Integrierbar $:\Leftrightarrow$ Re(f) und Im(f) Riemann-Integrierbar
  $$\int f(x)\,dx \quad := \quad \int \Re(f)\,dx + i \cdot \int \Im(f)\,dx$$
  $f \mapsto \int f(x)\,dx$ ist $\mathbb{C}$-linear:
  - Additivität: Klar
  $$\int (f+g)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$
  - Homogenität: Sei $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda = \lambda_1 + i \cdot \lambda_2$ und $f = f_1 + i \cdot f_2$.
  $$\begin{aligned} \int (\lambda \cdot f)\,dx &= \int (\lambda_1 \cdot f_1 - \lambda_2 \cdot f_2 + i \cdot (\lambda_1 \cdot f_2 + \lambda_2 \cdot f_1))\,dx \\ &= \int (\lambda_1 \cdot f_1 - \lambda_2 \cdot f_2)\,dx + i \cdot \int (\lambda_1 \cdot f_2 + \lambda_2 \cdot f_1)\,dx \\ &= \lambda_1 \cdot \int f_1\,dx - \lambda_2 \cdot \int f_2\,dx + i \cdot (\lambda_1 \cdot \int f_2\,dx + \lambda_2 \cdot \int f_1\,dx) \\ &= (\lambda_1 + i \cdot \lambda_2) \cdot \left( \int f_1\,dx + i \cdot \int f_2\,dx \right) \\ &= \lambda \cdot \int f\,dx \end{aligned}$$

2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Riemann-Integrierbar $\Rightarrow |f|$ ist Riemann-Integrierbar

   Beweis:

   (a) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann $g \in R(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \psi, \varphi \in T(\mathbb{R}) : |g - \varphi| \leq \psi, \int \psi \leq \varepsilon$

   „$\Rightarrow$“ Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $\varphi_1, \varphi_2 \in T(\mathbb{R})$ mit $\varphi_1 \leq g \leq \varphi_2$, sodass $\int(\varphi_2 - \varphi_1) < \varepsilon$. Dann $\varphi := \varphi_1$ und $\psi := \varphi_2 - \varphi_1$.

   „$\Leftarrow$“ Seien $\psi, \varphi$ wie vorausgesetzt. Dann $\varphi_1 := \varphi - \psi$ und $\varphi_2 := \varphi + \psi$.

   (b) Seien $f = f_1 + i \cdot f_2$ Riemann-Integrierbar und $\varepsilon > 0$. Es existieren $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in T(\mathbb{R})$, sodass
   $$|f_1 - \varphi_1| \leq \psi_1 \qquad |f_2 - \varphi_2| \leq \psi_2$$
   Dann $|\varphi_1 + i \cdot \varphi_2| =: |\varphi| \in T(\mathbb{R})$ und
   $$\begin{aligned} ||f| - |\varphi|| &\leq |f - \varphi| \leq |f_1 - \varphi_1| + |f_2 - \varphi_2| \\ &\leq \psi_1 + \psi_2 \\ \Rightarrow \int (\psi_2 + \psi_1) &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

3. Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Riemann-Integrierbar:
   $$\left| \int f(x)\, dx \right| \leq \int |f(x)|\, dx$$
   Beweis: Es gibt $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| = 1$:
   $$\left| \int f(x)\, dx \right| = \gamma \cdot \int f(x)\, dx$$
   Dann:
   $$\begin{aligned} \left| \int f(x)\, dx \right| &= \gamma \cdot \int f(x)\, dx \\ &= \int \gamma \cdot f(x)\, dx \\ &= \Re\left( \int \gamma \cdot f(x)\, dx \right) \\ &= \int \underbrace{\Re(\gamma \cdot f)}_{\leq |\gamma \cdot f| = |f|}\, dx \\ &\leq \int |f(x)|\, dx \end{aligned}$$

4. Hauptsatz gilt
5. Im Folgenden $\varphi_n(x) := e^{i \cdot nx}$

## 36.1 Hilfssatz: Orthogonalitätsrelation

1. Orthogonalitätsrelationen:
   $$\int_0^{2\pi} \varphi_n \cdot \overline{\varphi_m}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 2\pi & \text{für } n = m \end{cases}$$



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

2. Ist $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in $\mathbb{C}$, $\sum_n |c_n| < \infty$,

$$f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot \varphi_n(x)$$

dann ist $f$ stetig, $2\pi$-periodisch,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot e^{-inx}\,dx$$

Beweis:

1. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{inx}\cdot e^{-imx}\,dx &= \int_0^{2\pi} e^{ix(m-n)}\,dx \\
&= \begin{cases} [x]_0^{2\pi} & m = n \\ [\sin(x\cdot(m-n)) - i\cdot\cos(x\cdot(m-n))]_0^{2\pi} & m \neq n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2\pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Stetigkeit mit Kapitel 20, Formel:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} f(x)\cdot e^{-inx}\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\cdot\varphi_m(x)}_{=:C}\cdot e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{N\to\infty}\sum_{m=-N}^{N} c_m\cdot\varphi_m(x)\cdot e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{m=-N}^{N} c_m\cdot\int_0^{2\pi} e^{imx}\cdot e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\underbrace{\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} e^{imx}\cdot e^{-inx}\,dx}_{2\pi\cdot\delta_{mn}}\,c_m \\
&= c_n
\end{aligned}$$

da C gleichmäßig konvergent auf $[0, 2\pi]$.

Definition:

- Ist $f\colon [0,2\pi]\to\mathbb{C}$ Riemann-integrierbar, so heißen

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot e^{-inx}\,dx$$

die Fourier-Koeffizienten von $f$ und

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\cdot\varphi_n$$

heißt Fourier-Reihe von f.

Bemerkung zu reellen Fourier-Reihen:



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Sei $f \in R[0, 2\pi]$, $f$ reell-wertig. Dann sind

$$\begin{aligned} a_n(f) &:= c_n(f) + c_{-n}(f) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos(nx)\,dx \\ b_n(f) &:= i\cdot(c_n(f) - c_{-n}(f)) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(nx)\,dx \end{aligned}$$

  reell für $n \in \mathbb{N}$ und

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

  reell.

Beispiel:

1. Sei

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0, x = \pm\pi \\ 1 & \text{für } 0 < x < \pi \end{cases}$$

   $f$ ungerade, deshalb alle $a_n(f) = 0$. Aus

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\cdot dx \\ &= \frac{2}{\pi\cdot n}\cdot[-\cos(nx)]_0^{\pi} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{n gerade} \\ \dfrac{4}{\pi\cdot n} & \text{n ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

   ergibt sich die Fourier-Reihe:

$$\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)\cdot x)}{2n+1}$$

### 36.2 Satz: Dirichlet-Kerne

Sei $f \in R[0, 2\pi]$. Für die Partialsummen

$$s_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\cdot\varphi_k$$

gilt die Darstellung

$$s_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\cdot D_n(y)\,dy$$

mit den Dirichlet-Kernen

$$D_n(y) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\cdot y}{\sin\frac{y}{2}}$$

wobei $D_n(2\pi m) = 2n+1$. Beweis:



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\cdot e^{ikx} &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_0^{2\pi} f(y)\cdot e^{-iky}\,dy\cdot e^{ikx}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\cdot\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\cdot(x-y)}\,dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{x-2\pi}^{x} f(x-y)\cdot\sum_{k=-n}^{n} e^{iky}\,dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\cdot D_n(y)\,dy
\end{aligned}$$

  mit

$$\begin{aligned}
D_n(y) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{iky}\\
&= \frac{e^{i\cdot(n+1)\cdot y}-e^{-iny}}{e^{iy}-1}\cdot\frac{e^{-i\frac{1}{2}y}}{e^{-i\frac{1}{2}y}}\\
&= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot y}{\sin\frac{y}{2}}
\end{aligned}$$

  mit $D_n(2\pi m) = 2n+1$.

Bemerkung:

- $f$ stetig und $2\pi$-periodisch $\not\Rightarrow$ $s_n(f)\to f$ gleichmäßig

### 36.3 Satz: Cesàro-Mittel

Sei $f\in R[0,2\pi]$. Für die Cesàro-Mittel

$$\sigma_n(f) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(f)$$

gilt die Darstellung

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\cdot K_n(y)\,dy$$

mit den Fejér-Kernen

$$K_n(y) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2$$

Beweis:

- Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{2\pi} f(x-y)\cdot D_k(y)\,dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\cdot K_n(y)\,dy
\end{aligned}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

mit

$$\begin{aligned}
K_n(y) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(y) \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{e^{iy}-1}\cdot\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i(k+1)\cdot y} - \sum_{k=0}^{n} e^{-iky}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{(e^{iy}-1)^2}\cdot(e^{i(n+2)\cdot y} - 2e^{iy} + e^{-iny}) \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{e^{i\frac{n+1}{2}y} - e^{-i\frac{n+1}{2}y}}{e^{i\frac{y}{2}} - e^{-i\frac{y}{2}}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}y)}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2
\end{aligned}$$

Für $y = 2\pi m$:

$$K_n(2\pi m) = n+1$$

### 36.4 Satz von Fejér

Sei $f$ $2\pi$-periodisch und stetig. Dann

$$\sigma_n(f)(x) \to f(x)$$

gleichmäßig für $x \in \mathbb{R}$.

Beweis:

- Eigenschaften von $K_n$:
  1. $K_n(y) \geq 0$
  2. Es gilt:
  $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(y)\,dy = 1$$
  denn:
  $$\begin{aligned}
  \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(y)\,dy &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{iky}\,dy \\
  &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,dx = 1
  \end{aligned}$$
  Damit:
  $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(y)\,dy = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_k(y)\,dy = 1$$
  3. Für $\delta > 0$ gilt:
  $$\sup_{\delta\leq|y|\leq\pi} K_n(y) \to 0 \qquad (n\to\infty)$$
  Klar, da $|\sin\frac{y}{2}| \geq \sin\frac{\delta}{2}$.
- Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\delta > 0$, sodass
  $$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

für $|x-y| \leq \delta$ (f gleichmäßig stetig).

$$\begin{aligned}
|f(x) - \sigma_n(f)(x)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-y)) \cdot K_n(y)\,dy\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-y)| \cdot K_n(y)\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|f(x) - f(x-y)|}_{\leq\varepsilon} K_n(y)\,dy + \\
&\quad \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi} \underbrace{|f(x) - f(x-y)|}_{\leq 2\|f\|_{[-\pi,\pi]}} K_n(y)\,dy \\
&\leq \varepsilon + 2\cdot\|f\|_{[-\pi,\pi]} \cdot \sup_{\delta\leq|y|\leq\pi} K_n(y) \\
&\leq 2\varepsilon \text{ für n groß}
\end{aligned}$$

- Insbesondere: $f$ stetig, $2\pi$-periodisch $\Rightarrow$ $f$ gleichmäßig approximierbar für n groß durch trigonometrische Polynome (= Lin $\{\varphi_n, n \in \mathbb{Z}\}$).

### 36.5 Satz: Approxiomationssatz von Weierstraß

Sei $\varepsilon > 0$, $-\infty < a < b < \infty$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gibt es ein Polynom p mit

$$\|f - p\|_{[a,b]} \leq \varepsilon$$

Beweisskizze:

- o.E.: $[a,b] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Idee: Ergänze $f$ stetig, $2\pi$-periodisch. Approximiere $f$ durch trigonometrische Polynome $\varphi$. Entwickle $\varphi$ in Potenzreihe; abbrechen.
- alternativ: *operatornameabs* ist durch Polynome gleichmäßig approximierbar. Unterteile $f$ in Streckenzüge. Streckenzüge durch Linearkombination von abs approximieren.

Bemerkung:

- I.a. $s_n(f) \not\Rightarrow f$ gleichmäßig, wenn $f$ stetig

#### 36.5.1 2-Norm

Für $f \in R[0, 2\pi]$ sei

$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

die 2-Norm.

Bemerkungen:

1. $\|\lambda \cdot f\|_2 = |\lambda| \cdot \|f\|_2$ (Klar)
2. Für $f, g \in R[0, 2\pi]$:

   $$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \overline{g(x)}\,dx$$

   (Skalarprodukt). Dann:

   $$|(f|g)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

   (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

   Beweis:



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

- Sei $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| = 1$, sodass
$$|(f|g)| = \gamma \cdot (f|g)$$
Sind $\|f\|_2, \|g\|_2 \leq 1$, dann
$$0 \leq \|\gamma \cdot f - g\|_2^2 = (\gamma \cdot f - g|\gamma \cdot f - g)$$
Damit:
$$\begin{aligned}(\gamma \cdot f - g|\gamma \cdot f - g) &= \|\gamma \cdot f\|_2^2 - \underbrace{(g|\gamma \cdot f)}_{=|(f|g)|} - \underbrace{(\gamma \cdot f|g)}_{=|(f|g)|} + \|g\|_2^2 \\ &= \|f\|_2^2 - 2 \cdot |(f|g)| + \|g\|_2^2 \\ \Rightarrow |(f|g)| &\leq 1\end{aligned}$$
- Sind $\alpha, \beta > 0$, $\|f\|_2^2 \leq \alpha$, $\|g\|_2 \leq \beta$, dann
$$\begin{aligned}1 &\geq \left|\left(\frac{1}{\alpha} f | \frac{1}{\beta} g\right)\right| = \frac{1}{\alpha \cdot \beta} \cdot |(f|g)| \\ \Rightarrow |(f|g)| &\leq \alpha \cdot \beta\end{aligned}$$

3. Dreiecksungleichung:
$$\begin{aligned}\|f + g\|_2^2 &= (f + g|f + g) \\ &\leq (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2\end{aligned}$$

4. $\|f\|_2 = 0 \not\Rightarrow f = 0$

   Beispiel: $\mathbb{1}_{\{1\}}$

5. Mit $(\cdot|\cdot)$:
$$(\varphi_n|\varphi_m) = \delta_{mn}$$
   $(\varphi_n)$ ist „Orthonormalsystem“.

### 36.6 Hilfssatz

Für $f \in R[0, 2\pi]$, $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$$\left\| f - \sum_{j=-n}^{n} c_j(f) \cdot \varphi_j \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{j=-n}^{n} |c_j(f)|^2$$
mit $c_j(f) = (f|\varphi_j)$.

Beweis: nachrechnen

### 36.7 Hilfssatz

Sei $f \in R[0, 2\pi]$, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $g$ stetig, $2\pi$-periodisch mit $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$.

### 36.8 Satz: Parsevalsche Gleichung

Sei $f \in R[0, 2\pi]$. Dann:
$$\left\| f - \underbrace{\sum_{j=-n}^{n} c_j(f) \cdot \varphi_j}_{s_n(f)} \right\|_2 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$
$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j(f)|^2$$



Vorlesung: “Analysis I/II” von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01

(Parsevalsche Gleichung)

Beweisidee:

- wahr, falls $f$ trigonometrisches Polynom
- $f$ approximierbar durch trigonometrisches Polynom (36.7)
- $\varepsilon/3$-Argument
- 2. Teil klar mit HS 36.6

Beispiele:

1. Sei
$$f(x) := \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = 0, x = \pm\pi \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$
Dann:
$$c_j(f) = \begin{cases} 0 & \text{j gerade} \\ \dfrac{2}{i\pi j} & \text{j ungerade} \end{cases}$$
Parsevalsche Gleichung:
$$\begin{aligned} 1 = \|f\|_2^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^2}{\pi^2 \cdot (2n+1)^2} \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$
Daraus:
$$s := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
mit
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \\ &= s - \frac{1}{4}s = \frac{3}{4}s \\ \Rightarrow s &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$
Auch
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

2. Setze $f(x) = (x-\pi)^2$. Dann:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$



Vorlesung: "Analysis I/II" von Jürgen Voigt, Technische Universität Dresden, Wintersemester 2008, Sommersemester 2009; Version: 2022-12-01