DGEO Wintersemester 2019 alpha version, ohne Gewähr

Dozent: Satz: Version:

Compiled on 1. November 2019.

Inhaltsverzeichnis

Meta-Infos

Übungen flexibel

Skript

myfsr.de

- Skripte
- ganz unten

- Typos und Fehler gerne und bitte an Benedikt Bartsch. E-Mail-Adresse siehe:
    - https://myfsr.de/dokuwiki/doku.php?id=fsr:mitglieder

Forum

physik.protagon.space

Literatur

Walschap: Metric Structures in Differential Geometry

Spivac: Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol. I

Ben Andrews: Lectures on Differential Geometry

math-people.anu.edu.au/~andrews/DG

Begriff Differentialgeometrie

Sie studiert Mannigfaltigkeiten. Mannigfaltigkeiten ist die Abstraktion einer (Hyper-)Fläche in $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

TODO Bildchen 1

TODO Bildchen 2

Auf $U \cap V$ haben wir zwei Abbildungen:

$$\begin{tikzcd}
 & U \cap V \arrow[dl, "X"'] \arrow[dr, "Y"] & \\
\underbrace{X(U \cap V)}_{\subseteq \mathbb{R}^2} \arrow[rr, "Y \circ X^{-1}"] & & \underbrace{Y(U \cap V)}_{\subseteq \mathbb{R}^2}
\end{tikzcd}$$

Problem: bekannte Dinge aus der Analysis hängen meist von Koordinatensystemen ab.

Frage: Welche Größen sind koordinatenunabhängig?

Tangentialvektoren in $\mathbb{R}^n$

Notation

- n, $m \in \mathbb{N}$ seien ab jetzt natürliche Zahlen
- Alle Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ werden ab jetzt glatt vorrausgesetzt
- $f\colon U \to V$
    -

$$D_x f = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right] \leftarrow \text{Matrix}$$

–

$$Df = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] \in M_{m\times n}(C^\infty(U))$$

TODO Bildchen 3

naive Vorstellung: ein Tangentialvektor an $p \in \mathbb{R}^n$ ist ein (gewähltes) Element $\xi \in \mathbb{R}^n$

Alle möglichen Tangentialvektoren an allen Punkten sind dann identifiziert mit

$$T\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (p, \xi)$$

$\leftarrow$ Koordinatentransformation ändert Einträge

Basiswechselmatrix:

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}} \\ \uparrow & \uparrow \\ f_1 & f_2 \end{array}$$

(in E-Koordinatensystem)

$\Rightarrow$

$$(B^{-1}\cdot p, B^{-1}\cdot \xi) = (p', \xi')$$

$\leftarrow$ Koordinaten von (p, ξ) in $\mathcal{F}$-Koordinatensystem.

TODO Bildchen 4

$$(p, \xi) \in T\mathbb{R}^n, \quad \varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Richtungsableitung

$$\underbrace{\partial_\xi \varphi}_{\text{Richtungsableitung}} := \underbrace{D_p\varphi}_{\text{Zeile}} \cdot \underbrace{\xi}_{\text{Spalte}} = D_p\varphi(\xi) \in \mathbb{R}$$

Idee: benutze das als Definition

- „ein Tangentialvektor ist das, was Funktionen ableitet“
- „Tangentialvektor = Richtungsableitung“

Sei $(p, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ein (in Koordinaten darstellbarer) Tangentialvektor

TODO Bildchen 5

$$\begin{aligned} \partial_{(\varphi,\xi)}\varphi &:= D_p\varphi(\xi) \\ &= \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(p) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)(\varphi) \end{aligned}$$

Definition Derivation

Sei $p \in \mathbb{R}^n$. Eine Derivation an p ist $\partial \colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\text{linear}} \mathbb{R}$ mit

$$\partial(\varphi \cdot \psi) = \partial\varphi \cdot \psi(p) + \partial\psi \cdot \varphi(p)$$

Beispiel

$\forall (p,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\partial_{(p,\xi)} = \partial_{(p,\xi)}(\cdot)$ ist Derivation an p.

Proposition

$\forall \partial \colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ Derivation in p: $\exists! \xi \in \mathbb{R}^n : \partial = \partial_{(p,\xi)}$

Beweis:

Seien $x^i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i$ Koordinatenabbildungen / Projektionen.
Setze:

$$\xi_i := \partial(x^i) \in \mathbb{R}$$

Zu zeigen:

$$\partial = \partial_{\left(p, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}\right)}$$

Trick:

ein $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ kann mit $\varphi_i(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sowie:

$$\varphi(x) = \varphi(p) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)(x^i - p^i) \quad \text{fast Taylor}$$

Beweis des Tricks:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) - \varphi(p) &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi(p + t(x-p))}{\partial t} \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Kettenregel + Skalarprodukt ausmultiplizieren}}{=} \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(p + t(x-p)) \cdot (x^i - p^i) \, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x^i - p^i) \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(p + t(x-p)) \, \mathrm{d}t}_{=:\varphi_i(x)}
\end{aligned}$$

$$\partial(1) = \partial(1 \cdot 1) \overset{\text{Leibnitz}}{=} \partial(1) + \partial(1) \Rightarrow \partial(1) = 0$$

$$
\begin{aligned}
\partial(\varphi) &= \partial\left(\varphi(p) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \cdot (x^i - p^i)\right) \\
&\overset{\text{Leibnitz, Linearität}}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\partial(\varphi_i)\underbrace{(p^i - p^i)}_{=0} + \underbrace{\varphi_i(p)\partial(x^i}_{\xi_i} \underbrace{-p^i)}_{\text{konstant}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(p)\xi_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}(p)
\end{aligned}
$$

Eindeutigkeit folgt aus der Linearität der Derivation:

$$
\begin{aligned}
& \partial_{(p,\xi)} = \partial_{(p,\xi')} \\
\Rightarrow\ & \partial_{(p,\xi-\xi')} = 0 \\
\Rightarrow\ & \forall i \in \mathbb{N}_{\leqslant n} : \xi^i - \xi^i = 0 (= \partial_{(p,\xi-\xi')}(x^i))
\end{aligned}
$$

□

Fazit: Tangentialvektoren an $p \in \mathbb{R}^n \mathrel{\hat{=}}$ Derivation an p

Definition: Tangentialraum

$$T_p\mathbb{R}^n := \{\partial \colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \mid \partial \text{ Derivation}\}$$

Bemerkung

- Vektorraum, da Derivationen VR bilden
- Beweis der Proposition liefert:

$$T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n, \quad \partial_{(p,\xi)} \leftarrow\!\shortmid \xi$$

- $\dim(T_p\mathbb{R}^n) = n$

Frage

Sei $p \in U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \leftarrow$ offenen Mengen. Was ist folgende Menge?

$$T_pU := \{\partial \colon C^\infty(U) \to \mathbb{R} \mid \partial \text{ Derivation}\}$$

Behauptung/Intuition

Es gilt:

$$T_pU \cong T_p\mathbb{R}^n$$

Beweis:

Definiere die duale Abbildung:

$$\varepsilon^*\colon \begin{cases} T_pU & \to T_p\mathbb{R}^n \\ \partial & \mapsto \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}^n) & \to C^\infty(U) \\ \varphi & \mapsto \partial(\varphi|_U) \end{cases} \end{cases}$$

Zeige, dass ε^* ein Isomophismus ist.

Sei

$$\varepsilon\colon \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}^n) & \to C^\infty(U) \\ \varphi & \mapsto \varphi|_U \end{cases}$$

ε^* ist surjektiv:

Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\partial_{(p,\xi)} \in T_p\mathbb{R}^n$. $\varepsilon^*(\underbrace{\partial_{(p,\xi)}}_{\in T_pU}) = \partial_{(p,\xi)} \in T_p\mathbb{R}^n$. Surjektivität ist relativ klar. Gibt es einen Unterschied zwischen $\partial_{(p,\xi)} \in T_pU$ und $\partial_{(p,\xi)} \in T_p\mathbb{R}^n$?

ε^* ist injektiv:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & \ker(\varepsilon^*) = \{0\} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall \partial \in \ker(\varepsilon^*) : \partial = 0 \end{aligned}$$

Sei $\partial \in \ker(\varepsilon^*)$. Dann gilt für ∂:

$$\begin{aligned} & \partial \in \ker(\varepsilon^*) \\ \Leftrightarrow \quad & \varepsilon^*(\partial) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\varphi \mapsto \partial(\varphi|_U)) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\varphi \mapsto \partial(\varepsilon(\varphi))) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \partial \circ \varepsilon = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \partial(\varphi|_U) = 0 \end{aligned}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass:

$$\forall \psi \in C^\infty(U) \exists \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \partial(\psi) = \partial(\varphi|_U)$$

denn dann:

$$\partial(\psi) = \partial(\varphi|_U) = 0$$

Sei $\psi \in C^\infty(U)$. Sei

$$\chi(x) := \begin{cases} 0, & |x| \geqslant 1 \\ \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & |x| < 1 \end{cases} \quad \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

TODO Bildchen 6

die Hügelfunktion und

$$\varrho(x) := \frac{\int_{-\infty}^{x} \chi(t)\,\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\,\mathrm{d}t}$$

die Hangfunktion

TODO Bildchen 7

U offen $\Rightarrow \exists r > 0 : B(p, 5 \cdot r) \subseteq U$. Sei:

$$\tilde{\varrho}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} \varrho\left(3 - \frac{|x-p|}{r}\right), & x \in U \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$\exists p \in V \subset U$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varrho} &= 1 \quad \text{auf } V \\ \tilde{\varrho} &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus U \end{aligned}$$

TOOD Bildchen 8

Konstruiere φ:

$$\varphi(x) := \begin{cases} \psi(x) \cdot \tilde{\varrho}(x) & x \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Jetzt gilt:

$$\begin{aligned} \partial(\varphi|_U) &= \partial((\tilde{\varrho} \cdot \psi)|_U) \\ &= \partial(\tilde{\varrho}|_U \cdot \psi) \\ &= \underbrace{\tilde{\varrho}|_U(p)}_{=1} \cdot \partial(\psi) + \underbrace{\partial(\tilde{\varrho}|_U)}_{\overset{(*)}{=}0} \cdot \psi(p) \end{aligned}$$

Beweis von $(*)$:

Konstruiere $\tilde{\tilde{\varrho}} \in C^\infty(U)$ wie $\tilde{\varrho}$. Aber jetzt mit $\tilde{\tilde{\varrho}} = 0$ auf $U \setminus V$ und $\tilde{\tilde{\varrho}}(p) = 1$. Es gilt $\tilde{\tilde{\varrho}}(1 - \tilde{\varrho}) = 0$.

TODO Bildchen 9

Daraus Folgt: ($\tilde{\tilde{\varrho}} := \tilde{\tilde{\varrho}}|_U$)

$$\begin{aligned} 0 &= \partial(\tilde{\tilde{\varrho}}(1 - \tilde{\varrho})) \\ &= \partial(\tilde{\tilde{\varrho}} - \tilde{\tilde{\varrho}}\tilde{\varrho}) \\ &= \partial(\tilde{\tilde{\varrho}}) - \partial(\tilde{\tilde{\varrho}}\tilde{\varrho}) \\ &= \partial(\tilde{\tilde{\varrho}}) - \underbrace{\tilde{\tilde{\varrho}}(p)}_{=1} \partial(\tilde{\varrho}) - \underbrace{\tilde{\varrho}(p)}_{=1} \partial(\tilde{\tilde{\varrho}}) \\ &= -\partial(\tilde{\varrho}) \end{aligned}$$