Technische Universität Dresden

Skript:

# Die klassischen Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie


| | |
|---|---|
| Verfasser | Franziska Kühn |
| Daten | Prof. Dr. Zoltan Sasvári<br>Sommersemester 2012<br>Hauptstudium |

# Inhaltsverzeichnis

# 1

# Klassische Grenzwertsätze

- Aufgabe (1700): Nicht nur präzise Lösungen für Aufgaben der W-Theorie, sondern auch deren asymptotisches Verhalten, präzise Lösung oft nicht möglich. Grenzwertsätze: Aussage über asymptotisches Verhalten.
- Die ersten Untersuchungen behandelten das Bernoulli-Schema. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis $A$ k-mal eingetreten ist:

$$p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Beispiel: Geburtenverteilung Jungen/Mädchen. Problem Wahrscheinlichkeiten für große $n$, $k$ zu berechnen.

- Weitere Beispiele:

  (i). Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen, Poissonsches Gesetz der großen Zahlen

  (ii). de Moivre (1731): Es gilt

$$n! \approx B \cdot \sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

  (Stirlingsche Formel), mit $B \in \mathbb{R}$ Konstante.

## 1.1 Das Bernoulli'sche Gesetz der großen Zahlen

**1.1.1 Satz** (Bernoulli)
Bezeichne $h_n(A)$ die relative Häufigkeit des Ereignisses $A$ in $n$ unabhängigen Versuchen. In jedem dieser Versuche sei die Wahrscheinlichkeit $p := \mathbb{P}(A)$ für das Eintreten von $A$ konstant. Dann gibt es für beliebige $\varepsilon, \delta > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ (unabhängig von $p$), sodass

$$\forall n \geq N : \mathbb{P}[|h_n(A) - \mathbb{P}(A)| < \varepsilon] \geq 1 - \delta$$

Beweis: Sei $q := 1 - p$. Dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[|h_n(A) - p| < \varepsilon] &= \sum_{|\frac{k}{n} - p| < \varepsilon} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \\
&= 1 - \sum_{|\frac{k}{n} - p| \geq \varepsilon} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \\
&\geq 1 - \sum_{|\frac{k}{n} - p| \geq \varepsilon} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \cdot \left(\frac{|k - n \cdot p|}{\varepsilon \cdot n}\right)^2 \\
&\geq 1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \cdot \left(\frac{|k - n \cdot p|}{\varepsilon \cdot n}\right)^2 \\
&\overset{*}{=} 1 - \frac{1}{\varepsilon^2 \cdot n^2} \cdot n \cdot p \cdot q
\end{aligned}$$

$$\geq 1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 \cdot n} \geq 1 - \delta$$

wegen $q \cdot p = (1-p) \cdot p \leq \frac{1}{4}$, wenn $n \geq N := \frac{1}{4\varepsilon^2 \cdot \delta}$. (Für $(*)$: Es handelt sich um die Varianz der Binomialverteilung.) □

**Bemerkung** (i). Kleineres $N$ als in 1.1.1 ist möglich (siehe Aufgabe **??**):

$$N := 1.06 \cdot \frac{\ln \frac{2}{\delta}}{\varepsilon^2}$$

(ii). In der Zeit von Bernoulli war die Tschebysheff-Ungleichung

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon] \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

noch nicht bekannt; eine analoge Abschätzung ist im obigen Beweis enthalten.

## 1.2 Der lokale Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace

### 1.2.1

Ziel: Eine asymptotische Formel für die Wahrscheinlichkeiten

$$W_{k,n,p} := W_{k,n} := \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

für $0 \leq k \leq n$, $p \in (0,1)$. Leicht zu sehen:

$$\lim_{n\to\infty} W_{k,n} = 0$$

für $0 \leq k \leq n$ fest. Finde geeignete „Normierung“ für $k$ notwendig. Idee: Beschreibe asymptotisches Verhalten der Fakultäten. Wir setzen die Stirling'sche Formel (siehe A.4)

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi \cdot n} \cdot e^{\theta(n)}$$

wobei $0 < \theta(n) < \frac{1}{12n}$ für die Fakultäten in $W_{k,n}$ ein:

$$W_{k,n} = \left(\frac{n \cdot p}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{n \cdot q}{n-k}\right)^{n-k} \cdot \sqrt{\frac{n}{2\pi \cdot (n-k)}} \cdot e^{\theta_{k,n}} \qquad (0 < k < n) \tag{1}$$

wobei $\theta_{k,n} = \theta(n) - \theta(k) - \theta(n-k)$. Folglich

$$|\theta_{k,n}| \leq \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right)$$

**1.2.2 Satz** (de Moivre)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann besteht die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{W_{k,n}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot n \cdot p \cdot q}} \cdot \exp\left(-\frac{(k-n\cdot p)^2}{2n\cdot p\cdot q}\right)} = 1 \tag{1}$$

gleichmäßig für alle $k(n) \in \mathbb{N}_0$ mit

$$k \in (n \cdot p + a \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot q}, n \cdot p + b \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot q}) =: I_n \tag{2}$$

*Gleichmäßig bedeutet hier, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k \in I_n \cap \mathbb{N}_0} \left| \frac{W_{k,n}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot n\cdot p\cdot q}} \cdot \exp\left(-\frac{(k-n\cdot p)^2}{2n\cdot p\cdot q}\right)} - 1 \right| = 0$$

Beweis: (i). $e^{\theta_{k,n}} \to 1$ gleichmäßig für alle $k \in I_n$: Aus (2) folgt:

$$\begin{aligned} k &> n \cdot \left(p + a \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) \\ n - k &> n \cdot \left(q - b \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) \\ \Rightarrow |\theta_{k,n}| &\le \frac{1}{12n} \cdot \left(1 + \frac{1}{p + a \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}} + \frac{1}{q - b \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}}\right) \end{aligned}$$

(ii). Es gilt

$$\frac{\sqrt{\frac{n}{2\pi \cdot k \cdot (n-k)}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot n \cdot p \cdot q}}} = \sqrt{\frac{n}{k} \cdot \frac{n}{n-k} \cdot p \cdot q} \to 1 \qquad (n \to \infty)$$

gleichmäßig für alle $k \in I_n$, denn wegen (2) gilt $\frac{k}{n} \to p$ und $\frac{n}{n-k} = 1 - \frac{k}{n} \to q$ für $n \to \infty$.

(iii). Sei

$$\begin{aligned} A_{k,n} &:= \left(\frac{n \cdot p}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{n \cdot q}{n-k}\right)^{n-k} \\ x_{k,n} &:= \sqrt{\frac{(k - n \cdot p)^2}{n \cdot p \cdot q}} \end{aligned}$$

Wir zeigen:

$$\frac{A_{k,n}}{e^{-\frac{x_{k,n}^2}{2}}} \to 1 \qquad (n \to \infty)$$

gleichmäßig für alle $k \in I_n \cap \mathbb{N}$.

Behauptung:

$$\ln A_{k,n} = -\frac{1}{2} x^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Dazu:

$$\begin{aligned} \ln A_{k,n} &= -k \cdot \ln \frac{k}{n \cdot p} - (n-k) \cdot \ln \frac{n-k}{n \cdot q} \\ &= -(n \cdot p + x \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot q}) \cdot \ln \left(1 + x \cdot \sqrt{\frac{q}{n \cdot p}}\right) \\ &\quad - (n \cdot q - x \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot q}) \cdot \ln \left(1 - x \cdot \sqrt{\frac{p}{n \cdot q}}\right) \end{aligned}$$

da $k = n \cdot p + x \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot q}$, $n - k = n \cdot q - x \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot q}$ für ein $x \in (a, b)$.

Taylor-Entwicklung von ln in 1:

$$\begin{aligned} \ln(1 + t) &= t - \frac{1}{2} \cdot t^2 + \frac{1}{3} \cdot t^3 \cdot \frac{1}{(1 + \xi)^3} \qquad (|t| < 1, |\xi| < |t|) \\ \Rightarrow \ln(1 + t) &= t - \frac{1}{2} \cdot t^2 + O(t^3) \qquad \left(|t| < \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\left|x \cdot \sqrt{\frac{q}{n \cdot p}}\right| < \frac{1}{2} \qquad \left|x \cdot \sqrt{\frac{p}{n \cdot q}}\right| < \frac{1}{2}$$

für $n$ hinreichend groß. Damit:

$$\begin{aligned}\ln A_{k,n} &= -(n\cdot p + x\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot q})\cdot\left(x\cdot\sqrt{\frac{q}{n\cdot p}} - \frac{1}{2}\frac{q\cdot x^2}{n\cdot p} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)\\ &\quad - (n\cdot p - x\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot q})\cdot\left(-x\cdot\sqrt{\frac{p}{n\cdot q}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p\cdot x^2}{n\cdot q} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{2}x^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

□

**1.2.3 Aufgabe**

Die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von Ausschuß sei $p := 0.005$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 10.000 zufällig ausgewählten Erzeugnissen die Anzahl $k$ der fehlerhaften Stücke 40 ist?
Man verwende 1.2.2 und zum Vergleich ein CAS.

**1.2.4 Aufgabe**

Man verallgemeinere Satz 1.2.2 für die Polynomial-Verteilung . (Genaue Aussage + Beweisskizze)

Hinweis:

$$W_{k_1,\dots,k_r} = n!\cdot\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{k_j!}\cdot p_j^{k_j}$$

mit $\sum_{j=1}^r p_j = 1$ und $\sum_{j=1}^r k_j = n$, $r \geq 2$. An Stelle von (2) wähle $n\cdot p_j + a\cdot\sqrt{n} < k_j < n\cdot p_j + b\cdot\sqrt{n}$.

**1.2.5 Aufgabe**

Ein Teilchen bewegt sich auf der reellen Achse mit folgenden Annahmen

(i). Start in 0

(ii). Verschiebung nach rechts oder links um 1 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ in diskreten Zeitenabständen

$X_n$ sei die $x$-Koordinate des Teilchens nach $n$ Schritten. Man berechne $\mathbb{P}[X_n = m]$ exakt und asymptotisch (mit Satz 1.2.2).

Lösung für Asymptotik:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi\cdot n}}\cdot\exp\left(-\frac{m^2}{2n}\right)$$

**1.2.6**

Wie groß ist der relative Fehler, wenn man Satz 1.2.2 in der Praxis anwendet? Sei

$$\psi_{k,n} := \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot n\cdot p\cdot q}}\cdot\exp\left(-\frac{(k-n\cdot p)^2}{2n\cdot p\cdot q}\right)\qquad (k = 0,\dots,n)$$

für $p \in (0,1)$. Der relative Fehler ist

$$R_n(k) = \frac{\psi_{k,n} - W_{k,n}}{W_{k,n}} = \frac{\psi_{k,n}}{W_{k,n}} - 1$$

Nach 1.2.2 gilt:

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,k} = 0$$

gleichmäßig für alle $k \in I_n \cap \mathbb{N}$.

Bezeichnung: Für $r \in \mathbb{R}$, für die $r \pm \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, dann bezeichne $N(r)$ die zu $r$ nächstgelegene ganze Zahl ($N(r) = \lfloor r + \frac{1}{2}\rfloor$).

**1.2.7 Satz**
Sei $p = \frac{1}{2}$, $n >$ und $R_{n,k}$ wie in 1.2.6 definiert. Dann besitzt $R_n$

(i). lokales Maximum bei $k = \frac{n}{2}$, falls $n$ gerade und bei $k = \frac{n \pm 1}{2}$, falls $n$ ungerade ist

(ii). absolute Minima bei $k = N\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3n}\right)$.

Es sind keine weiteren lokalen Extrema vorhanden.

Beweis: Siehe American Math. Monthly 2003, Vol. 110, Nr. 4, 341-342 □

**1.2.8 Aufgabe**
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Dann gibt es eine Konstante $C(a, b)$ so, dass für alle

$$k \in (n \cdot p + a \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot q}, n \cdot p + b \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot q}) = I_n$$

mit $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$W_{k,n} = \frac{\exp\left(-\frac{(k-n \cdot p)^2}{2n \cdot p \cdot q}\right)}{\sqrt{2\pi \cdot n \cdot q}} \cdot (1 + \varepsilon_{k,n})$$

wobei

$$|\varepsilon_{k,n}| \le \frac{C}{\sqrt{n}}$$

Für $p = \frac{1}{2}$ gilt sogar $|\varepsilon_{k,n}| \le \frac{C}{n}$.

Hinweis: $R_n(k) = \frac{1}{1+\varepsilon_{k,n}} - 1$.

## 1.3 Der integrale Grenzwertsatz

**1.3.1 Aufgabe**
Zu zeigen:

$$p_k := W_{k,n} \le W_{\lfloor (n+1) \cdot p \rfloor, n} \qquad (0 \le k \le n)$$

Hinweis: Man betrachte $\frac{p_k}{p_{k-1}}$.

**1.3.2 Aufgabe**
Wenn $n$ hinreichend groß ist, dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\sqrt{n \cdot p \cdot q} \cdot W_{k,n} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \delta$$

Hinweis: Nutze 1.3.1 und 1.2.2. Bemerke dazu, dass

$$n \cdot p - \sqrt{n \cdot p \cdot q} < \lfloor (n+1) \cdot p \rfloor < n \cdot p + \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

für $n$ hinreichend groß, d.h. 1.2.2 ist anwendbar.

Bezeichnung:

(i). $S_n$: Anzahl des Eintretens eines Ereignisses $A$ in $n$ Versuchen, wobei die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A) =: p \in (0, 1)$ konstant ist.

**1.3.3 Satz** (Integraler Grenzwertsatz)
Es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \underbrace{\mathbb{P}\left[a \le \frac{S_n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} < b\right]}_{=: P_n(a,b)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig in $a$ und $b$ ist.

Beweis: • Seien $A > 0$ und $a, b \in [-A, A]$, $a < b$. Sei $x_k := \frac{k-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$ für $k \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$P_n(a,b) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ a\le x_k<b}} W_{k,n}$$

wobei $W_{k,n} := 0$ für $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0,\dots,n\}$. Wir definieren die Funktion $p_n : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ durch

$$p_n(x) := \begin{cases} 0 & x < x_0 \\ \sqrt{n\cdot p\cdot q}\cdot W_{k,n} & x \in [x_k, x_{k+1}), k = 0,\dots,n \\ 0 & x \ge x_{n+1} \end{cases}$$

Dann ist

$$W_{k,n} = \sqrt{n\cdot p\cdot q}\cdot W_{k,n}\cdot(x_{k+1}-x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} p_n(x)\,dx$$

• Sei $\underline{n} := \min\{k \in \mathbb{Z}; a \le x_k\}$ und $\overline{n} := \max\{k \in \mathbb{Z}; x_k < b\}$. Es gilt

$$0 \le x_{\underline{n}} - a < \frac{1}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}} \qquad 0 \le b - x_{\overline{n}+1} < \frac{1}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}} \tag{1}$$

Damit:

$$P_n(a,b) = \int_{x_{\underline{n}}}^{x_{\overline{n}+1}} p_n(x)\,dx = \int_a^b p_n(x)\,dx \underbrace{- \int_a^{x_{\underline{n}}} p_n(x)\,dx + \int_b^{x_{\overline{n}+1}} p_n(x)\,dx}_{=:\varrho_n} \tag{2}$$

Es gilt $\varrho_n \to 0$ gleichmäßig für alle $a, b \in [-A, A]$ wegen Aufgabe 1.3.2 und (1). Sei $\alpha_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\cdot(1+\alpha_n(x))$$

Aus (2) und der Definition von $\alpha_n$ folgt:

$$P_n(a,b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\cdot(1+\alpha_n(x))\,dx + \varrho_n \tag{4}$$

• Wir zeigen, dass $\alpha_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$ gleichmäßig für alle $x \in [-A, A]$. Aus Satz 1.2.2 folgt, dass $\lim_{n\to\infty} \alpha_n(x_k) = 0$ gleichmäßig für alle $x_k \in [-A, A]$. Bei festem $k$ gilt für alle $x \in [x_k, x_{k+1})$ die Beziehung

$$p_n(x) = p_n(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{x_k^2}{2}\right)\cdot(1+\alpha_n(x_k))$$
$$\Rightarrow \alpha_n(x) = \exp\left(\frac{x^2-x_k^2}{2}\right)\cdot(\alpha_n(x_k)+1)-1$$

Aus $|x^2 - x_k^2| < |x_{k+1}^2 - x_k^2| = \frac{1}{n\cdot p\cdot q}$ folgt die gleichmäßige Konvergenz.

• Die Aussage des Satzes für $a, b \in [-A, A]$ folgt nun aus (4) sowie der gleichmäßigen Konvergenz von $\varrho_n$ und $\alpha_n$.

• Allgemeiner Fall: Seien $a, b$ beliebig. Sei

$$I(a,b) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $A > 0$ so, dass $I(-\infty,-A) + I(A,\infty) < \varepsilon$. Dann existiert gemäß dem ersten Teil des Beweises $N \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\forall n \ge N, \forall a, b \in [-A, A] : |P_n(a,b) - I(a,b)| < \varepsilon$$

Somit

$$P_n(-\infty,-A)+P_n(A,\infty)<2\varepsilon$$

wegen $1-\varepsilon<I(-A,A)<1$ und $|P_n(-A,A)-I(-A,A)|<\varepsilon$. Sind also $a\le -A$, $b\ge A$, dann

$$\begin{aligned}&|P_n(a,b)-I(a,b)|\\ &=|P_n(a,-A)+P_n(-A,A)+P_n(A,b)-I(a,-A)-I(-A,A)-I(A,b)|\\ &\le |P_n(-A,A)-I(-A,A)|+P_n(-\infty,-A)+P_n(A,\infty)+I(-\infty,-A)+I(A,\infty)\\ &\le 4\varepsilon\end{aligned}$$

□

**1.3.4 Aufgabe**
Betrachte Bernoulli-Versuche mit $p:=\mathbb{P}(A)$ und sei $B(k,n;p)=\mathbb{P}[S_n\le k]$ die Wahrscheinlichkeit, dass $A$ bei $n$ Versuchen $\le k$ mal eingetreten ist. Dann gilt

$$B(k,n;p)=(n-k)\cdot\binom{n}{k}\cdot\int_0^{1-p}t^{n-k-1}\cdot(1-t)^k\,dt\qquad(0\le k<n)$$

Hinweis: Für $p=1$ stimmen beiden Seiten überein. Es genügt daher zu zeigen, dass die Ableitungen (nach $p$) gleich sind (zum Beispiel mit Induktion nach $k$).

Notation:

$$\begin{aligned}\varphi(x)&:=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\\ \Phi(x)&:=\int_{-\infty}^{x}\varphi(y)\,dy\end{aligned}$$

**1.3.5 Aufgabe** (i). Ist $x>0$, so ist die Differenz

$$1-\Phi(x)-\varphi(x)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{x^{2k+1}}\right)$$

positiv oder negativ, je nachdem, ob $n$ ungerade oder gerade ist.

Folgerung:

$$\varphi(x)\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)<1-\Phi(x)<\frac{\varphi(x)}{x}\tag{1}$$

d.h. $1-\Phi(x)\sim\frac{\varphi(x)}{x}$ für $x\to\infty$.

(ii). Wieviele Glieder müssen berücksichtigt werden, wenn man $\Phi(4)$ mit einer Genauigkeit von $10^{-6}$ berechnen will?

Hinweis:

(i). Man differenziere nach $x$.

**1.3.6 Aufgabe**
Es gibt eine Konstante $C$, sodass für alle $n\in\mathbb{N}$, $a,b\in\mathbb{R}$:

$$\left|\mathbb{P}\left(a\le\frac{S_n-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}<b\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right|\le\frac{C}{\sqrt{n}}$$

Hinweis: 1.2.11 (? 1.2.8?) und der Beweis von Satz 1.3.3.

## 1.4 Der Satz von Poisson

**1.4.1 Beispiel** (Herstellung von Glasflaschen)

- Im geschmolzenen Glas, aus dem die Flaschen hergestellt werden, bleiben kleine „Steine“ zurück. Kommt ein Stein in das Material einer Flasche, so ist sie unbrauchbar. Frage: Wieviel Prozent der Flaschen sind unbrauchbar?

- Bekannt: In 100kg flüssigem Glas sind durchschnittlich $x$ Steine, unabhängig voneinander verteilt. Das Gewicht einer Flasche beträgt 1kg.

- Mathematisches Modell: In $N$ Urnen (Flaschen) werden $n$ Kugeln (Steine) zufällig verteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $W_{k,n,N}$ dafür, dass in einer Urne $k$ Kugeln liegen.

$$W_k := W_{k,n,N} = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{N^k} \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k}$$

  Binomialverteilt mit den Parametern $n$ und $p_N := \frac{1}{N} \to 0$ für $N \to \infty$.

- Im praktischen Beispiel: $100 \cdot t$ kg flüssiges Glas (mit $t \in \mathbb{N}$), dann $N = 100 \cdot t$ (Anzahl der Flaschen) und $n = t \cdot x$ (Anzahl der Steine). Prozentsatz vom Ausschuß während einer längeren Produktionszeit, d.h. Asymptotik für $t \to \infty$ (dann auch $n \to \infty$).

- Sei $\lambda := \frac{x}{100}$, dann $N = \frac{n}{\lambda}$. Damit:

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \cdot \underbrace{\prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)}_{\to 1 \quad (n \to \infty)} \qquad (1) \\ &\to \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \qquad (n \to \infty) \end{aligned}$$

  Poisson-verteilt mit dem Parameter $\lambda$.

- Anzahl der unbrauchbaren Flaschen/Anzahl aller Flaschen $\sim 1 - W_0 \sim 1 - e^{-\lambda}$ für $n$ groß, d.h. prozentualer Anteil ist

$$r := 100 \cdot \left(1 - e^{-\frac{x}{100}}\right)$$

  Insbesondere: Für $x$ klein gilt $r \sim x$ und für $x = 100$ gilt $r \sim 63,21\%$, für $x = 30$ $r \sim 25,92\%$. Für $x = 30$, aber kleinere Flaschen mit $\frac{1}{4}$ Gewicht gilt

$$r = 100 \cdot \left(1 - \exp^{-\frac{x}{400}}\right) \sim 7,32\%$$

**1.4.2 Aufgabe**

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} \left(\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n - e^{a_n}\right) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

Hinweis: Indirekt; man wähle eine konvergente Teilfolge.

**Bemerkung**

Wir betrachten eine Folge von Ereignisserien $(E_{j,k})_{j \in \mathbb{N}, k \le j}$ mit $(E_{j,k})_{k=1,\dots,j}$ unabhängig ($j \in \mathbb{N}$), d.h. alle Ereignisse einer Serie sind unabhängig, und $\mathbb{P}(E_{j,k}) = p_j$ für $1 \le k \le j$. Sei $S_n$ die Anzahl der Ereignisse, die in der $n$-ten Serie eingetreten sind.

**1.4.3 Satz** (Poisson)

Es gelte $\lim_{j \to \infty} p_j = 0$, so ist

$$\lim_{n \to \infty} \left(\mathbb{P}[S_n = k] - \frac{(n \cdot p_n)^k}{k!} \cdot e^{-n \cdot p_n}\right) = 0$$

Beweis:

- Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S_n = k] &= \binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{(n \cdot p_n)^k}{k!} \cdot (1-p_n)^n \cdot \frac{1}{(1-p_n)^k} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \qquad (1)\end{aligned}$$

- Sei $\varepsilon > 0$ und $A = A(\varepsilon) \geq 0$ so, dass

$$\forall a \geq A : \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-\frac{a}{2}} \leq \varepsilon \qquad (2)$$

- Sei $N_b := \{n \in \mathbb{N}; n \cdot p_n < A\}$ und $N_u := \{n \in \mathbb{N}; n \cdot p_n \geq A\}$. Aus (1) folgt:

$$\mathbb{P}[S_n = k] \leq \frac{(n \cdot p_n)^k}{k!} \cdot e^{-(n-k) \cdot p_n}$$

da $1 - p_n \leq e^{-p_n}$. Ist $n \geq 2k$ und $n \in \mathbb{N}_u$, so folgt mit (2):

$$\mathbb{P}[S_n = k] \leq \frac{(n \cdot p_n)^k}{k!} \cdot e^{-\frac{n}{2} \cdot p_n} \leq \varepsilon$$

Damit:

$$\left| \mathbb{P}[S_n = k] - \frac{(n \cdot p_n)^k}{k!} \cdot e^{-n \cdot p_n} \right| \leq \varepsilon$$

für $n \geq 2k$, $n \in N_u$. Also

$$\lim_{N_u \ni n \to \infty} \left| \mathbb{P}[S_n = k] - \frac{(n \cdot p_n)^k}{k!} \cdot e^{-n \cdot p_n} \right| = 0$$

falls $N_u$ unendlich ist.

- Ist $N_b$ unendlich, so folgt aus (1) und Aufgabe 1.4.2 mit $a_n := -n \cdot p_n$:

$$\begin{aligned}&\lim_{N_b \ni n \to \infty} \left| \mathbb{P}[S_n = k] - \frac{(n \cdot p_n)^k}{k!} \cdot e^{-n \cdot p_n} \right| \\ &= \lim_{N_b \ni n \to \infty} \left| \frac{(n \cdot p_n)^k}{k!} \cdot \left( (1-p_n)^{n-k} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) - e^{-n \cdot p_n} \right) \right| = 0\end{aligned}$$

wegen

$$\frac{1}{(1-p_n)^k} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \to 1 \qquad (1-p_n)^n = \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n$$

□

## 1.5 Grenzwertsätze über die empirischen Verteilungsfunktionen

### 1.5.1 Definition

Seien $X_1, \ldots, X_n$ iid mit Verteilungsfunktion $F$ und $w \in \Omega$. Wir ordnen die Zahlen $X_j(w)$, $j = 1, \ldots, n$ um, sodass $X_1^*(w) \leq \ldots \leq X_n^*(w)$. Die empirische Verteilungsfunktion wird definiert durch

$$F_n^w(x) := \begin{cases} 0 & x \leq X_1^*(w) \\ \frac{k}{n} & x \in (X_k^*(w), X_{k+1}^*(w)] \\ 1 & x > X_n^*(w) \end{cases}$$

$F_n^w$ ist eine Verteilungsfunktion.

- Im Weiteren: $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängige Zufallsgrößen mit $X_j$, $j = 1, \ldots, n$ identisch verteilt und $Y_j$, $j = 1, \ldots, n$ identisch verteilt mit stetigen Verteilungsfunktionen $F$ bzw. $G$ (die nicht bekannt zu sein brauchen).
- Aufgabenstellung: Durch Vergleich der empirischen Verteilungsfunktionen $F_n$ und $G_n$ prüfe man die Hypothese $F = G$.
- Bezeichnungen: Für jedes $w \in \Omega$ vereinigen wir die Zahlen $X_1(w), \ldots, X_n(w), Y_1(w), \ldots, Y_n(w)$ zu einer einzigen Folge und ordnen diese $2n$ Zahlen aufsteigend.$Z_k^*(w)$ sei die $k$-te Zahl in dieser Folge. Es darf $Z_1^*(w) < \ldots < Z_{2n}^*(w)$ angenommen werden (gilt fast sicher). Für $k = 1, \ldots, 2n$ setzen wir

$$\eta_k^n(w) := \eta_k(w) := \begin{cases} 1 & Z_k^*(w) \in \{X_1(w), \ldots, X_n(w)\} \\ -1 & Z_k^*(w) \in \{Y_1(w), \ldots, Y_n(w)\} \end{cases}$$

Nach Definition sind von der Folge $(\eta_k)_{k=1}^{2n}$ $n$ Folgenglieder $= 1$ und $n$ Folgenglieder $= -1$. Weiterhin sei $S_k := \sum_{j=1}^k \eta_j$ für $k \in \{1, \ldots, 2n\}$, insbesondere gilt $S_{2n} = 0$.

**1.5.2 Lemma**
Es gelten die Relationen

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} (F_n(x) - G_n(x)) = \frac{1}{n} \cdot \max_{1\le k\le 2n} S_k$$
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - G_n(x)| = \frac{1}{n} \cdot \max_{1\le k\le 2n} |S_k|$$

Beweis: $n \cdot (F_n(x) - G_n(x))$ ist die Differenz der Anzahl der Elemente der Folge $(X_j)_{j=1,\ldots,n}$, die unterhalb von $x$ liegen, und die Anzahl der Elemente der Folge $(Y_j)_{j=1,\ldots,n}$, die unterhalb von $x$ liegen. Durchläuft $x$ die reellen Zahlen, so ändert sich $n \cdot (F_n(x) - G_n(x))$ nur dann (und zwar um $\eta_k$), wenn $x \in \{Z_k^*; k = 1, \ldots, 2n\}$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}} n \cdot (F_n(x) - G_n(x)) &= \max_{1\le k\le 2n} n \cdot (F_n(Z_k^* + 0) - G_n(Z_k^* + 0)) \\ &= \max_{1\le k\le 2n} S_k \end{aligned}$$

Analog folgt die zweite Gleichung. □

**Bemerkung**
Im Folgenden bezeichne $\lceil x \rceil$ für $x \in \mathbb{R}$ die kleinste ganze Zahl, die nicht kleiner als $x$ ist.

**1.5.3 Satz**
Gilt $F = G$, so ist

$$\mathbb{P}\left[\sqrt{n} \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}} (F_n(x) - G_n(x)) < z\right] = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \frac{1 - \binom{2n}{n-c}}{\binom{2n}{n}} & 0 < z \le \sqrt{n} \\ 1 & z > \sqrt{n} \end{cases}$$

wobei $c := \lceil z \cdot \sqrt{n} \rceil$.

Beweis: Anzahl der möglichen Folgen $\eta_1, \ldots, \eta_{2n}$ ist $\binom{2n}{n}$ wobei jede Folge gleich wahrscheinlich ist (wegen $F = G$ und Unabhängigkeit). Noch zu bestimmen: Wie viele Folgen erfüllen die Bedingung $\max_{1\le k\le 2n} S_k < z \cdot \sqrt{n}$.
Geometrische Veranschaulichung: Jeder $\eta_1, \ldots, \eta_{2n}$ sei ein Streckenzug („Weg“) in $\mathbb{R}^2$ in der folgenden Weise zugeordnet: Vom Punkt $(0,0)$ ausgehend werden die Punkte $(k, S_k)$ für $k = 1, \ldots, 2n$ verbunden (hierbei gilt $(2n, S_{2n}) = (0,0)$). Die Anzahl derjenigen Wege ist zu bestimmen, die die Gerade $y = z \cdot \sqrt{n}$ nicht schneiden, bezeichnet als $U_n^+(z)$. Offenbar ist $U_n^+(z)$ die Anzahl der Wege, die $y = c$ nicht schneiden.

Hat ein Weg mit der Geraden $y = c$ einen gemeinsamen Punkt, so spiegele man den Abschnitt, der nach dem ersten gemeinsamen Punkt beginnt, an der Geraden $y = c$ - damit neuer Endpunkt $(2n, 2c)$. Diese Zuordnung ist eineindeutig. Damit folgt: Anzahl der Wege, die mit $y = c$ mindestens einen Punkt gemeinsam haben = Anzahl aller von $(0,0)$ nach $(2n, 2c)$ führender Wege = $\binom{2n}{n-c}$. Damit folgt:

$$U_n^+(z) = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-c}$$

Wegen Lemma 1.5.2 folgt hieraus die Behauptung. □

**1.5.4 Folgerung** (Smirnow)
Ist $F = G$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\sqrt{n}\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}}(F_n(x) - G_n(x)) < y\right] = \begin{cases} 1 - e^{-y^2} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

Beweis: Aufgabe. Hinweis: Stirlingsche Formel verwenden. □

**1.5.5 Satz**
Gilt $F = G$, so ist

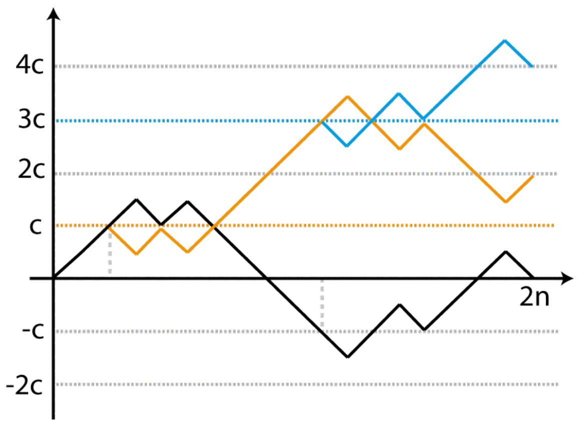
$$\mathbb{P}\left[\sqrt{n}\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_n(x) - G_n(x)| < z\right] = \begin{cases} 0 & z \le \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\binom{2n}{n}}\cdot\sum_{k=-\lceil\frac{n}{c}\rceil}^{\lceil\frac{n}{c}\rceil}(-1)^k\cdot\binom{2n}{n-k\cdot c} & z \in \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \sqrt{n}\right] \\ 1 & z > \sqrt{n} \end{cases}$$

Beweis: Beweisidee: Analog zum Beweis von Satz 1.5.3. Die Anzahl der Wege von $(0,0)$ nach $(2n, 0)$ die mit den Geraden $y = \pm c$ keine gemeinsamen Punkte haben sei $U_n(z)$. Gesamtanzahl der Wege ist $\binom{2n}{n}$. Sei $N_+$ (bzw. $N_-$) die Anzahl der Wege, die mit $y = c (y = -c)$ Punkte gemeinsam haben. Sei weiterhin $N_{+-}$ (bzw. $N_{-+}$) die Anzahl der Wege, die nach dem ersten gemeinsamen Punkt mit $y = c$ (bzw. $y = -c$) auch Punkte mit $y = -c$ (bzw. $y = c$) gemeinsam haben. Dann gilt (Aufgabe):

$$U_n(z) = \binom{2n}{n} - N_+ - N_- + N_{+-} + N_{-+} - N_{+-+} - N_{-+-} + \ldots \tag{1}$$

Wegen Symmetrie gilt $N_- = N_+$, $N_{+-} = N_{-+}$, .... Weiterhin gilt $N_+ = \binom{2n}{n-c} = \binom{2n}{n+c}$ (siehe Beweis von Satz 1.5.3).

Bestimme $N_{+-}$: Spiegelt man den Abschnitt des Weges, der nach dem ersten Schnittpunkt mit $y = c$ folgt, an der Geraden $y = c$ und nachher den nach dem ersten gemeinsamen Punkt mit $y = 3c$ folgenden Abschnitt an der Geraden $y = 3c$, so erhält man einen Weg nach $(2n, 4c)$. (Diese Zuordnung ist bijektiv.) Damit folgt




$$N_{+-} = N_{-+} = \binom{2n}{n+2c} = \binom{2n}{n-2c}$$

Analog folgt:

$$N_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k} = \binom{2n}{n+k\cdot c} = \binom{2n}{n-k\cdot c}$$

mit $\varepsilon_j \in \{1, -1\}$. □

**1.5.6 Folgerung** (Kolmogorov)
Ist $F = G$, dann

$$\mathbb{P}\left[\sqrt{n}\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_n(x) - G_n(x)| < z\right] = \begin{cases} K(y) & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

wobei

$$K(y) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \cdot e^{-k^2 \cdot y^2}$$

Beweis: Aufgabe. Hinweis: Satz 1.5.5 und Stirlingsche Formel. □

**1.5.7 Aufgabe**
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsgrößen mit absolut stetiger Verteilungsfunktion $F$. Bezeichne $X^*_{k,n}(w)$ die der Größe nach $k$-te unter den Zahlen $X_1(w), \dots, X_n(w)$. Weiterhin sei $F(0) = 0$ und $F'(0) = \lambda$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[n \cdot X^*_{k,n} < x\right] = \sum_{r=k}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot x)^r \cdot e^{-\lambda \cdot x}}{r!} = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \int_0^{\lambda \cdot x} t^{k-1} \cdot e^{-t}\, dt$$

Hinweis:

$$\mathbb{P}[n \cdot X^*_{k,n} < x] = \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} \cdot F\left(\frac{x}{n}\right)^r \cdot \left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n-r}$$

und $F(x) = F(0) + F'(0) \cdot x + \ldots = \lambda \cdot x + \ldots$.

## 1.6 Grenzwertsätze über Irrfahrtprobleme

- Für $r \in \mathbb{N}$ sei $G_r$ die Menge der Gitterpunkte in $\mathbb{R}^r$.
- Irrfahrt eines Punktes auf $G_r$: Befindet sich der Punkt zur Zeit $t = n \in \mathbb{N}_0$ in einem Gitterpunkt, so möge er sich zur Zeit $t = n+1$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2r}$ in einem der $2r$ benachbarten Punkte des Gitters befinden (Nachbar: $r-1$ Koordinaten stimmen überein, die übrige Koordinate weicht um $\pm 1$ ab).

**1.6.1 Aufgabe**
Unter den Polynomialkoeffizienten $\frac{n!}{n_1! \cdots n_r!}$, wobei $n = \sum_{j=1}^r n_j$, $n_j \geq 0$, sind diejenigen die größten, bei denen sich die Zahlen $n_1, \dots, n_r$ voneinander höchstens um $\pm 1$unterscheiden. Man bestimme die entsprechenden Zahlen $n_j$, $j = 1, \dots, r$.

Hinweis: Es gilt $\frac{n}{r} = \lfloor \frac{n}{r} \rfloor + \frac{k}{r}$ für ein $0 \leq k < r$. Maximum, wenn $n_j = \lfloor \frac{n}{r} \rfloor + \varepsilon_j$ mit $\varepsilon_j \in \{1, -1\}$, $\sum_{j=1}^r \varepsilon_j = k$.

**1.6.2 Lemma** (Irrfahrt in $G_r$)
Kommt ein Punkt mit Wahrscheinlichkeit 1 irgendwann in seine Anfangslage (d.h. $t = 0$) zurück, so kommt er mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich oft zurück.

Beweis: Sei $p_m$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt mindestens $m$ mal zurückkommt. Es gilt nach Voraussetzung $p_1 = 1$. Wir zeigen, dass $p_m = p_1^m = 1$, damit folgt dann offenbar die Behauptung.
Sei $q_n^{(m)}$ die Wahrscheinlichkeit, dass im $n$-ten Schritt zum $m$-ten mal wieder die Ausgangslage erreicht wird, für $n \leq 0$ sei $q_n^{(m)} := 0$. Für $m \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned} p_m &= \sum_{n=1}^{\infty} q_n^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} q_1^{(1)} \cdot q_{n-1}^{(m-1)} + q_2^{(1)} \cdot q_{(n-2)}^{m-1} + \ldots + q_{n-1}^{(1)} \cdot q_1^{(m-1)} \\ &= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} q_n^{(1)}\right) \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} q_n^{(m-1)}\right) = p_1 \cdot p_{m-1} \end{aligned}$$

(letzter Schritt: Cauchy-Produkt). Induktion gibt Behauptung. □

**1.6.3 Aufgabe**
Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Hinweis: $(1+x)^n \cdot (1+x)^n = (1+x)^{2n}$.

**1.6.4 Satz** (Pólya)
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt bei einer Irrfahrt in $G_r$ in seine Anfangslage zurückkehrt unendlich oft zurückkehrt, ist 1 für $r \in \{1,2\}$ und 0 für $r \geq 3$. Ist $r \geq 3$, so kommt der Punkt mit einer positiven Wahrscheinlichkeit kleiner als 1 irgendeinmal in seine Anfangslage zurück (für $r = 3$ ist diese $\approx 0,35$).

Beweis:

- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit befinde sich der Punkt zur Zeit $t = 0$ im Nullpunkt. Sei $P_n^{(r)}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Punkt zur Zeit $t = n$ wieder im Nullpunkt ist, d.h. in Richtung jeder Achse genauso viele Schritte nach rechts wie nach links gemacht. Dann folgt $P_{2n+1}^{(r)} = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$\begin{aligned} P_{2n}^{(r)} &= \frac{1}{(2r)^{2n}} \cdot \sum_{\sum_{k=1}^r n_k = n} \frac{(2n)!}{(n_1! \cdots n_r!)^2} \\ &= \frac{1}{(2r)^{2n}} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \sum_{\sum_{k=1}^r n_k = n} \left( \frac{n!}{n_1! \cdots n_r!} \right)^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Folglich

$$\begin{aligned} P_{2n}^{(1)} &= \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \\ P_{2n}^{(2)} &= \frac{1}{4^{2n}} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \underbrace{\sum_{n_1+n_2=n} \left( \frac{n!}{n_1! \cdot n_2!} \right)^2}_{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}^2} \overset{1.6.3}{=} \frac{\binom{2n}{n}^2}{4^{2n}} \end{aligned}$$

Aufgabe:

$$P_{2n}^{(1)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot n}} \qquad\qquad P_{2n}^{(2)} \sim \frac{1}{\pi \cdot n}$$

also

$$r \in \{1,2\} : \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}^{(r)} = \infty \tag{2}$$

- Abschätzung für $P_{2n}^{(r)}$ mit $r \geq 3$: Aus (1) folgt:

$$P_{2n}^{(r)} \leq \frac{\binom{2n}{n}}{(2r)^{2n}} \cdot \underbrace{\sum_{\sum_{k=1}^r n_k = n} \frac{n!}{n_1! \cdots n_r!}}_{r^n} \cdot \underbrace{\max_{\sum n_k = n} \frac{n!}{n_1! \cdots n_r!}}_{\overset{1.6.1}{\leq} \frac{n!}{(\lfloor \frac{n}{r} \rfloor !)^r}} = O\left(n^{-\frac{r}{2}}\right)$$

Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}^{(r)} = \infty \tag{3}$$

folgt aus Lemma von Borel-Cantelli: Der Punkt kehrt mit Wahrscheinlichkeit 1 höchstens endlich oft in seine Anfangslage zurück, wenn $r \geq 3$.

- $r \in \{1,2\}$: Sei $Q_n^{(r)}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Punkt im $n$-ten Schritt das erste Mal in seine Anfangslage zurückkehrt. Dann ist $Q^{(r)} := \sum_{k=1}^{\infty} Q_{2k}^{(r)}$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt irgendwann in seine Anfangslage zurückkehrt. Es gilt:

$$P_{2n}^{(r)} = Q_{2n}^{(r)} + \sum_{k=1}^{n-1} Q_{2n-2k}^{(r)} \cdot P_{2k}^{(r)} \tag{4}$$

Wir setzen

$$G_r(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{P_{2k}^{(r)}}_{\le 1} \cdot x^k \qquad (0 \le x < 1)$$

$$H_r(x) := \sum_{k=1}^{\infty} Q_{2k}^{(r)} \cdot x^k \qquad (0 \le x \le 1)$$

dann gilt $Q^{(r)} = H_r(1)$. Aus (4) folgt:

$$G_r(x) = H_r(x) + G_r(x) \cdot H_r(x) \qquad (0 \le x < 1)$$

(in (4) mit $x^k$ multiplizieren, summieren, dann Cauchy-Produkt). Damit:

$$\begin{aligned} H_r(x) &= \frac{G_r(x)}{1 + G_r(x)} \\ \Rightarrow Q^{(r)} &= H_r(1) \overset{\text{Abel}}{=} \lim_{x \to 1-} H_r(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{G_r(x)}{1 + G_r(x)} = 1 \end{aligned}$$

für $r \in \{1, 2\}$. Aus Satz 1.6.2 folgt die Behauptung. (Für $r \ge 3$ gilt $0 < Q^{(r)} < 1$.)

□

*Beweis der obigen Aufgabe.* Es gilt

$$\frac{\binom{2n}{n}}{(2r)^{2n}} \cdot r^n \cdot \frac{n!}{\left(\lfloor \frac{n}{r} \rfloor !\right)^r} = \underbrace{\binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{4^n}}_{\overset{1.2.2}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot n}}} \cdot r^n \cdot \frac{n!}{\left(\lfloor \frac{n}{r} \rfloor !\right)^r}$$

$$= O\left( \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{r^n} \cdot \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}}{\left(\frac{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor}{e}\right)^{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor \cdot r} \cdot \left(\sqrt{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor}\right)^r} \right) = O\left(\frac{1}{n^{\frac{r}{2}}}\right)$$

Benutze dazu, dass

$$\frac{1}{r^n} \cdot \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor}{e}\right)^{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor \cdot r}} \to 1 \qquad (n \to \infty)$$

□

**1.6.5 Aufgabe** (Gleichzeitige Irrfahrt von $k$ Punkten auf $G_1$)
Die Sprünge der $k$ Punkte erfolgen unabhängig und die Anfangslage der Punkte seien identisch. $p_n$ sei die Wahrscheinlichkeit, dass die $k$ Punkte nach $n$ Schritten am gleichen Ort sind. Zeige für $k = 2$:

$$p_n \sim \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \left(\frac{2}{\pi \cdot n}\right)^{\frac{k-1}{2}}$$

(Die Formel gilt sogar für beliebiges $k \ge 2$.)

Hinweis: (1.6.3) und (1.2.2),

$$p_n = \frac{1}{2^{k \cdot n}} \cdot \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j}^k$$

**Bemerkung**
Seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsgrößen mit $\mathbb{P}[X_j = 1] = \mathbb{P}[X_j = -1] = \frac{1}{2}$. Dann repräsentiere die Zufallsgröße $Z_n := \sum_{j=1}^{n} X_j$ eine eindimensionale Irrfahrt. Frage: Wie groß ist die Anzahl der positiven bzw. negativen Zahlen in der Folge $Z_1(w), \ldots, Z_n(w)$. Sei $\pi_n(w)$ die Anzahl der positiven Glieder. Vereinbarung: Falls $Z_j(w) = 0$ mit $Z_{j-1}(w) > 0$ wird dieses zu den positiven gezählt, falls $Z_{j-1}(w) < 0$ zu den negativen ($Z_{j-1}(w) = 0$ ist f.s. nicht möglich).

**1.6.6 Satz** (Arcussinus-Gesetz)

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{\pi_N}{N} < x\right] = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{\pi}\cdot \arcsin\sqrt{x} & x \in [0,1] \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

mit Dichtefunktion $F'(x) = \frac{1}{\pi\cdot\sqrt{x\cdot(1-x)}}$.

**1.6.7 Lemma**
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\cdot\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

Beweis: Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}\cdot x^k \qquad (|x| < 1)$$

nach Taylorformel (Entwicklung um Punkt 0). Quadrieren beider Seiten gibt auf der linken Seite

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} x^k$$

Koeffizientenvergleich (mit Cauchy-Produkt auf der rechten Seite) gibt Behauptung. □

**Bemerkung**
Wie im Beweis von Pólya:

- $P_n^{(1)}$: Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Punkt zur Zeit $t = n$ wieder im Nullpunkt ist. Gezeigt:
$$P_{2n}^{(1)} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$
- $Q_n^{(1)}$: Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Punkt im $n$-ten Schritt zum ersten Mal in seine Anfangslage zurückkehrt.
- $G_1(x) := \sum_{k\in\mathbb{N}} P_{2k}^{(1)}\cdot x^k$ für $0 \le x < 1$, $H_1(x) := \sum_{k\in\mathbb{N}} Q_{2k}^{(1)}\cdot x^k$ für $0 \le x \le 1$. Bereits gezeigt: $H_1(x) = \frac{G_1(x)}{1+G_1(x)}$ für $0 \le x < 1$.

**1.6.8 Lemma**

$$Q_{2k}^{(1)} = P_{2k-2}^{(1)} - P_{2k}^{(1)} = \frac{\binom{2k-2}{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}\cdot x^{2k} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1 \\ \Rightarrow H_1(x) &= \frac{G_1(x)}{1+G_1(x)} = 1 - \sqrt{1-x} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\frac{\binom{2k-2}{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}}_{=Q_{2k}^{(1)}}\cdot x^k \end{aligned}$$

(im letzten Schritt: Taylorentwicklung, Definition von $H_1$). Die andere Aussage folgt durch einfaches Nachrechnen. □

**1.6.9 Lemma**

$$\mathbb{P}[\Pi_{2n} = 2k] = \frac{\binom{2k}{k} \cdot \binom{2n-2k}{n-k}}{2^{2n}} \qquad (k = 0, \dots, n)$$

Beweis: Induktion nach $n$

- $n = 1$: Mögliche Werte für $X_1, X_2$ und $\Pi_2$:

| $X_1$ | $X_2$ | $\Pi_2$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| 1 | -1 | 2 |
| -1 | 1 | 0 |
| -1 | -1 | 0 |

  also $\mathbb{P}[\Pi_2 = 0] = \mathbb{P}[\Pi_2 = 2] = \frac{1}{2}$.

- Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für $n < N$.

- Induktionsschritt: Es bezeichne $\nu_1$ die kleinste Zahl $j$, für die $Z_j = 0$ gilt, falls ein solches $j$ existiert, sonst $\nu_1 := \infty$ ($\nu_1$ ist gerade, wenn $< \infty$). Dann gilt

$$\mathbb{P}[\Pi_{2N} = 2k] = \left( \sum_{\ell=1}^{N} \mathbb{P}[\Pi_{2N} = 2k, \nu_1 = 2\ell] \right) + \mathbb{P}[\Pi_{2N} = 2k, \nu_1 > 2N]$$

  wobei

$$\mathbb{P}[\Pi_{2N} = 2k, \nu_1 = 2\ell] = \underbrace{\mathbb{P}[\Pi_{2N} = 2k, \nu_1 = 2\ell, Z_1 = 1]}_{\frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}[\Pi_{2N-2\ell} = 2k-2\ell] \cdot \mathbb{P}[\nu_1 = 2\ell]} + \mathbb{P}[\Pi_{2N} = 2k, \nu_1 = 2\ell, Z_1 = -1]$$

  Nach 1.6.8 gilt:

$$\mathbb{P}[\nu_1 = 2\ell] = Q_{2\ell}^{(1)} = \frac{2\ell - 2\ell - 1}{2^{2\ell-2}} - \frac{\binom{2\ell}{\ell}}{2^{2\ell}}$$

  Dies führt zu der folgenden Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\Pi_{2N} = 2k] = {} & \frac{1}{2} \cdot \sum_{\ell=1}^{N} \left( \frac{\binom{2\ell-2}{\ell-1}}{2^{2\ell-2}} - \frac{\binom{2\ell}{\ell}}{2^{2\ell}} \right) \cdot \left( \mathbb{P}[\Pi_{2N-2\ell} = 2k] + \mathbb{P}[\Pi_{2N-2\ell} = 2 \cdot (k - \ell)] \right) \\ & + \mathbb{P}[\Pi_{2N} = 2k, \nu_1 > 2N] \end{aligned}$$

  Wir zeigen:

$$\mathbb{P}[\Pi_{2N} = 2k, \nu_1 > 2N] = \begin{cases} 0 & 0 < k < N \\ \frac{\binom{2N}{N}}{2^{2N+1}} & k = 0, k = N \end{cases} \tag{1}$$

  Beweis:

  (i). Der Fall $0 < k < N$ ist einfach.

  (ii). $k = N$ bzw. $k = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\Pi_{2N} = 2N, \nu_1 > 2N] = \mathbb{P}[\Pi_{2N} = 0, \nu_1 > 2N] &= \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}[\nu_1 > 2N] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}[\nu_1 = 2k]}_{Q_{2k}^{(1)} \overset{1.6.8}{=} P_{2k-2}^{(1)} - P_{2k}^{(1)}} = P_{2N}^{(1)} = \frac{\binom{2N}{N}}{2^{2N}} \end{aligned}$$

Einsetzen in Rekursionsformel von oben + Induktionsvoraussetzung + Lemma 1.6.7 gibt Aussage für $n = N$.

$\square$

**1.6.10** (Beweis von 1.6.6, von Lévy)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[x < \frac{\Pi_{2n}}{2n} \leq y\right] &= \sum_{k=\lfloor n\cdot x\rfloor+1}^{\lfloor n\cdot y\rfloor} \mathbb{P}[\Pi_{2n} = 2k] \\
&\overset{1.6.9}{=} \frac{1}{\Pi} \cdot \sum_{k=\lfloor n\cdot x\rfloor+1}^{\lfloor n\cdot y\rfloor} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\cdot\left(1-\frac{k}{n}\right)}} \cdot \frac{1}{n} \\
&\to \frac{1}{\pi} \cdot \int_x^y \frac{1}{\sqrt{t\cdot(1-t)}}\,dt \qquad (n\to\infty) \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\arcsin\sqrt{y} - \arcsin\sqrt{x}\right)
\end{aligned}$$

(Für Konvergenz: Die Reihe ist gerade die Riemann-Summe des angegebenen Integrals.) Wegen $\Pi_{2n} - 1 \leq \Pi_{2n+1} \leq \Pi_{2n} + 1$ stimmt die Grenzverteilung von $\frac{\Pi_{2n+1}}{2n+1}$ mit der von $\frac{\Pi_{2n}}{2n}$ überein.

## 1.7 Einige Ungleichungen

### 1.7.1 Lemma

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsgrößen mit $\mathbb{E}X_k = 0$ und $\mathbb{V}X_k = \sigma_k$, $|X_k| \leq K$ für $k = 1, \ldots, n$. Sei $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ und $\sigma := \mathbb{V}(S_n)$. Für $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\mathbb{E}\left(e^{\varepsilon\cdot S_n}\right) \leq \exp\left(\varepsilon^2\cdot\sigma^2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\varepsilon\cdot K\cdot e^{\varepsilon\cdot K}\right)\right) \tag{1}$$

Beweis: Es gilt:

$$\mathbb{E}e^{\varepsilon\cdot S_n} \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{k=1}^n \mathbb{E}e^{\varepsilon\cdot X_k}$$

Wegen $|X_k| \leq K$ ist die Reihe

$$e^{\varepsilon\cdot X_k} = \sum_{j=0}^\infty \frac{\varepsilon^j\cdot X_k^j}{j!}$$

gleichmäßig konvergent. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{\varepsilon\cdot X_k} &= \sum_{j=0}^\infty \mathbb{E}\left(\frac{\varepsilon^j\cdot X_k^j}{j!}\right) = 1 + \frac{\varepsilon^2\cdot\sigma_k^2}{2} + \sum_{j=3}^\infty \mathbb{E}\left(\frac{\varepsilon^j\cdot X_k^j}{j!}\right) \qquad (2)\\
&\leq 1 + \frac{\varepsilon^2\cdot\sigma_k^2}{2} + \varepsilon^2\cdot\sigma_k^2\cdot\sum_{j=3}^\infty \frac{(\varepsilon\cdot K)^{j-2}}{j!} \\
&= 1 + \varepsilon^2\cdot\sigma_k^2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot(\varepsilon\cdot K)\cdot e^{\varepsilon\cdot K}\right)
\end{aligned}$$

Verwende dazu, dass

$$\mathbb{E}(X_k^j) \leq \mathbb{E}(|X_k^j|) \leq \sigma_k^2\cdot K^{j-2} \qquad (j\geq 2)$$

und $\frac{1}{j!} \leq \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(j-3)!}$ für $j \geq 3$. Damit:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{\varepsilon\cdot S_n} &\leq \prod_{k=1}^n\left(1+\varepsilon^2\cdot\sigma_k^2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot(\varepsilon\cdot K)\cdot e^{\varepsilon\cdot K}\right)\right) \\
&\leq \exp\left(\varepsilon^2\cdot\sigma^2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\varepsilon\cdot K\cdot e^{\varepsilon\cdot K}\right)\right)
\end{aligned}$$

da $1 + x \leq e^x$.

$\square$

#### 1.7.2 Aufgabe
prooSei $X$ eine Zufallsgröße mit $\mathbb{E}X = 0$. Für $\varepsilon, t > 0$ gilt:

$$\mathbb{P}\left[X > \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(t + \log \mathbb{E}(e^{\varepsilon \cdot X})\right)\right] \le e^{-t}$$

Hinweis: Markov-Ungleichung angewendet auf $Y := e^{\varepsilon \cdot X}$.

#### 1.7.3 Satz (Bernstein'sche Verschärfung der Tschebyscheff-Ungleichung)
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit $\mathbb{E}X_k = \mu_k$ und $|X_k - \mu_k| \le K$ für $k = 1, \ldots, n$. Dann gilt für $0 < \delta \le \left(1 + \frac{e}{6}\right) \cdot \frac{\sigma}{K}$ die Ungleichung

$$\mathbb{P}[|S_n - \mu| \ge \delta \cdot \sigma] \le 2 \cdot \exp\left(-\frac{\delta^2}{2 \cdot \left(1 + \frac{\delta \cdot K \cdot e}{6 \cdot \sigma}\right)^2}\right)$$

Hierbei ist $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ und $\mu := \mathbb{E}S_n$, $\sigma := \mathbb{V}S_n$.

#### Bemerkung
Tschebyscheff-Ungleichung besagt

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}X| > \delta \cdot \sigma] \le \frac{1}{\delta^2}$$

Beweis: Sei $\tilde{S}_n := S_n - \mu$, dann ist $\mathbb{E}\tilde{S}_n = 0$ und nach Satz 1.7.1 und 1.7.2 folgt daher (log von beiden Seiten):

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left[\tilde{S}_n \ge \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(t + \varepsilon^2 \cdot \sigma^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \varepsilon \cdot K \cdot e^{\varepsilon \cdot K}\right)\right)\right] \\ \le\ &\mathbb{P}\left[\tilde{S}_n \ge \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(t + \log \mathbb{E} e^{\varepsilon \cdot \tilde{S}_n}\right)\right] \le e^{-t} \end{aligned}$$

Setze $t := \frac{\lambda^2}{2}$, $\varepsilon := \frac{\lambda}{\sigma}$ für $\lambda > 0$, dann erhält man

$$\mathbb{P}\left[\tilde{S}_n \ge \lambda \cdot \sigma \cdot \left(1 + \frac{\lambda \cdot K}{6 \cdot \sigma} \cdot e^{\frac{\lambda \cdot K}{\sigma}}\right)\right] \le e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

Wendet man diese Ungleichung auf $-\tilde{S}_n$ an, so folgt

$$\mathbb{P}\left[|\tilde{S}_n| \ge \lambda \cdot \sigma \cdot \left(1 + \frac{\lambda \cdot K}{6 \cdot \sigma} \cdot e^{\frac{\lambda \cdot K}{\sigma}}\right)\right] \le 2 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \tag{1}$$

Um das zu vereinfachen beschränken wir uns auf den Fall $\frac{\lambda \cdot K}{\sigma} \le 1$. Weiterhin sei $\delta := \lambda \cdot \left(1 + \frac{\lambda \cdot K}{6 \cdot \sigma} \cdot e^{\frac{\lambda \cdot K}{\sigma}}\right)$, dann ist $\lambda < \delta \le \frac{\sigma}{K} \cdot \left(1 + \frac{e}{6}\right)$ und somit

$$\frac{\delta}{1 + \frac{\delta \cdot K \cdot e}{6 \cdot \sigma}} < \frac{\delta}{1 + \frac{\lambda \cdot K \cdot e}{6 \cdot \sigma}} \overset{\frac{\lambda \cdot K}{\sigma} \le 1}{<} \lambda$$

Hieraus und aus (1) folgt:

$$\mathbb{P}\left[|\tilde{S}_n| > \delta \cdot \sigma\right] < 2 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}} < 2 \cdot \exp\left(-\frac{\delta^2}{2 \cdot \left(1 + \frac{\delta \cdot K \cdot e}{6 \cdot \sigma}\right)^2}\right)$$

□

#### 1.7.4 Folgerung (Bernoulli-Schema)
Sei $A$ ein Ereignis, $p := \mathbb{P}(A) > 0$ und $q := 1 - p$. Sei $h_n(A)$ die relative Häufigkeit von $A$ in $n$ unabhängigen Versuchen. Dann gilt für $0 < \varepsilon < 1.45 \cdot p \cdot q$:

$$\mathbb{P}\left[|h_n(A) - p| \ge \varepsilon\right] \le 2 \cdot \exp\left(-\frac{n \cdot \varepsilon^2}{2 \cdot p \cdot q \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon \cdot e}{6 \cdot p \cdot q}\right)}\right)$$

Beweis: Aufgabe. Hinweis: $\delta := \frac{n \cdot \varepsilon}{\sigma} = \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{p \cdot q}}$ in Satz 1.7.3, $K = 1$. $\square$

**1.7.5 Aufgabe**
Sei $p = \frac{1}{2}$. Wieviele Versuche müssen durchgeführt werden, damit

$$\mathbb{P}\left[\left|h_n(A) - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{1}{100}$$

für $\varepsilon = \frac{1}{20}$ bzw. $\varepsilon = \frac{1}{50}$?
Mögliche Abschätzungen:

(i). mit Tschebyscheff-Ungleichung

(ii). mit Satz 1.7.4

(iii). mit dem zentralen Grenzwertsatz (nur Näherung!)

Lösung:

| $\varepsilon$ | (i) | (ii) | (iii) |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{20}$ | 10.000 | 1261 | $\approx 664$ |
| $\frac{1}{50}$ | 62.500 | 7.112 | $\approx 4.147$ |

# A
# Anhang: Stirling'sche Formel

**A.1 Definition** (Die Bernoulli'schen Zahlen)
Die Bernoulli'schen Zahlen $B_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ werden durch die Gleichung

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \cdot x^n \tag{A.1.1}$$

(Taylor-Entwicklung im Punkt 0) definiert.

Koeffizientenvergleich:

$$\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \dots\right) \cdot \left(B_0 + \frac{B_1}{\cdot} x + \frac{B_2}{\cdot} \frac{x^2}{2} + \dots\right) = 1$$

$$\Rightarrow B_0 = 1 \qquad B_1 + \frac{B_0}{2} = 0 \Rightarrow B_1 = -\frac{1}{2}$$

Allgemein für $n \geq 2$ die Koeffizienten von $x^{n-1}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{B_k}{k!}$$

Erweiterung mit $n!$ gibt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot B_k = 0 \tag{A.1.2}$$

**Bemerkung** (i). Es gilt also insbesondere $B_n \in \mathbb{Q}$.

(ii). Merkregel: $(B+1)^n - B^n = 0$. Nach der Ausführung der $n$-ten Potenz ist $B^k$ durch $B_k$ zu ersetzen.

(iii). Aus (2) folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= B_0 + 2B_1 \\ 0 &= 1 + 3B_1 + 3B_2 \\ 0 &= 1 + 4B_2 + 6B_3 + 4B_4 \\ 0 &= 1 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

also

$$B_1 = -\frac{1}{2} \qquad B_2 = \frac{1}{6} \quad B_3 = 0 \quad B_4 = -\frac{1}{30} \qquad \dots$$

**Lemma**

$$\forall k \in \mathbb{Z} : B_{2k+1} = 0$$

Beweis: Wegen (A.1.1) und $B_1 = -\frac{1}{2}$ gilt

$$1 + \frac{B_2}{2!} \cdot x^2 + \ldots = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$
$$= \frac{x}{2} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}$$

und ist daher eine gerade Funktion. □

**Bemerkung** (i). Gleichung (A.1.1) gilt auch für $x \in \mathbb{C}, |x| < 2\pi$. Wir schreiben $2\imath x$ an Stelle von $x$:

$$x \cdot \cot x = 1 - \frac{2^2 \cdot B_2}{2!} \cdot x^2 + \ldots + (-1)^k \cdot \frac{2^{2k} \cdot B_{2k}}{(2k!)} \cdot x^{2k} + \ldots \tag{A.1.3}$$

für alle $|x| < \pi$.

**A.2 Aufgabe** (i). Es gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} \cdot B_{2k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Man benutze (A.1.3) und die „bekannte“ Gleichung

$$\pi \cdot x \cdot \cot(\pi \cdot x) = 1 + 2 \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^2}{x^2 - n^2} \qquad (x \notin \mathbb{Z})$$

und ersetze hier $\frac{x^2}{x^2 - n^2}$ durch die Potenzreihe nach $x$:

$$\frac{x^2}{x^2 - n^2} = -\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{x^2}{n^2}\right)^k \qquad n \in \mathbb{N}, |x| < n$$

(ii). Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$4 \cdot \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} > (-1)^n \cdot B_{2n} > 2 \cdot \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}$$

und folglich $|B_{2n}| \to \infty$ für $n \to \infty$. Sogar: $\left|\frac{B_{2n+2}}{B_n}\right| \to \infty$.

Hinweis:

$$1 < \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^{2k}} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} < 2$$

(iii). Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + 2k)^{2k}} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{2^{2k} - 1}{2 \cdot (2k)!} \cdot \pi^{2k} \cdot B_{2k}$$

**Bemerkung** (i). Aus A.2(i) folgt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

**A.3 Aufgabe**
Die Gamma-Funktion wird durch

$$\Gamma(x) := \int_{(0,\infty)} t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt \qquad (x > 0)$$

definiert. Zeige:

(i). $\Gamma(x)$ existiert für alle $x > 0$ und $\Gamma$ ist stetig.

(ii). $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$

(iii). $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$

(iv). $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Hinweise:

(i). Stetigkeitssatz für parametrisierte Integrale

(ii). partielle Integration

(iii). Induktion

(iv). Substitution ($t = u^2$)

**A.4 Satz** (Binet)
Für $x > 0$ gilt

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \cdot \sqrt{2\pi \cdot x} \cdot e^{\theta(x)}$$

wobei

$$\theta(x) := \int_{(0,\infty)} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-x \cdot t} \cdot \frac{1}{t}\, dt$$

**Bemerkung** (i). Integral existiert (Majorante $C \cdot e^{-x \cdot t}$, vgl. (A.1.1) und beachte $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$)

(ii). $\theta$ ist stetig

(iii). $\lim_{x\to\infty} \theta(x) = 0$ (dominierte Konvergenz)

**A.5 Satz** (Stirling'sche Formel)

$$n! = \Gamma(n+1) \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi \cdot n}$$

Notation: $f(n) \sim g(n), n \to \infty :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$

Beweis: Folgt aus (A.4) wegen $\lim_{x\to\infty} \theta(x) = 0$. □

Asymptotische Entwicklung von Stirling:

$$\theta(n) \sim \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j}}{2j \cdot (2j-1) \cdot n^{2j-1}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{360} \cdot \frac{1}{n^3} + \frac{1}{1260} \cdot \frac{1}{n^5} - \dots$$

Die Reihe ist divergent (siehe A.2(ii)). Das Zeichen $\sim$ bedeutet hier, dass

$$\left|\theta(n) - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n}\right| = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\left|\theta(n) - \left(\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{360} \cdot \frac{1}{n^3}\right)\right| = O\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

Mit Hilfe der Binet'schen Formel können wir nun eine stärkere Aussage zeigen. Es gilt

$$\sum_{j=1}^{2N} \frac{B_{2j}}{(2j)!} \cdot t^{2j-1} < \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} < \sum_{j=1}^{2N+1} \frac{B_{2j}}{(2j)!} \cdot t^{2j-1} \tag{A.5.1}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ (vgl. Pólya, Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Part I, Kapitel 4, Aufgabe 154). Definition von $\theta$:

$$\sum_{j=1}^{2N} \frac{B_{2j}}{(2j) \cdot (2j-1) \cdot n^{2j-1}} < \theta(n) < \sum_{j=1}^{2N+1} \frac{B_{2j}}{2j \cdot (2j-1) \cdot n^{2j-1}}$$

Zum Beispiel gilt

$$\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{360}\cdot\frac{1}{n^3}<\theta(n)<\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n} \tag{A.5.2}$$

Beweismethode für Satz A.4: Wir definieren $\varphi$ durch

$$\Gamma(x+1)=\left(\frac{x}{e}\right)^x\cdot\sqrt{2\pi\cdot x}\cdot e^{\varphi(x)} \tag{A.5.3}$$

Die Binet'sche Formel besagt dann gerade $\varphi(x)=\theta(x)$. Für $\varphi$ gilt

$$e^{\varphi(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{(0,\infty)}\sqrt{x}\cdot(t\cdot e^{1-t})^x\,dt \tag{A.5.4}$$

(Definition von $\Gamma$ und Substitution $t\cdot x=y$) Wir beweisen die Gleichung $\theta=\varphi$, in dem wir zeigen, dass $\theta$ und $\varphi$ eine bestimmte Differenzengleichung erfüllen und $\theta\left(\frac{1}{2}\right)=\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$.

**A.6 Lemma**
Sei $x>0$ und $a>-x$, dann gilt

$$f(x):=\int_{(0,\infty)}\frac{e^{-x\cdot t}-e^{-(x+a)\cdot t}}{t}\,dt=\log\left(1+\frac{a}{x}\right)=:g(x) \tag{A.6.1}$$

Beweis: Aus $f'(x)=g'(x)$ und $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$ folgt, dass $f(x)=g(x)$ für alle $x>0$. □

**Bemerkung** (i). Die Differentiation unter dem Integral lässt sich vermeiden, wenn man die Gleichheit

$$\frac{1}{t}=\int_{(0,\infty)}e^{-s\cdot t}\,ds$$

und den Satz von Fubini benutzt.

**A.7 Lemma**
Für alle $x>0$ gilt

$$\varphi(x)-\varphi(x+1)=\theta(x)-\theta(x+1)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1=:g(x) \tag{A.7.1}$$

Beweis: Die Gleichung $\varphi(x)-\varphi(x+1)=g(x)$ folgt aus (A.5.3) mit Hilfe der Gleichung

$$\Gamma(x+2)=(x+1)\cdot\Gamma(x+1)$$

Außerdem gilt

$$\lim_{x\to\infty}\theta(x)-\lim_{x\to\infty}\theta(x+1)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$$

Zeige: $\theta(x)-\theta(x+1)=g(x)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\theta'(x)-\theta'(x+1)&=\int_{(0,\infty)}\frac{e^{-x\cdot t}-e^{-(x+1)\cdot t}}{t}-\frac{e^{-x\cdot t}-e^{-(x+1)\cdot t}}{2}\,dt\\&\overset{A.6}{=}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)=g'(x)\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

**A.8 Lemma**

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\theta\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\log 2$$

Beweis:
- Da $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$ (siehe (A.5.3)), damit folgt $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\log 2$.

- Berechnung von $\theta\left(\frac{1}{2}\right)$ (nach A. Pringsheim): Substituiere $t \mapsto \frac{1}{2}\cdot t$ in der Definition von $\theta$:

$$\begin{aligned}
\theta(1) &= \int_{(0,\infty)} \left(\frac{1}{e^{\frac{t}{2}}-1} - \frac{2}{t} + \frac{1}{2}\right)\cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{t}\,dt \\
\Rightarrow \theta\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\theta\left(\frac{1}{2}\right) - \theta(1)\right) + \theta(1) \\
&= \int_{(0,\infty)} \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t} - \frac{1}{e^t-1}\right)\cdot \frac{1}{t}\,dt + \int_{(0,\infty)} \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\cdot e^{-t}\cdot\frac{1}{t}\,dt \\
&= \int_{(0,\infty)} \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\cdot t} - e^{-t}}{t} - \frac{1}{2}\cdot e^{-t}\right)\cdot \frac{1}{t}\,dt \\
&= \int_{(0,\infty)} -\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\cdot t} - e^{-t}}{t}\right) - \frac{e^{-\frac{1}{2}\cdot t} - e^{-t}}{2t}\,dt
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus Lemma A.6. Dabei benutzt:

$$\theta\left(\frac{1}{2}\right) - \theta(1) = \int_{(0,\infty)} \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{e^{\frac{t}{2}}-1} + \frac{1}{t}\right)\cdot e^{-\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

mit

$$\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{e^{\frac{t}{2}}-1} = -\frac{e^{\frac{t}{2}}}{e^t-1}$$

□

**A.9**Beweis: (von A.4) Nach Lemma A.7 ist

$$\theta(x) - \theta(x+1) = \varphi(x) - \varphi(x+1)$$

also folgt durch Ersetzen von $x$ durch $x, x+1, \dots, x+n-1$ und addieren der $n$ Gleichungen (Teleskopsumme):

$$\theta(x) - \theta(x+n) = \varphi(x) - \varphi(x+n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \theta(x+n) = 0$ folgt hieraus

$$\theta(x) = \varphi(x) - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \varphi(x+n)}_{=:h(x)}$$

Wir zeigen:

(i). $h$ ist monoton fallend

(ii). $h$ ist periodisch

(iii). $h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

Dann folgt $h = 0$.

(i). $h$ monoton fallend: Seien $0 \le y \le x$ und $0 \le p \le 1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+n}\cdot p^{x+n} - \sqrt{y+n}\cdot p^{y+n} &\le \sqrt{x+n}\cdot p^{y+n} - \sqrt{y+n}\cdot p^{y+n} \\
&\le \left(\sqrt{x+n} + \sqrt{y+n}\right)\cdot p
\end{aligned}$$

Aus $0 \le t\cdot e^{1-t} \le 1$ für alle $t \ge 0$ und der Definition von $\varphi$ folgt, dass

$$e^{\varphi(x+n)} - e^{\varphi(y+n)} \le \left(\sqrt{x+n} - \sqrt{y+n}\right)\cdot e^{\varphi(1)}$$

Für $\lim_{n\to\infty}$ erhält man:

$$e^{h(x)} - e^{h(y)} \le 0$$

also $h(x) \le h(y)$.

(ii). $h$ periodisch: Klar, Periode 1.

(iii). $h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ wegen A.8

□

Andere Zugänge zu der Stirling'schen Formel:

**A.10**
Es ist bekannt, dass aus $y_n > 0$, $y_n \to y$ folgt:

$$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} y_j} \to y \qquad (n \to \infty)$$

(Anwenden von log auf linke Seite ...) Mit $y_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ gilt $y_n \to e$ und folglich

$$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^j} \to e \qquad (n \to \infty)$$

mit

$$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^j} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}$$

**A.11 Aufgabe**
Es seien $-\infty < a < x_0 < b < \infty$ und $k > 0$. Zu zeigen:

$$\int_a^b \exp\left(-k \cdot n \cdot (x - x_0)^2\right) dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{k \cdot n}} \qquad (n \to \infty)$$

Hinweis: Substituiere $t := \sqrt{k \cdot n} \cdot (x - x_0)$, dann erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{k \cdot n}} \cdot \underbrace{\int_{-\sqrt{k \cdot n} \cdot (x_0 - a)}^{\sqrt{k \cdot n} \cdot (x_0 - a)} e^{-t^2}\, dt}_{\to \sqrt{\pi}}$$

**A.12 Satz**
Seien $a, b \in \bar{\mathbb{R}}, a < b$ und $g, h : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig mit den folgenden Eigenschaften:

(i). $g \cdot e^{n \cdot h} \in L^1((a, b))$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(ii). $h$ erreicht an einer Stelle $x_0 \in (a, b)$ ihr absolutes Maximum und in jedem abgeschlossenen Teilintervall $A$, das $x_0$ nicht enthält, gilt

$$\sup_{x \in A} h(x) < h(x_0)$$

(iii). $h \in C^2((a, b))$ und $h''(x_0) < 0$, $g(x_0) \neq 0$

Dann gilt

$$\int_a^b g(x) \cdot e^{n \cdot h(x)}\, dx \sim g(x_0) \cdot e^{n \cdot h(x_0)} \cdot \sqrt{-\frac{2\pi}{n \cdot h''(x_0)}} \qquad (n \to \infty)$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < -h''(x_0)$. Wir wählen $\delta > 0$ so, dass $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$ und

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \qquad\qquad |h''(x) - h''(x_0)| < \varepsilon \qquad (\text{A.12.1})$$

für alle $|x - x_0| < \delta$.

$$\int_a^b g(x) \cdot e^{n\cdot(h(x)-h(x_0))}\,dx = \underbrace{\int_{|x-x_0|<\delta} g(x) \cdot e^{n\cdot(h(x)-h(x_0))}\,dx}_{=:I_1} + \underbrace{\int_{|x-x_0|\geq\delta} g(x) \cdot e^{n\cdot(h(x)-h(x_0))}\,dx}_{=:I_2}$$

Wegen (ii) existiert $\alpha > 0$, sodass $h(x) - h(x_0) \leq -\alpha$, wenn $|x - x_0| \geq \delta$. Dann gilt:

$$|I_2| \leq e^{-(n-1)\cdot\alpha} \cdot \int_a^b |g(x)| \cdot e^{h(x)-h(x_0)}\,dx \tag{A.12.2}$$

Taylor-Entwicklung von $x \mapsto h(x) - h(x_0)$ im Punkt $x_0$ (bis zum Glied 2. Ordnung):

$$h(x) - h(x_0) = \frac{1}{2} \cdot (x - x_0)^2 \cdot h''(\xi(x)) \qquad (x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$$

für ein $\xi(x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Damit:

$$\begin{aligned}&(g(x_0) - \varepsilon) \cdot \int_{|x-x_0|\leq\delta} e^{\frac{n}{2}\cdot(x-x_0)^2\cdot(h''(x_0)-\varepsilon)}\,dx \\ \leq I_1 \leq\ &(g(x_0) + \varepsilon) \cdot \int_{|x-x_0|\leq\delta} e^{\frac{n}{2}\cdot(x-x_0)^2\cdot(h''(x_0)+\varepsilon)}\,dx\end{aligned}$$

Nach A.11 sind diese Integrale asymptotisch gleich zu

$$(g(x_0) \pm \varepsilon) \cdot \sqrt{-\frac{2\pi}{(h''(x_0) \pm \varepsilon) \cdot n}} \tag{A.12.3}$$

Aus (A.12.2) und (A.12.3) folgt die Behauptung. □

**A.13 Aufgabe**
Mit Hilfe von A.12 zu zeigen:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi \cdot n} \qquad (n \to \infty)$$

Hinweis: Es gilt

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^n\,dx = n^{n+1} \cdot \int_0^\infty (e^{-x} \cdot x)^n\,dx$$

Wende A.12 an mit $a = 0$, $b = \infty$, $g(x) := 1$ und $h(x) := \ln(e^{-x} \cdot x) = \ln x - x$ (dann $x_0 = 1$).

**A.14 Satz**
Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) \to 0$ monoton für $x \to \infty$. Dann existiert der (endliche) Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}f(1) + \sum_{j=2}^{n-1} f(j) + \frac{1}{2}f(n) - \int_1^n f(x)\,dx\right) =: s$$

und zwar ist

$$\frac{1}{8} \cdot f'(n) < \frac{1}{2}f(1) + \sum_{j=2}^{n-1} f(j) + \frac{1}{2}f(n) - \int_1^n f(x)\,dx - s < 0$$

falls $f'$ monoton wachsend. (Für $f'$ monton fallend: Relationszeichen umdrehen.)

Beweis: Sei $F(x) := \int_1^x f(t)\,dt$. Für $m \in \mathbb{N}, m \leq n - 1$ existieren $\xi_m, \eta_m$ mit

$$m < \xi_m < m + \frac{1}{2} < \eta_m < m + 1$$

$$F\left(m + \frac{1}{2}\right) - F(m) = \frac{1}{2}f(m) + \frac{1}{8}f'(\xi_m)$$

$$F(m+1) - F\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}f(m+1) - \frac{1}{8} \cdot f'(\eta_m)$$

(Taylorentwicklung von $F$ in $m$ ausgewertet an $m + \frac{1}{2}$ bzw. Taylorentwicklung von $F$ in $m+1$ ausgewertet an $m + \frac{1}{2}$) Addition der Gleichungen gibt (mit $F(1) = 0$):

$$\frac{1}{2}f(1) + \sum_{j=2}^{n-1} f(j) + \frac{1}{2}f(n) - F(n) = \frac{1}{8} \cdot \left( \sum_{j=1}^{n-1} f'(\eta_j) - f'(\xi_j) \right)$$

$$\to s \qquad (n \to \infty)$$

für ein $s \in \mathbb{R}$ nach dem Satz von Leibniz. Die rechte Seite der obigen Gleichung ist

$$s - \frac{1}{8} \cdot \left( \sum_{j=n}^{\infty} f'(\eta_j) - f(\xi_j) \right)$$

Hieraus und aus

$$\frac{1}{8} \cdot f'(n) < \frac{1}{8} \cdot f'(\xi_n) < -\frac{1}{8} \cdot \sum_{j=n}^{\infty} f'(\eta_j) - f'(\xi_j) < 0$$

folgt die letzte Aussage. □

**A.15 Aufgabe**

Mit Hilfe von A.13 und A.14 ist zu zeigen, dass

$$\ln n! = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi} + \theta(n)$$

mit $0 < \theta(n) < \frac{1}{8n}$.

Hinweis: Wähle $f(x) := -\ln x$ in A.14.

**A.16 Aufgabe**

$$\lim_{n\to\infty} \left( \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln n \right) =: c < \infty$$

und es gilt

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} < \left( \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln n \right) - c < \frac{1}{2n}$$

$c \approx 0.5772156$ heißt die Euler'sche Konstante.