Technische Universität Dresden

Skript:

Partielle Differentialgleichungen I

Verfasser Franziska Kühn

Daten Prof. Dr. Jürgen Voigt
Sommersemester 2011
Hauptstudium

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Partielle Differentialgleichung

$$F\left(x, u, \frac{\partial}{\partial x_1}u, \frac{\partial}{\partial x_2}u, \dots, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1}u, \dots\right) = 0$$

für $u = u(x)$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Damit keine Theorie möglich! Betrachtung spezieller Typen notwendig. Einige Beispiele:

(i). Wärmeleitungsgleichung:

$$u_t = \Delta u$$

mit $u = u(t,x), u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$u_t := \frac{\partial}{\partial t}u =: \partial_t u \qquad \Delta u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}u$$

Problem: Gegeben $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, ... Gesucht $u : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig,... mit $u\big|_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^n} \in C^2$,

$$\forall t > 0, x \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \Delta u(x,t)$$
$$u(0,\cdot) = u_0$$

Physikalischer Hintergrund: $u(t,\cdot)$ ist Temperaturverteilung zur Zeit $t \geq 0$, unendlich ausgedehntes homogenes Medium.

(ii). Wellengleichung:

$$u_{tt} = \Delta u$$

Problem: Gegeben $u_0, u_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, ... Gesucht $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $\partial_t^2 u(t,x) = \Delta u(t,x)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $u(0,\cdot) = u_0$, $u_t(0,\cdot) = u_1$.

Physikalischer Hintergrund:

(1) $n = 1$: schwingende Saite (für kleine Auslenkungen)
(2) $n = 2$: schwingende Membran (für kleine Auslenkungen)
(3) $n = 3$: schwingendes Medium (für kleine Auslenkungen), z.B. Schallwellen, elektromagnetische Wellen (→ Maxwell-Gleichungen)

(iii). Potentialgleichung:

$$\Delta u = 0$$

Problem: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, „schöner Rand“. Gegeben $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Gesucht $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig mit $u\big|_{\Omega} \in C^2, \Delta u(x) = 0$ für $x \in \Omega$, $u\big|_{\partial\Omega} = f$. (Dirichlet-Problem)

Physikalischer Hintergrund: stationärer Fall von (i),(ii)

Folland: (i)-(iii) „great trinity“. Typen:

(i). parabolische Gleichungen

(ii). hyperbolische Gleichungen

(iii). elliptische Gleichungen

Nicht von diesem Typ:

(iv). Schrödinger-Gleichung:

$$u_t = -\imath\,(-\Delta u + V \cdot u)$$

wobei $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Potential.

Problem: Gegeben $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Gesucht $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ... mit $u_t = -\imath\,(\Delta u + V \cdot u)$ und $u(0, \cdot) = f$.

Physikalisch: $|u(t, \cdot)|^2$ ist Wahrscheinlichkeitsverteilung eines quantenmechanischen Teilchens zur Zeit t, das sich im Potential V bewegt. Behandlung in $L^2(\mathbb{R}^n)$, Funktionalanalysis

Drei Forderungen an Lösungstheorien:

(i). Eindeutigkeit der Lösung

(ii). Existenz der Lösung

(iii). Stabilität der Lösung, d.h. kleine Änderungen der Daten führen zu kleinen Änderungen der Lösungen.

1

Transportgleichung und Wellengleichung in einer Raumdimension

Zwei explizit lösbare Gleichungen!

1.1 Lineare Transportgleichung

$$\partial_t u + b(t,x) \cdot \partial_x u = 0$$

(1. Ordnung, zwei unabhängige Variablen) wobei $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, vorgegeben. Gesucht $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $u = u(t,x)$. (b: Geschwindigkeit)

(i). Einfachster Fall: $b(t,x) = c$ konstant

Angenommen $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ist Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x u &= 0 \\ u(0,\cdot) &= u_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Für $t, y \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\frac{d}{dt} u(t, y + c \cdot t) = \partial_t u(t, y + c \cdot t) + c \cdot \partial_x u(t, y + c \cdot t) = 0$$

Somit

$$\begin{aligned} u(t, y + c \cdot t) &= u(0, y + c \cdot 0) = u_0(y) \\ \Rightarrow u(t,x) &= u_0(x - c \cdot t) \end{aligned}$$

Ist $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, dann ist dies offenbar die Lösung von (1.1). Damit:

1.1 Satz

Sei $c \in \mathbb{R}$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Dann hat (1.1) die eindeutige Lösung

$$u(t,x) = u_0(x - c \cdot t)$$

Beweis: Klar. □

(ii). Für nicht-konstantes b: Angenommen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$x' = b(t,x)$$

Angenommen u ist Lösung der linearen Transportgleichung, dann

$$\frac{d}{dt} u(t, x(t)) = \partial_t u(t, x(t)) + \underbrace{x'(t)}_{b(t,x)} \cdot \partial_x u(t, x(t)) = 0$$

also u konstant auf $t \mapsto (t, x(t))$ („charakteristische Kurven“; typisch bei Differentialgleichungen 1.Ordnung),

$$u(t, x(t)) = u(0, x(0))$$

Beispiel: $b(t,x) = 2tx$. Löse

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2tx \\ \Rightarrow \int \frac{dx}{x} &= \int 2t\,dt \\ \Rightarrow \ln x &= t^2 + c \\ \Rightarrow x &= e^{t^2+c} = x_0 \cdot e^{t^2} \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned} u(t, x_0 \cdot e^{t^2}) &= u(0, x_0 \cdot e^0) = u_0(x_0) \\ \Rightarrow u(t,x) &= u_0(x \cdot e^{-t^2}) \end{aligned}$$

Dies löst wirklich die Transportgleichung.

Nun: inhomogene Transportgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u + c \cdot \partial_x u &= f(t,x) \\ u(0,\cdot) &= u_0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Vorgehen wie oben: Angenommen u ist eine Lösung von (1.2), dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t, y + c\cdot t) &= \partial_t u(t, y+c\cdot t) + c \cdot \partial_x u(t, y + c\cdot t) = f(t, y + c \cdot t) \\ \Rightarrow u(t, y + c \cdot t) - u(0,y) &= \int_0^t f(s, y + c \cdot s)\,ds \\ \Rightarrow u(t,x) - u(0, x - c\cdot t) &= \int_0^t f(s, x - c \cdot t + c \cdot s)\,ds \end{aligned}$$

1.2 Satz

Sei $c \in \mathbb{R}$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und stetig differenzierbar nach der zweiten Variable. Dann hat das Anfangswertproblem (1.2) die eindeutige Lösung

$$u(t,x) = u_0(x - ct) + \int_0^t f(s, x - ct + cs)\,ds \tag{*}$$

Beweis: Oben gezeigt: Jede Lösung ist von dieser Form. Bleibt zu zeigen: $(*)$ ist Lösung (Übung). □

1.2 Wellengleichung

$$\partial_t^2 u = c^2 \cdot \partial_x^2 u$$

(2. Ordnung, 2 Variablen) mit $c > 0$ vorgegeben (wird Wellengeschwindigkeit). Gesucht: $u = u(t,x)$, $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Physikalisch: $u(t,\cdot)$ beschreibt kleine Auslenkung einer Saite unter Spannung zur Zeit t. Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 \overset{!}{=} (\partial_t^2 - c^2 \cdot \partial_x^2) u &= (\partial_t + c \cdot \partial_x) \cdot (\partial_t - c \cdot \partial_x) u \\ &= (\partial_t - c \cdot \partial_x) \cdot (\partial_t + c \cdot \partial_x) u \end{aligned}$$

Ist $(\partial_t - c \cdot \partial_x) u = 0$ oder $(\partial_t + c \cdot \partial_x) u = 0$, dann ist u Lösung. Somit

$$u(t,x) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

für $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$ Lösung (Superpositionsprinzip, da Gleichung linear). Wir werden zeigen: Alle Lösungen sind von dieser Form.
Jetzt Annahme: u löst Anfangswertproblem (=„Cauchy-Problem“)

$$\partial_t^2 u = c^2 \cdot \partial_x^2 u \qquad u(0,\cdot) =: f \qquad \partial_t u(0,\cdot) =: g \tag{*}$$

Sei $v := \partial_t u + c \cdot \partial_x u$. Dann

$$\partial_t v - c \cdot \partial_x v = (\partial_t^2 - c^2 \cdot \partial_x^2) u = 0 \qquad v(0,\cdot) = g + c \cdot f'$$

Aus Satz 1.1:

$$v(t,x) = (g + c \cdot f')(x + ct)$$

Nun für u:

$$\partial_t u + c \cdot \partial_x u = v \qquad u(0,\cdot) = f$$

Mit Satz 1.2:

$$\begin{aligned}
u(t,x) - f(x - ct) &= \int_0^t v(s, x - ct + cs)\, ds \\
&= \int_0^t (g + cf')(\underbrace{x - ct + 2cs}_{=:\tau})\, ds \\
&= \frac{1}{2c} \cdot \int_{x-ct}^{x+ct} (g + cf')(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{1}{2} \cdot \big(f(x+ct) - f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c} \cdot \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)\, d\tau
\end{aligned}$$

1.3 Satz (Existenz und Eindeutigkeit)

Seien $f \in C^2(\mathbb{R}), g \in C^1(\mathbb{R})$. Dann hat $(*)$ die eindeutige Lösung

$$\frac{1}{2} \cdot \big(f(x+ct) - f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c} \cdot \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds$$

(d'Alembertsche Formel)

Beweis: Eindeutigkeit siehe oben. Noch zu zeigen: u ist Lösung. Dazu:

$$G(x) := \int_0^x g(s)\, ds$$

Dann $G \in C^2(\mathbb{R})$. Mit $\varphi := \frac{1}{2} f + \frac{1}{2c} G$, $\psi := \frac{1}{2} f - \frac{1}{2c} G$ gilt:

$$u(t,x) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

ist Lösung (siehe oben) und

$$\begin{aligned}
u(0,\cdot) &= \psi + \varphi = f \\
\partial_t(u,\cdot) &= c \cdot \varphi' - c \cdot \psi' = \frac{c}{2c} G' + \frac{c}{2c} G' = G' = g
\end{aligned}$$

□

1.4 Satz (Stabilität)

Seien u_1, u_2 Lösungen von $\partial_t^2 u = c^2 \cdot \partial_x^2 u$ mit $u_j(0,\cdot) = f_j$, $\partial_t u_j(0,\cdot) = g_j$ $(j = 1, 2)$. Für $t, x \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$|u_1(t,x) - u_2(t,x)| \le \|f_1 - f_2\|_\infty + |t| \cdot \|g_1 - g_2\|_\infty$$

Beweis: $u := u_1 - u_2$ ist Lösung mit $u(0,\cdot) = f := f_1 - f_2$, $\partial_t u(0,\cdot) = g := g_1 - g_2$. Aus Satz 1.3:

$$\begin{aligned} |u(t,x)| &\leq \frac{1}{2}|f(x+ct)| + \frac{1}{2}|f(x-ct)| + \frac{1}{2c} \cdot \int_{x-ct}^{x+ct} |g(s)|\,ds \\ &\leq \|f\|_\infty + |t| \cdot \|g\|_\infty \end{aligned}$$

□

Bemerkungen:

(i). Für $t, x \in \mathbb{R}$ gehen in $u(t,x)$ nur die Werte von f und g auf $[x - |t| \cdot c, x + |t| \cdot c]$ ein („Abhängigkeitsgebiet von (t,x)“).

(ii). Die Werte von f, g auf einem Intervall $[a,b]$ bestimmen u auf der Menge $\{(t,x); a + c \cdot |t| \leq x \leq b - c \cdot |t|\}$ („Bestimmtheitsgebiet“).

(iii). Werte von f, g in x_0 haben Einfluss auf u nur auf $\{(t,x); x_0 - c \cdot |t| \leq x \leq x_0 + c \cdot |t|\}$ („Einflussgebiet“).

2 Harmonische Funktionen

1. Ziel: Eindeutigkeit der Lösung des Dirichlet-Problems

$$\Delta u = 0 \,\text{in}\, \Omega \qquad u\big|_{\partial\Omega} = \varphi$$

Definition:

(i). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$. u harmonisch $:\Leftrightarrow u \in C^2(\Omega), \Delta u = 0$.

Beispiele:

(i). Sei u affin-linear, d.h.

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j + b$$

dann u harmonisch. Für $n = 1$: $u'' = 0 \Rightarrow u$ affin linear.

(ii). Sei

$$u(x) := \begin{cases} \ln|x| & n = 2 \\ \frac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases}$$

Dann u harmonisch (Übung 2, Aufgabe 7).

Bemerkung:

- Harmonische Funktionen haben ähnliche Eigenschaften wie holomorphe. (Ist f holomorph, so sind $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ harmonisch.)

2.1 Satz (Mittelwerteigenschaft)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Dann äquivalent:

(i). u harmonisch.

(ii). u hat die Mittelwerteigenschaft, d.h.: Ist $x \in \Omega$, $r > 0$, sodass $B[x,r] \subseteq \Omega$, dann

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1}\cdot\sigma_{n-1}} \cdot \int_{|y-x|=r} u(y)\,dS(y) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \cdot \int_{\xi\in S_{n-1}} u(x + r\cdot\xi)\,dS(\xi)$$

mit σ_{n-1} $(n-1)$-dimensionales Volumen von $S_{n-1} = \partial B_{\mathbb{R}^n}(0,1)$,

$$\sigma_{n-1} = n \cdot w_n \qquad w_n = \operatorname{vol}_n(B(0,1)) = \pi^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\right)^{-1} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

Beweis: Vorbetrachtung: Für $u \in C^2(\Omega)$, $x \in \Omega$, $r > 0$ mit $B[x,r] \subseteq \Omega$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\int_{S_{n-1}} u(x+r\cdot\xi)\,dS(\xi) &\overset{\text{Ü1}}{=} \int_{S_{n-1}} \xi\cdot\operatorname{grad} u(x+r\cdot\xi)\,dS(\xi) \\ &= \frac{1}{r^{n-1}}\cdot\int_{\partial B(x,r)} (\nabla u(x+y)|\nu(y))\,dS(y) \\ &\overset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{r^{n-1}}\cdot\int_{B(x,r)} \underbrace{\operatorname{div}\nabla}_{\Delta} u\cdot u(y)\,dy \qquad (*)\end{aligned}$$

wobei $\nu(y)$ die äußere Einheitsnormale bezeichne.

(i). $(i) \Rightarrow (ii)$: Rechte Seite = 0 in $(*)$, somit

$$r \mapsto \int_{S_{n-1}} u(x + r \cdot \xi)\, dS(\xi)$$

konstant. Für $r \to 0$:

$$\int_{S_{n-1}} \underbrace{u(x + r \cdot \xi)}_{\to u(x)\,\text{glm}}\, dS(\xi) \to \int_{S_{n-1}} u(x)\, dS(\xi) = \sigma_{n-1} \cdot u(x)$$

(ii). $(ii) \Rightarrow (i)$: Linke Seite in $(*)$ ist $= 0$, also auch rechte Seite. Da Δu stetig ist, folgt $\Delta u = 0$.

□

Wir werden bald zeigen: $u \in C(\Omega)$ hat Mittelwerteigenschaft $\Rightarrow$ u beliebig oft differenzierbar, d.h. $u \in C^\infty(\Omega)$. Damit folgt $(ii) \Rightarrow (i)$ auch für $u \in C(\Omega)$.

2.2 Lemma

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C(\Omega)$. Dann äquivalent:

(i). u hat Mittelwerteigenschaft.

(ii). Für alle $x \in \Omega$, $r > 0$ mit $B[x, r] \subseteq \Omega$:

$$u(x) = \frac{1}{r^n \cdot w_n} \cdot \int_{B(x,r)} u(y)\, dy$$

Beweis: Seien $x \in \Omega$, $r > 0$ mit $B[x, r] \subseteq \Omega$. Dann

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} u(y)\, dy &= \int_{B(0,r)} u(x + y)\, dy \\
&\overset{\text{vPk}}{=} \int_{\varrho=0}^{r} \int_{|y|=\varrho} u(x + y)\, dS(y)\, d\varrho \\
r^n \cdot w_n u(x) &= \frac{1}{n} \cdot r^n \cdot \sigma_{n-1} \cdot u(x) \\
&= \sigma_{n-1} \cdot u(x) \cdot \int_0^r \varrho^{n-1}\, d\varrho
\end{aligned}$$

Somit: Aus

$$\int_{|y|=\varrho} u(x + y)\, dS(y) = \varrho^{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \cdot u(x)$$

für alle x, ϱ mit $B[x, \varrho] \subseteq \Omega$ folgt

$$\int_{B(x,r)} u(y)\, dy = r^n \cdot w_n \cdot u(x)$$

für alle x, r mit $B[x, r] \subseteq \Omega$. Umkehrung gilt auch (gleiche Stammfunktion, an r variieren). □

Jetzt: Maximum-Prinzip für (sub-)harmonische Funktionen.

Definition:

(i). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C(\Omega)$. u heißt subharmonisch $:\Leftrightarrow \forall x \in \Omega, r > 0$ mit $B[x, r] \subseteq \Omega$:

$$u(x) \leq \frac{1}{r^{n-1} \cdot \sigma_{n-1}} \cdot \int_{|y-x|=r} u(y)\, dS(y)$$

Bemerkungen:

(i). u hat Mittelwerteigenschaft $\Leftrightarrow$ $\pm u$ subharmonisch (ii). Für $u \in C^2(\Omega)$: u subharmonisch $\Leftrightarrow \Delta u \geq 0$ (Übung 3)

2.3 Satz (Maximumprinzip)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C(\Omega)$ subharmonisch. Dann

(i). Sei Ω zusammenhängend, $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \sup_{x\in\Omega} u(x)$. Dann gilt $u(x) = u(x_0)$ für alle $x \in \Omega$.

(ii). Sei Ω beschränkt, u stetig auf $\bar{\Omega}$ fortsetzbar. Dann nimmt u sein Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ an.

Bemerkungen: Sei M ein metrischer Raum. (Allgemeiner: topologischer Raum)

(i). M heißt zusammenhängend $:\Leftrightarrow$ M nicht disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen.

(ii). $A \subseteq M$ zusammenhängend $:\Leftrightarrow$ A als metrischer Raum zusammenhängend.

(iii). M wegzusammenhängend $:\Leftrightarrow \forall x, y \in M \exists \varphi : [0,1] \to M$ stetig mit $\varphi(0) = x, \varphi(1) = y$.

Beweis: von Satz 2.3

(i). Sei $A := \{x \in \Omega; u(x) = u(x_0)\} = u^{-1}(\{u(x_0)\})$. Dann A abgeschlossen in Ω. Sei $x \in A$, $r > 0$, sodass $B(x,r) \subseteq \Omega$. Aus $u(y) \leq u(x_0)$ $(y \in B(x,r))$ und Mittelwertungleichung $(0 < \varrho < r)$

$$u(x_0) = u(x) \leq \frac{1}{\varrho^{n-1} \cdot \sigma_{n-1}} \cdot \int_{\partial B(x,\varrho)} \underbrace{u(y)}_{\leq u(x_0)} \; dS(y)$$

folgt $u(y) = u(x)$ für $y \in B(x,r)$, d.h. $B(x,r) \subseteq A$. Also A offen. Wegen $A \neq \varnothing$ folgt $A = \Omega$, da Ω zusammenhängend. Damit $u = u(x_0)$.

(ii). Es gibt $x_0 \in \bar{\Omega}$ mit $u(x_0) = \sup_{x\in\bar{\Omega}} u(x)$, da $\bar{\Omega}$ kompakt. Ist $x_0 \in \partial\Omega$, dann fertig. Ist $x_0 \in \Omega$, so gibt es $x_1 \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ mit $r := |x_1 - x_0| = \inf\{|x - x_0|; x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega\}$. u ist konstant auf $B(x_0, r)$ nach Teil (i), $u = u(x_0)$, daher auch $u(x_1) = u(x_0)$ und $x_1 \in \partial\Omega$.

□

2.4 Satz (Eindeutigkeit und Stabilität für das Dirichlet-Problem)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Seien $u_1, u_2 : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig, $u_1|_\Omega, u_2|_\Omega$ harmonisch. Dann gilt

$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq \|u_1|_{\partial\Omega} - u_2|_{\partial\Omega}\|_\infty$$

(Insbesondere: $u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega} \Rightarrow u_1 = u_2$)

Beweis: Betrachte $u := u_1 - u_2$. Sei $c := \|u|_{\partial\Omega}\|_\infty$. Dann gilt

$$\forall x \in \partial\Omega : -c \leq u(x) \leq c$$

und Satz 2.3 impliziert

$$\forall x \in \Omega : -c \leq u(x) \leq c$$

□

2.5 Satz (Satz von Picard)

Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch, $u \geq 0$. Dann ist u konstant. Insbesondere: Ist u beschränkt, dann ist u konstant.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Für $r > 0$ folgt dann

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{r^n \cdot w_n} \cdot \int_{B(x,r)} u(y)\,dy \\ &\overset{u\geq 0}{\leq} \frac{1}{r^n} \cdot \frac{(r+|x|)^n}{(r+|x|)^n} \cdot \frac{1}{w_n} \cdot \int_{|y|\leq |x|+r} u(y)\,dy \\ &\overset{*}{=} \frac{(r+|x|)^n}{r^n} \cdot u(0) = \left(1 + \frac{|x|}{r}\right)^n \cdot u(0) \end{aligned}$$

(Für $(*)$: Wende Mittelwerteigenschaft für $B(0,|x|+r)$ an.) Für $r \to \infty$: $u(x) \leq u(0)$. Anwendung auf $u(\cdot + x) =: u_0$ ergibt

$$u(0) = u_0(-x) \leq u_0(0) = u(x)$$

Also $u = u(0)$. □

Zweites Ziel: u Mittelwerteigenschaft $\Rightarrow u \in C^\infty$

2.6 Satz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C(\Omega)$ besitze die Mittelwerteigenschaft. Dann gilt $u \in C^\infty(\Omega)$.

Definition:

(i). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p \leq \infty$. Dann

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{K}\,\text{mb}; \forall x \in \Omega \exists r > 0, B(x,r) \subseteq \Omega : f|_{B(x,r)} \in L^p(B(x,r))\}$$

und $f \in L^p_{\text{loc}}$ heißt zur p-ten Potenz lokal integrierbar.

Beispiel: $C(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Für $p \leq q$ gilt außerdem $L^q_{\text{loc}} \subseteq L^p_{\text{loc}}$.

Bemerkung:

(i). Sei

$$\alpha(t) := \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \end{cases}$$

dann $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dann $g(x) := \alpha(1 - |x|^2) \in C^\infty_C(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{spt} g = B[0,1]$.

2.7 Lemma (Differenzierbarkeit der Faltung)

Sei $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $\varrho \in C^m_C(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren die Faltung

$$\begin{aligned} \varrho * u(x) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(x-y) \cdot u(y)\,dy \\ &\left(= \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(z) \cdot u(x-z)\,dz \right) \end{aligned}$$

Dann $\varrho * u \in C^m(\mathbb{R}^n)$,

$$\partial^\alpha(\varrho * u) = (\partial^\alpha \varrho) * u$$

für $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$ mit $|\alpha| \leq m$.

Beweis: (i). Existenz des Integrals: Es gibt $R > 0$ mit $\operatorname{spt} \varrho \subseteq B(0,R)$. Es gilt $1_{B(x,R)} \cdot u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, daher $y \mapsto \varrho(x-y) \cdot u(y)$ integrierbar.

(ii). $\varrho * u$ stetig: Seien $R' > 0$ und $\delta > 0$. Für $x, x' \in B(0, R')$, $|x - x'| < \delta$:

$$
\begin{aligned}
|(\varrho * u)(x) - (\varrho * u)(x')| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\varrho(x-y) - \varrho(x'-y)) \cdot u(y)\, dy \right| \\
&= \left| \int_{|y| \le R+R'} (\varrho(x-y) - \varrho(x'-y)) \cdot u(y)\, dy \right| \\
&\le \sup\{|\varrho(z) - \varrho(z')|; z, z' \in \mathbb{R}^n, |z - z'| < \delta\} \cdot \underbrace{\int_{|y|\le R+R'} |u(y)|\, dy}_{<\infty} \\
&\to 0 \qquad (\delta \to 0)
\end{aligned}
$$

da ϱ gleichmäßig stetig.

(iii). Vorausgesetzt $m \ge 1$, dann $\varrho * u$ stetig partiell differenzierbar nach x_j: Sei e_j der j-te Einheitsvektor. Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Dann

$$
\begin{aligned}
(\varrho * u)(x + t\cdot e_j) - (\varrho * u)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \big(\varrho(x + t \cdot e_j - y) - \varrho(x - y)\big) \cdot u(y)\, dy \\
&\overset{\text{HS}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^t \partial_j \varrho(x + \tau \cdot e_j - y)\, d\tau\, u(y)\, dy \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j \varrho(x + \tau \cdot e_j - y) \cdot u(y)\, dy\, d\tau \\
&= \int_0^t \underbrace{((\partial_j \varrho) * u)}_{\text{stetig (ii)}}(x + \tau \cdot e_j)\, d\tau
\end{aligned}
$$

Hauptsatz 2. Teil: $t \mapsto (\varrho * u)(x + t \cdot e_j)$ ist differenzierbar, insbesondere folgt für $t = 0$: $\partial_j(\varrho * u)(x)$ existiert und es gilt

$$
\partial_j(\varrho * u) = (\partial_j \varrho) * u
$$

(iv). m allgemein: Induktion, mit (iii).

□

Beweis: von Satz 2.6: Ohne Einschränkung $u \in L^1(\Omega)$ (C^∞ ist lokale Eigenschaft). Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\varphi \in C_C^\infty(\mathbb{R})$, sodass ϱ, definiert durch

$$
\varrho(x) := \varphi(|x|)
$$

folgende Eigenschaften hat:

$$
\varrho \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n) \qquad \operatorname{spt} \varrho \subseteq B(0, \varepsilon) \qquad \int \varrho(y)\, dy = 1
$$

Dann ist $\varrho * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ nach 2.7. Sei

$$
\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega; B[x, \varepsilon] \subseteq \Omega\}
$$

dann ist Ω_ε offen. Für $x \in \Omega_\varepsilon$ gilt

$$
\begin{aligned}
(\varrho * u)(x) &= \int_{B(0,\varepsilon)} \varrho(y) \cdot u(x - y)\, dy \\
&\overset{\text{vPk}}{=} \int_{r=0}^{\varepsilon} \int_{\xi \in S_{n-1}} \underbrace{\varrho(r \cdot \xi)}_{\varphi(r)} \cdot u(x - r \cdot \xi)\, dS(\xi)\, r^{n-1}\, dr \\
&= \int_{r=0}^{\varepsilon} \varphi(r) \cdot r^{n-1} \underbrace{\int_{\xi \in S_{n-1}} u(x - r\cdot\xi)\, dS(\xi)}_{\overset{\text{MWE}}{=} \sigma_{n-1} \cdot u(x)}\, dr \\
&= u(x) \cdot \int_0^{\varepsilon} \int_{S_{n-1}} \varrho(r \cdot \xi) dS(\xi)\, r^{n-1}\, dr \\
&= u(x) \cdot \int_{B(0,\varepsilon)} \varrho(y)\, dy = u(x)
\end{aligned}
$$

Damit $u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig: $u \in C^\infty(\Omega)$.

□

2.8 Folgerung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega)$ eine Folge harmonischer Funktionen mit $u_k \to u \in C(\Omega)$ $(k \to \infty)$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω. Dann ist u harmonisch.

Beweis: Mittelwerteigenschaft von u_k überträgt sich auf u. Dann Satz 2.6, 2.1. $\square$

Bemerkungen:

(i). In Folgerung 2.8 auch: $\partial^\alpha u_k \to \partial^\alpha u$ kompakt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, n \in \mathbb{N}$. (Beachte Beweise von Satz 2.6, Lemma 2.7.)

(ii). Satz 2.6: „Weyl'sches Lemma", einfache Form. Später mehr.

(iii). In Satz 2.6 sogar u (reell) analytisch.

3 Greensche Funktion, Dirichlet-Problem für die Kugel

Definiere $L : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$L(x) := \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\cdot\sigma_{n-1}\cdot|x|^{n-2}} & n \geq 3 \\ \frac{\ln|x|}{2\pi} & n = 2 \end{cases}$$

L heißt Fundamentallösung von Δ. L ist harmonisch auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ (Übung 1). Setze $K(x,y) := L(x-y)$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$.

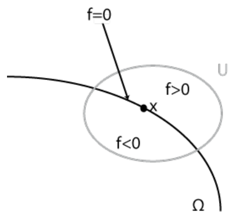
3.1 Lemma

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, mit glattem Rand. Sei $u \in C^2(\Omega)$, $\partial^\alpha u$ stetig fortsetzbar auf $\bar{\Omega}$ für $|\alpha| \leq 2$. Für alle $x \in \Omega$ gilt dann

$$u(x) = \int_\Omega K(x,y) \cdot \Delta u(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} \big(K(x,y) \cdot \partial_{\nu(y)} u(y) - u(y) \cdot \partial_{\nu(y)} K(x,y)\big)\, dS(y) \tag{3.1}$$

Bemerkungen:

(i). „Glatter Rand“: $\forall x \in \partial\Omega$ existiert eine Umgebung U, $f \in C^1(U)$ mit $\operatorname{grad} f \neq 0$, sodass



Dann $\nu(x) = \frac{\operatorname{grad} f(x)}{|\operatorname{grad} f(x)|}$ Einheitsnormale in $x \in U \cap \partial\Omega$.

(ii). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und mit glattem Rand. Seien $u, v \in C^2(\Omega)$, $\partial^\alpha u, \partial^\alpha v$ stetig auf $\bar{\Omega}$ fortsetzbar für $|\alpha| \leq 2$. Wende Gaußschen Integralsatz an auf $F := v \cdot \operatorname{grad} u$. Mit

$$\operatorname{div} F = (\operatorname{grad} u | \operatorname{grad} v) + v \cdot \Delta u$$

folgt

$$\int_{\partial\Omega} v \cdot \underbrace{(\operatorname{grad} u|\nu)}_{=:\partial_\nu u}\, dS = \int_\Omega \big((\operatorname{grad} u|\operatorname{grad} v) + v \cdot \Delta u\big)\, dx$$

(erste Greensche Formel). Vertauschung von u und v und subtrahieren der beiden Gleichungen:

$$\int_{\partial\Omega} (v \cdot \partial_\nu u - u \cdot \partial_\nu v)\, dS = \int_\Omega (v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v)\, dx$$

(zweite Greensche Formel).

Beweis: von 3.1

(i). Sei $x \in \Omega$, $\varrho > 0$ mit $B[x,\varrho] \subseteq \Omega$. Dann zweite Greensche Formel (beachte $\Delta_y K(x,y) = 0$):

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega \setminus B[x,\varrho]} K(x,y) \cdot \Delta u(y)\, dy \\
&= \int_{\partial(\Omega \setminus B[x,\varrho])} K(x,y) \cdot \partial_\nu u(y) - (\partial_{\nu(y)} K(x,y)) \cdot u(y)\, dS(y) \\
&= \int_{\partial\Omega} K \cdot \partial_\nu u - (\partial_\nu K) \cdot u\, dS - \underbrace{\int_{\partial B[x,\varrho]} K \cdot \partial_\nu u - (\partial_\nu K) \cdot u\, dS}_{\overset{(ii),(iii)}{\to} u(x)\ (\varrho \to 0)}
\end{aligned}$$

(ii). Es gilt für $n \geq 3$:

$$\int_{|y-x|=\varrho} K(x,y) \cdot \partial_\nu u(y)\, dS(y) = -\varrho \cdot \int_{|y-x|=\varrho} \frac{\varrho^{1-n}}{(n-2) \cdot \sigma_{-1}} \cdot \underbrace{\partial_\nu u(y)}_{\text{beschränkt}}\ dS(y)$$
$$\to 0\,(\varrho \to 0)$$

(Benutze die Beschränktheit des Integrals.)

(iii). $\partial_\nu K(x,y)$ berechnen: Mit

$$g(r) := \begin{cases} -\frac{1}{\sigma_{n-1} \cdot (n-2) \cdot r^{n-2}} & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \cdot \ln r & n = 2 \end{cases}$$

gilt $K(x,y) = g(|x-y|)$ und somit

$$\begin{aligned}
\partial_{\nu(y)} K(x,y) &= -\frac{d}{dt} K\left(x, x + t \cdot \frac{y-x}{|y-x|}\right)\Bigg|_{t=\varrho} \\
&= -\frac{d}{dt} g\left(t \cdot \frac{y-x}{|y-x|}\right)\Bigg|_{t=\varrho} \\
&= -g'(\varrho) = -\frac{1}{\sigma_{n-1}} \cdot \varrho^{1-n}
\end{aligned}$$

Damit

$$-\int_{|y-x|=\varrho} (\partial_\nu K) \cdot u\, dS = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \cdot \varrho^{1-n} \cdot \int_{|y-x|=\varrho} u(y)\, dS(y)$$
$$\to u(x) \qquad (\varrho \to 0)$$

Benutze dazu:

$$\left| \frac{1}{\sigma_{n-1} \cdot \varrho^{n-1}} \int_{|y-x|=\varrho} u(y)\, dS(y) - u(x) \right| \leq \max\{|u(y) - u(x)|; y \in \partial B(x,\varrho)\}$$
$$\overset{\text{u stetig}}{\to} 0 \qquad (\varrho \to 0)$$

□

Bemerkungen:

(i). Setzt man in (3.1) $u = \varphi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, dann

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) \cdot \Delta\varphi(y)\, dy$$

(Linksinverse des Laplace-Operators) mit $\Omega = B(0,R)$ und $R > 0$ so, dass $\operatorname{spt}\varphi \subseteq B(0,R)$. Auch: Ist $\varphi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, dann für

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) \cdot \varphi(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} L(y) \cdot \varphi(x-y)\, dy = (\varphi * L)(x)$$

gilt

$$\Delta u(x) \overset{2.7}{=} \int_{\mathbb{R}^n} L(y) \cdot \Delta\varphi(x-y)\, dy = \varphi(x)$$

Also: Integraloperator $= (\Delta|_{C_C^\infty(\mathbb{R}^n)})^{-1}$

(ii). Für u harmonisch in (3.1):

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} K \cdot \partial_\nu u - (\partial_\nu K) \cdot u\, dS$$

d.h. u dargestellt als Funktion von „Randwerten“ von u. Dies löst noch nicht das Dirichlet-Problem.

Definition:

(i). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $G : \Omega \times \bar{\Omega} \backslash \{(x,x); x \in \Omega\} \to \mathbb{R}$ mit

(1) $G(x,\cdot) - K(x,\cdot)$ hat harmonische Fortsetzung auf Ω

(2) $G(x,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0$

für alle $x \in \Omega$. Dann ist G die Greensche Funktion auf Ω.

Bemerkungen:

(i). Mit $\Phi := G - K$ gilt: $\Phi(x,\cdot)$ ist Lösung des Dirichlet-Problems

$$\Delta\Phi(x,\cdot) = 0 \,\text{in}\, \Omega \qquad \Phi(x,\cdot) = -K(x,\cdot)|_{\partial\Omega}$$

also eindeutig (Satz 2.4). Somit G eindeutig, falls existent.

(ii). Seien Ω, u wie in Lemma 3.1. Dann 2. Greensche Formel:

$$\int_\Omega \Phi(x,y) \cdot \Delta u(y)\, dy = \int_{\partial\Omega} \Phi(x,y) \cdot \partial_\nu u(y) - (\partial_{\nu(y)} \Phi(x,y)) \cdot u(y)\, dS(y)$$

falls die Ableitungen von $\Phi(x,\cdot)$ bis zur 2. Ordnung stetige Fortsetzungen auf $\bar{\Omega}$ besitzen. Addition zu (3.1) ergibt dann

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) \cdot \Delta u(y)\, dy + \int_{\partial\Omega} (\partial_{\nu(y)} G(x,y)) \cdot u(y)\, dS(y)$$

Jetzt: Greensche Funktion für $B(0,R)$ in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$. Für $x \in B(0,R)\backslash\{0\}$ ist

$$x^r := \frac{R^2}{|x|^2} \cdot x$$

der Spiegelpunkt von x an $\partial B(0,R)$. Für dieses x und alle $y \in \partial B(0,R)$ gilt:

$$\begin{aligned}\left(\frac{|x|}{R} \cdot |x^r - y|\right)^2 &= \left(\left|\frac{R}{|x|} \cdot x - \frac{|x|}{R} \cdot y\right|\right) \\ &= \underbrace{R^2}_{|y|^2} - 2(x|y) + |x|^2 = |x-y|^2 \qquad (*)\end{aligned}$$

Sei

$$\Phi(x,y) := \frac{1}{(n-2) \cdot \sigma_{n-1}} \cdot \left(\frac{|x|}{R}\right)^{-(n-2)} \cdot |x^r - y|^{2-n} \qquad (y \neq x^r)$$

Dann ist $\Phi(x,\cdot)$ harmonisch auf einer Umgebung von $B[0,R]$ und

$$\forall y, |y| = R : \Phi(x,y) \overset{*}{=} -K(x,y)$$

Somit Greensche Funktion für $\Omega = B(0,R)$:

$$G(x,y) = -\frac{1}{(n-2)\cdot\sigma_{n-1}} \cdot \left(|x-y|^{2-n} - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-n} \cdot \left| \frac{R^2}{|x|^2} \cdot x - y \right|^{2-n} \right)$$
$$= -\frac{1}{(n-2)\cdot\sigma_{n-1}} \cdot \left(|x-y|^{2-n} - \underbrace{\left| \frac{R}{|x|} \cdot x - \frac{|x|}{R} \cdot y \right|^{2-n}}_{=:R^{2-n} \text{ für } x=0} \right)$$

Für $\partial_{\nu(y)} G(x,y)$ gilt:

$$\operatorname{grad}_y G(x,y) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \cdot \left(-|x-y|^{1-n} \cdot \frac{x-y}{|x-y|} - \left| \frac{R}{|x|} \cdot x - \frac{|x|}{R} \cdot y \right|^{1-n} \cdot \frac{\frac{R}{|x|} \cdot x - \frac{|x|}{R} \cdot y}{\left| \frac{R}{|x|} \cdot x - \frac{|x|}{R} \cdot y \right|} \cdot \left(-\frac{x}{|R|} \right) \right)$$

Jetzt $|y| = R$, $(*)$ und mit $\nu(y) = \frac{y}{R}$ skalarmultiplizieren:

$$\partial_{\nu(y)} G(x,y) = \frac{1}{R \cdot \sigma_{n-1} \cdot |x-y|^n} \cdot \underbrace{\left(-(x-y|y) + \left(x - \frac{|x|^2}{R^2} \cdot y \right) \right)}_{R^2 - |x|^2}$$
$$=: H(x,y)$$

(Poisson-Kern) Gezeigt: Ist u harmonisch auf $B(0,R)$, Ableitungen bis zur 2. Ordnung auf $B[0,R]$ fortsetzbar, dann gilt

$$u(x) = \int_{|y|=r} H(x,y) \cdot u(y) \, dS(y)$$

Gilt auch für $n = 2$ (Übung?) und $n = 1$.

H hat folgende Eigenschaften:

α $\int H(x,y)\,dy = 1$ für $|x| < R$, weil für $u := 1$ in

$$u(x) = \int_{|y|=R} H(x,y) \cdot u(y) \, dy$$

β $H(x,y) > 0$ für $|x| < R, |y| = R$

γ Für $x_0 \in \partial B(0,R)$, $\delta > 0$:

$$\lim_{x \to x_0, |x|<R} H(x,y) = 0$$

konvergiert gleichmäßig für $|y - x_0| \geq \delta$. Denn: Für $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$, $|y - x_0| > \delta$:

$$H(x,y) \leq \frac{1}{R \cdot \sigma_{n-1}} \cdot \frac{R^2 - |x|^2}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n} \to 0 \qquad (x \to x_0)$$

3.2 Satz (Existenz der Lösung des Dirichlet-Problems auf B(0,R))

Sei $\varphi : \partial B(0,R) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar (also insbesondere beschränkt),

$$u(x) := \begin{cases} \int_{|y|=R} H(x,y) \cdot \varphi(y) \; dS(y) & |x| < R \\ \varphi(x) & |x| = R \end{cases}$$

(Poisson-Formel) Dann ist u harmonisch auf $B(0,R)$, $\|u\|_{B[0,R]} \leq \|\varphi\|_{\partial B(0,R)}$ und in den Stetigkeitspunkten von φ ist u stetig. Ist $\varphi \in C(\partial B(0,R))$, dann $u \in C(B[0,R])$. Somit ist u die (eindeutige) Lösung des Dirichlet-Problems.

Beweis:

(i). u stetig in $B(0,R)$: $H : B(0,R) \times \partial B(0,R) \to \mathbb{R}$ ist stetig. Mit Stetigkeitssatz für Parameter-Integrale folgt Stetigkeit von u.

Alternativ: $x \mapsto H(x,\cdot)$ als Funktion von $B(0,R)$ nach $C(\partial B(0,R))$ ist stetig (Übung), d.h. sei $x_0 \in B(0,R)$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, sodass für alle $x \in B(0,R)$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$\|H(x_0,\cdot) - H(x,\cdot)\|_\infty \leq \varepsilon$$

Damit

$$\begin{aligned} |u(x_0) - u(x)| &\leq \int_{|y|=R} |H(x_0,y) - H(x,y)| \cdot |\varphi(y)|\, dS(y) \\ &\leq \varepsilon \cdot \|\varphi\|_{L^1(\partial B(0,R))} \end{aligned}$$

(ii). u harmonisch: Für alle $y \in \partial B(0,R)$ ist $H(.,\cdot)$ harmonisch (da $G(\cdot,y)$ harmonisch, oder nachrechnen). Aus Ableitung unter Integral folgt u harmonisch.

Alternativ: Für alle $y \in \partial B(0,R)$ hat $H(\cdot,y)$ die Mittelwerteigenschaft. Sei $x_0 \in B(0,R)$, $\varrho > 0$ mit $B[x_0,\varrho] \subseteq B(0,R)$. Dann

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varrho^{n-1} \cdot \sigma_{n-1}} \cdot \int_{|x-x_0|=\varrho} u(x)\, dS(x) \\ = &\frac{1}{\varrho^{n-1} \cdot \sigma_{n-1}} \cdot \int_{|x-x_0|=\varrho} \int_{\partial B(0,R)} H(x,y) \cdot \varphi(y)\, dS(y)\, dS(x) \\ \overset{*}{=} &\int H(x_0,y) \cdot \varphi(y)\, dS(y) = u(x_0) \end{aligned}$$

(Für $(*)$: Fubini und H hat Mittelwerteigenschaft.)

(iii). Abschätzung:

$$|u(x)| \leq \int_{|y|=R} H(x,y) \cdot \|\varphi\|_{\partial B(0,R)}\, dS(y) \overset{\alpha}{\leq} \|\varphi\|_{\partial B(0,R)}$$

für $|x| < R$.

(iv). Stetigkeitseigenschaft: Sei $|x_0| = R$ und φ stetig in x_0. Dann gilt für $|x| < R$:

$$\begin{aligned} u(x) - u(x_0) &\overset{\alpha}{=} \int_{|y|=R} H(x,y) \cdot (\varphi(y) - \varphi(x_0))\, dS(y) \\ &= \int_{|y|=R, |y-x_0| \geq \delta} H(x,y) \cdot (\varphi(y) - \varphi(x_0))\, dS(y) \\ &\quad + \int_{|y|=R, |y-x_0| < \delta} H(x,y) \cdot (\varphi(y) - \varphi(x_0))\, dS(y) \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$, sodass $|\varphi(y) - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon$ für $|y - x_0| \leq \delta$. Dann wegen $(\alpha), (\beta)$:

$$\left| \int_{|y|=R, |y-x_0| < \delta} H(x,y) \cdot (\varphi(y) - \varphi(x_0))\, dS(y) \right| \leq \varepsilon$$

Es gibt $\gamma > 0$, sodass $H(x,y) \leq \varepsilon$ für $|y - x_0| \geq \delta$, $|x - x_0| \leq \gamma$ (folgt aus (γ) oben). Für $|x - x_0| < \gamma$ folgt:

$$\left| \int_{|y|=R, |y-x_0| \geq \delta} H(x,y) \cdot (\varphi(y) - \varphi(x_0))\, dS(y) \right| \leq \varepsilon \cdot (\|\varphi\|_\infty + |\varphi(x_0)|)$$

und somit $|u(x) - u(x_0)| \leq \varepsilon \cdot (1 + 2\|\varphi\|_\infty)$.

Bemerkungen:

(i). Mit Satz 3.2 hat man die Existenz der Lösung des Dirichlet-Problems für $B(0,R)$.

(ii). Poisson-Formel für $\varphi \in L^1(\partial B(0,R))$. Damit u auf $B[0,R]$ definiert. Ab jetzt $R = 1$, $B := (0,1)$. Damit

$$H(x,y) = \frac{1 - |x|^2}{\sigma_{n-1} \cdot |x-y|^n}$$

u harmonisch geht wie oben. Für $0 \le r < 1$:

$$\|u(r\cdot)|_{\partial B}\|_{L^1(\partial B)} \le \|\varphi\|_{L^1(\partial B)}$$

denn

$$\begin{aligned}\int_{|x|=1} |u(r\cdot x)|\, dS(x) &\le \int_{|x|=1}\int_{|y|=1} H(x,y)\cdot|\varphi(y)|\, dS(y)\, dS(x)\\ &\overset{\text{Fub}}{=} \int_{|y|=1}\int_{|x|=1} H(x,y)\, dS(x)\, |\varphi(y)|\, dS(y) \overset{*}{=} \|\varphi\|_{L^1(\partial B)}\end{aligned}$$

Für $|y| = 1 : H(r\cdot, y)$ harmonisch in Umgebung von $\bar{B}$. Mittelwerteigenschaft:

$$\int_{|x|=1} H(x,y)\, dS(x) = \sigma_{n-1}\cdot H(0,y) = 1 \tag{*}$$

Zusätze:

(1) $u(r\cdot)|_{\partial B} \overset{r\to 1}{\to} \varphi$ in $L^1(\partial B)$

(2) Ist v harmonisch in B und $v(r\cdot)|_{\partial B} \overset{r\to 1}{\to} \varphi$ in $L^1(\partial B)$, dann $v = u$.

Nachtrag (16.Mai 2011):

(i). Verwendet: $H(\cdot,y)$ ist harmonisch für $|y| = R$, weil $G(\cdot,y)$ harmonisch. Frage: Wieso ist $G(\cdot,y)$ harmonisch?

Bekannt: $G(x,\cdot)$ ist harmonisch auf $B(0,R)\backslash\{x\}$, $\Phi(x,\cdot) = G(x,\cdot) - K(x,\cdot)$ ist harmonisch auf $B(0,R)$. Es gilt $G(x,y) = G(y,x)$: In

$$G(x,y) = -\frac{1}{(n-2)\cdot\sigma_{n-1}}\cdot\left(|x-y|^{2-n} - \left|\frac{R}{|x|}\cdot x - \frac{|x|}{R}\cdot y\right|^{2-n}\right)$$

ist

$$\begin{aligned}\left|\frac{R}{|x|}\cdot x - \frac{|x|}{R}\cdot y\right|^2 &= \left(\frac{R}{|x|}\cdot x - \frac{|x|}{R}\cdot y \middle| \frac{R}{|x|}\cdot x - \frac{|x|}{R}\cdot y\right)\\ &= R^2 - 2(x|y) + |x|^2\cdot\frac{|y|^2}{R^2}\end{aligned}$$

symmetrisch in (x,y). Für $0 < r < R$, $r \le |y| \le R$ ist $G(\cdot,y)$ harmonisch auf $B(0,r)$. Damit $H(\cdot,y) = \partial_{\nu(y)}G(\cdot,y)$ harmonisch auf $B(0,R)$.

(ii). Falls Ω so ist, dass die Greensche Funktion existiert, gilt immer die Symmetrie (vgl. Wienholtz, Kalt, …). Wesentlich dafür: $G(\cdot,y)$ harmonisch. (Vgl. Übung)

3.3 Folgerung (Harnach'sche Ungleichung)

Sei $u \in C(B[0,R])$, u in $B(0,R)$ harmonisch, $u \ge 0$. Für $|x| < R$ gilt dann

$$\frac{1-\frac{|x|}{R}}{\left(1+\frac{|x|}{R}\right)^{n-1}}\cdot u(0) \le u(x) \le \frac{1+\frac{|x|}{R}}{\left(1-\frac{|x|}{R}\right)^{n-1}}\cdot u(0)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{R \cdot \sigma_{n-1}} \cdot \int_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} \cdot u(y)\, dS(y) \\
&\leq \frac{1}{R \cdot \sigma_{n-1}} \cdot \int_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{(R-|x|)^n} \cdot u(y)\, dS(y) \\
&= \frac{1}{R} \cdot \frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}} \cdot R^{n-1} \cdot \underbrace{\frac{1}{R^{n-1} \cdot \sigma_{n-1}} \cdot \int_{|y|=R} u(y)\, dS(y)}_{u(0)}
\end{aligned}$$

Für linke Seite:

$$u(x) \geq \frac{1}{R \cdot \sigma_{n-1}} \cdot \int \frac{(R+|x|) \cdot (R-|x|)}{(R+|x|)^n} \cdot u(y)\, dS(y)$$

Rest analog. Damit folgt (wieder) Satz von Picard (mit $R \to \infty$). □

4
Distributionen und Sobolev-Räume

- Idee: Verknüpfung von Differenzierbarkeit und L^p-Räumen
- Ziel: z.B. Dirichlet-Problem in einer allgemeinen Situation zu lösen.

Definition:

(i). Eine Distribution u auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist eine lineare Abbildung $u : C_C^\infty(\Omega) \to \mathbb{K}$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall K \subseteq \Omega \,\text{kompakt}\, \exists c \geq 0, k \in \mathbb{N}_0 : |u(\varphi)| \leq c \cdot \sup\{\|\partial^\alpha \varphi\|_\infty ; \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq k\}$$

für alle $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$ mit $\operatorname{spt} \varphi \subseteq K$.

Beispiele:

(i). Sei $f \in C(\Omega)$. Wir definieren

$$u_f(\varphi) := \int_\Omega f(x) \cdot \varphi(x)\, dx$$

für $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$. Dann ist u_f eine Distribution. Denn: Sei $K \subseteq \Omega$ kompakt. Dann gilt für alle $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$ mit $\operatorname{spt} \varphi \subseteq K$:

$$|u_f(\varphi)| = \left| \int_K f(x) \cdot \varphi(x)\, dx \right| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \underbrace{\int_K |f(x)|\, dx}_{=:c<\infty}$$

(ii). Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Sei u_f definiert durch

$$u_f(\varphi) := \int_\Omega f(x) \cdot \varphi(x)\, dx \qquad (\varphi \in C_C^\infty(\Omega))$$

Wie in (i): u_f ist eine Distribution. u_f nennt man die von f erzeugte Distribution.

(iii). Sei $x_0 \in \Omega$. $\delta_{x_0} : C_C^\infty(\Omega) \to \mathbb{K}, \varphi \mapsto \varphi(x_0)$. δ_{x_0} ist die Dirac-Delta-Distribution. Diese wird von keiner lokal integrierbaren Funktion erzeugt. (Übung 4)

Definition:

(i). Eine Folge $(\varrho_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C_C(\mathbb{R}^n)$ heißt δ-Folge, wenn

$$\forall k \in \mathbb{N} : \varrho_k \geq 0, \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_k(x)\, dx = 1, \operatorname{spt} \varrho_k \subseteq B\left[0, \frac{1}{k}\right]$$

Beispiel:

(i). Sei $\varrho \in C_C(\mathbb{R}^n)$ mit $\varrho \geq 0$, $\operatorname{spt} \varrho \subseteq B[0,1]$, $\int \varrho = 1$, z.B.

$$\varrho(x) = c \cdot \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & x \in B(0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Wir setzen

$$\varrho_k := k^n \cdot \varrho(k \cdot x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N})$$

Dann ist $(\varrho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine δ-Folge.

4.1 Lemma

Sei $(\varrho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine δ-Folge.

(i). Sei $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\varrho_k * f \to f$ $(k \to \infty)$ gleichmäßig auf kompakten Mengen.

(ii). Sei $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\varrho_k * f \in L^p$ mit $\|\varrho_k * f\|_p \le \|f\|_p$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$\|\varrho_k * f - f\|_p \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

Beweis: (i). Übung 4

(ii). (1) Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $p \in (1,\infty)$ und $q \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}|(\varrho_k * f)(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varrho_k(x-y)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \cdot f(y)\,dy\right| \\ &\overset{\text{Hölder}}{\le} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varrho_k(x-y)\,dy\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varrho_k(x-y)\cdot|f(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\overset{\int \varrho_k = 1}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varrho_k(x-y)\cdot|f(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Für $p = 1$ ist diese Ungleichung trivial. Ab jetzt $1 \le p < \infty$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |(\varrho_k * f)(x)|^p\,dx &\le \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varrho_k(x-y)\cdot|f(y)|^p\,dy\,dx \\ &\overset{\text{Ton}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \varrho_k(x-y)\,dx}_{1}\,dy = \|f\|_p^p\end{aligned}$$

also $\varrho_k * f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\|\varrho_k * f\|_p \le \|f\|_p$.

(2) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $T_k : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n), f \mapsto \varrho_k * f$. Dann $T_k \in L(L^p, L^p)$, $\|T_k\| \le 1$ gemäß (1). Wir zeigen jetzt noch: $T_k g \to g$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $k \to \infty$ für alle $g \in C_C(\mathbb{R}^n)$, da $C_C(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ folgt dann $T_k \overset{s}{\to} \mathrm{id}$ $(k \to \infty)$ nach Proposition 7.3, Funktionalanalysis I. Sei $g \in C_C(\mathbb{R}^n)$. Sei $R > 0$ mit $\operatorname{spt} g \subseteq B[0,R]$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt dann $\operatorname{spt}(\varrho_k * g) \subseteq B[0,k^{-1}] + B[0,R] \subseteq B[0,R+1]$. Nach (i) gilt $\varrho_k * g \to g$ $(k \to \infty)$ gleichmäßig auf $B[0,R+1]$, also $\varrho_k * g \to g$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

□

4.2 Folgerung

Sei $1 \le p < \infty$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $C_C^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$.

Beweis: $C_C(\Omega)$ ist dicht in $L^p(\Omega)$. Sei $(\varrho_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine δ-Folge. Für $g \in C_C(\Omega)$ sei

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & x \in \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{g} \in C_C(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{spt}\tilde{g} \subseteq \Omega$. Für $k \in \mathbb{N}$ groß genug gilt dann $\operatorname{spt}(\varrho_k * \tilde{g}) \subseteq \Omega$ und damit $\varrho_k * \tilde{g} \in C_C^\infty(\Omega)$. Außerdem gilt nach Lemma 4.1:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |(\varrho_k * \tilde{g})(x) - g(x)|^p\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |(\varrho_k * \tilde{g})(x) - \tilde{g}(x)|^p\,dx \\ &\to 0 \qquad (k \to \infty)\end{aligned}$$

also $C_C(\Omega) \subseteq \overline{C_C^\infty(\Omega)}^{L^p(\Omega)}$. Damit $L^p(\Omega) \subseteq \overline{C_C^\infty(\Omega)}^{L^p(\Omega)}$. □

Definition:

(i). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Dann ist

$$\operatorname{spt} f := \Omega \backslash \bigcup \{U; U \text{ offen}, f|_U = 0, \text{f.ü.}\}$$

Bemerkungen:

(i). $\operatorname{spt} f$ ist abgeschlossen in Ω. $f = 0$ fast überall auf $\Omega \backslash \operatorname{spt} f$. Ist f stetig, so ist $\operatorname{spt} f = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}^{\Omega}$. (Aber: $f = 1_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \operatorname{spt} f = \varnothing$)

(ii). Für $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), g \in C_C(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\operatorname{spt}(f * g) \subseteq \operatorname{spt} f + \operatorname{spt} g$$

Denn: Sei $x \notin \operatorname{spt} f + \operatorname{spt} g$, d.h.

$$\underbrace{(x - \operatorname{spt} g)}_{\operatorname{spt} g(x-\cdot)} \cap \operatorname{spt} f = \varnothing$$

also $g(x - \cdot) \cdot f(\cdot) = 0$ fast überall. Daher $(f * g)(x) = 0$. Da $\operatorname{spt} g + \operatorname{spt} f$ abgeschlossen folgt die Behauptung.

4.3 Satz

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Gelte $u_f = 0$, d.h. für alle $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega f(x) \cdot \varphi(x) \, dx = 0$$

Dann ist $f = 0$ fast überall. (Insbesondere: $f_1, f_2 \in L^1_{\text{loc}}$ mit $u_{f_1} = u_{f_2}$, dann $f_1 = f_2$ fast überall.)

Beweis: (i). Sei $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$. Zeige $\varphi \cdot f = 0$ fast überall. Sei

$$g(x) := \begin{cases} \varphi(x) \cdot f(x) & x \in \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, da

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \, dx = \int_{\operatorname{spt} \varphi} |\varphi(x)| \cdot |f(x)| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \int_{\operatorname{spt} \varphi} |f(x)| \, dx$$

Sei $(\varrho_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine δ-Folge. Nach Lemma 4.1: $\varrho_k * g \to g$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ für $k \to \infty$. Für $x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (\varrho_k * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_k(x-y) \cdot \varphi(y) \cdot f(y) \, dy \\ &= u_f(\varrho_k(x - \cdot) \cdot \varphi) = 0 \end{aligned}$$

Damit ist $\varrho_k * g = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}^n$, somit $g = 0$ fast überall. Also $\varphi \cdot f = 0$ fast überall.

(ii). $\forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega) : \varphi \cdot f = 0 \Rightarrow f = 0$ fast überall.

□

Ableitung von Distributionen, Motivation:

- Sei $f \in C^1(\Omega)$ für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$. Dann

$$\int_\Omega \partial_j f(x) \cdot \varphi(x) \, dx = - \int_\Omega f(x) \cdot \partial_j \varphi(x) \, dx$$

denn: $f \cdot \varphi \in C_C^1(\Omega)$, daher

$$\int_\Omega \partial_j (f \cdot \varphi)(x) = 0$$

nach Satz von Fubini. Für $f \in C^m(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq m$, $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$ gilt daher

$$\underbrace{\int (\partial^\alpha f) \cdot \varphi}_{u_{\partial^\alpha f}(\varphi)} = (-1)^{|\alpha|} \cdot \underbrace{\int f \cdot (\partial^\alpha \varphi)}_{u_f(\partial^\alpha(\varphi))}$$

Definition:

(i). Sei u eine Distribution auf Ω, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann $\partial^\alpha u$ definiert durch

$$(\partial^\alpha u)(\varphi) \coloneqq (-1)^{|\alpha|} \cdot u(\partial^\alpha \varphi) \qquad (\varphi \in C_C^\infty(\Omega))$$

Bemerkungen:

(i). $\partial^\alpha u$ ist eine Distribution:

- Linearität ist klar.
- Stetigkeitseigenschaft: Nach Voraussetzung gilt: Sei $K \subseteq \Omega$ kompakt, dann gibt es $c \geq 0$, $m \in \mathbb{N}_0$:

$$|u(\varphi)| \leq c \cdot \max\{\|\partial^\alpha \varphi\|_\infty ; |\alpha| \leq m\}$$

für alle $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$ mit $\operatorname{spt} \varphi \subseteq K$. Dann

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha u(\varphi)| = |u(\partial^\alpha \varphi)| &\leq c \cdot \max\{\|\partial^\beta \partial^\alpha \varphi\|_\infty ; |\beta| \leq m\} \\ &\leq c \cdot \max\{\|\partial^\beta \varphi\|_\infty ; |\beta| \leq m + |\alpha|\} \end{aligned}$$

(ii). Wenn $f \in C^m(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq m$, dann

$$\partial^\alpha u_f(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi) = u_{\partial^\alpha f}(\varphi)$$

Beispiele:

(i). Sei $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, H \coloneqq 1_{[0,\infty)}$ (Heavyside-Funktion). Dann für $\varphi \in C_C^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \partial u_H(\varphi) = -u_H(\partial \varphi) &= -\int_0^\infty \underbrace{\partial \varphi(x)}_{\varphi'(x)} \, dx \\ &= \varphi(0) \\ \Rightarrow \partial u_H &= \delta_0 \end{aligned}$$

(ii). Für L aus §3, „Fundamentallösung“, gilt $(\Delta L) = \Delta u_L = \delta_0$, d.h.

$$\Delta u_L(\varphi) = \int L(x) \cdot \Delta \varphi(x) \, dx = \delta_0(\varphi) = \varphi(0)$$

für alle $\varphi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Letzte Gleichung folgt aus Satz 3.1:

$$\varphi(x) = \int L(x - y) \cdot \Delta \varphi(y) \, dy$$

für $x = 0$ folgt wegen $L(-y)L = L(y)$ die Behauptung.

Definitionen:

(i). Seien $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann: g ist schwache α-Ableitung von f $(\partial^\alpha f = g)$

$$:\Leftrightarrow \partial^\alpha u_f = u_g \Leftrightarrow \forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega) \int g \cdot \varphi = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int f \partial^\alpha \varphi$$

g ist eindeutig nach Satz 4.3 als L^1_{loc}-Funktion.

(ii). Ist $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, dann $\partial^\alpha f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) :\Leftrightarrow \partial^\alpha u_f$ wird erzeugt durch $g \in L^1_{\text{loc}}$, $\partial^\alpha f = g$.

(iii). Sei $1 \le p \le \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$. Dann

$$W_p^m(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega); \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \le m : \partial^\alpha f \in L^p(\Omega)\}$$

mit Norm (!) $\|\cdot\|_{p,m}$,

$$\|f\|_{p,m} := \left(\sum_{|\alpha|\le m} \int |\partial^\alpha f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha f\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

falls $p < \infty$,

$$\|f\|_{\infty,m} := \max\{\|\partial^\alpha f\|_\infty; |\alpha| \le m\}$$

(Sobolev-Raum)

4.4 Satz

Sei $1 \le p \le \infty$, $m \in \mathbb{N}_0^n$. Dann ist $W_p^m(\Omega)$ ein Banachraum, separabel für $1 \le p < \infty$. $W_2^m(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(f|g) := \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega \partial^\alpha f(x) \cdot \overline{\partial^\alpha g(x)} \, dx$$

Beweis: Sei $\bigoplus_{|\alpha|\le m}^p L^p(\Omega)$ ℓ_p-Summe von $L^p(\Omega)$'s über Indexmenge $\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \le m\}$,

$$\|(f^\alpha)_{|\alpha|\le m}\| = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \|f^\alpha\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p < \infty)$$

Sei $J : W_p^m(\Omega) \to \bigoplus_{|\alpha|\le m}^p L^p(\Omega)$, $f \mapsto (\partial^\alpha f)_{|\alpha|\le m}$. J ist linear und normerhaltend ($\Rightarrow \|\cdot\|_{p,m}$ ist Norm.)
Für Vollständigkeit von $W_p^m(\Omega)$ genügt es zu zeigen: $J(W_p^m(\Omega))$ ist abgeschlossen, da $\bigoplus_{|\alpha|\le m}^p L^p(\Omega)$ ein Banachraum ist. Sei dazu $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $W_p^m(\Omega)$, sodass $(Jf_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent in $\bigoplus_{|\alpha|\le m}^p L^p(\Omega)$ gegen $(f^\alpha)_{|\alpha|\le m}$. Für $|\alpha| \le m, k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$ folgt mit der Hölderschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} &\int (\partial^\alpha f_k) \cdot \varphi = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int f_k \cdot (\partial^\alpha \varphi) \\ \overset{k\to\infty}{\Rightarrow} &\int f^\alpha \cdot \varphi = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int f^0 \cdot (\partial^\alpha \varphi) \end{aligned}$$

d.h. $\partial^\alpha f^0 = f^\alpha$. Somit ist $f^0 \in W_p^m(\Omega)$, $(f^\alpha)_{|\alpha|\le m} = Jf^0$. Damit $J(W_p^m(\Omega))$ abgeschlossen. Für $1 \le p < \infty$ ist $L^p(\Omega)$ separabel. Daher $\bigoplus_{|\alpha|\le m}^p L^p(\Omega)$ separabel, also $J(W_p^m(\Omega))$ separabel. Letzte Aussage klar. □

Bemerkungen:

(i). Ist $\Omega' \subseteq \Omega$ offen, $m' \le m$, so ist $W_p^m(\Omega) \to W_p^{m'}(\Omega')$, $f \mapsto f|_{\Omega'}$ eine lineare Kontraktion. Aber: Für $f \in W_p^m(\Omega)$ ist im Allgemeinen $1_{\Omega'} \cdot f \notin W_p^m(\Omega)$.

(ii). Ebenso: Für $f \in W_p^m(\Omega')$,

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in \Omega' \\ 0 & x \in \Omega \backslash \Omega' \end{cases}$$

ist im Allgemeinen $\tilde{f} \notin W_p^m(\Omega)$.

(iii). Aber: Ist $f \in W_p^m(\Omega)$ mit $\operatorname{spt} f$ kompakt (in Ω'), dann $\tilde{f}$ (aus (ii)) $\in W_p^m(\Omega)$. Dazu: Es gibt $\psi \in C_C^\infty(\Omega')$, $\psi(x) = 1$ für x in Umgebung von $\operatorname{spt} f$, siehe Analysis 3. Sei jetzt $\Omega \hat{=} \mathbb{R}^n, \Omega' \hat{=} \Omega$. Für $\varphi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha \le m$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha(\varphi \cdot \psi) \cdot \tilde{f} = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega \varphi \cdot \underbrace{\psi \cdot \partial^\alpha f}_{\partial^\alpha f} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \partial^\alpha f$$

Linke Seite:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha(\varphi \cdot \psi) \cdot \tilde{f} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{0 \le \beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta}\varphi \cdot \partial^\beta \psi \right) \cdot \tilde{f}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha \varphi) \tilde{f}$$

also $\partial^\alpha \tilde{f} = \widetilde{\partial^\alpha f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(iv). $L^p(\Omega)$ ist separabel für $1 \le p < \infty$:

Ohne Einschränkung $\Omega = \mathbb{R}^n$. Es genügt zu zeigen, dass $L^p(B(0,r))$ separabel für alle $r > 0$. $C(B[0,r])$ ist separabel (Funktionalanalysis, Satz 5.4). Auch $C(B[0,r])$ dicht in $L^p(B(0,r))$ (siehe 4.2).

4.5 Satz (i). Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und seien $f, \partial^\alpha f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\varrho \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$\partial^\alpha(\varrho * f) = \varrho * \partial^\alpha f$$

(ii). Sei $1 \le p < \infty$, $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$, $(\varrho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine δ-Folge in $C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\varrho_k * f \to f$ in $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ für $k \to \infty$.

Beweis: (i).

$$\partial^\alpha(\varrho * f)(x) \overset{2.7}{=} ((\partial^\alpha \varrho) * f)(x) = \int \partial^\alpha \varrho(x-y) \cdot f(y)\, dy$$
$$= (-1)^{|\alpha|} \cdot \int \partial^\alpha(y \mapsto \varrho(x-y))(y) \cdot f(y)\, dy$$
$$= \int \varrho(x-y) \partial^\alpha f(y)\, dy = (\varrho * \partial^\alpha f)(x)$$

(ii). Für $|\alpha| \le m$ gilt:

$$\partial^\alpha(\varrho_k * f) \overset{(i)}{=} \varrho_k * \partial^\alpha f \overset{k\to\infty}{\to} \partial^{\alpha f} \qquad \text{in } L^p(\mathbb{R}^n)$$

nach Lemma 4.1.

□

Definitionen:

$$W_{p,c}^m(\Omega) := \{f \in W_p^m(\Omega); \operatorname{spt} f \text{ kompakt}\} \qquad (1 \le p \le \infty)$$
$$W_{p,0}^m(\Omega) := \overline{W_{p,c}^m(\Omega)}^{W_p^m(\Omega)}$$

Bemerkungen:

(i). Elemente von $W_{p,0}^m(\Omega)$ „verschwinden auf $\partial\Omega$“, siehe auch Ende §5

(ii). Für $1 \le p < \infty$ gilt $W_{p,0}^m(\Omega) = \overline{C_C^\infty(\Omega)}^{W_p^m(\Omega)}$ $(*)$.

„$\subseteq$“: Es genügt zu zeigen $W_{p,c}^m(\Omega) \subseteq \overline{C_C^\infty(\Omega)}^{W_p^m(\Omega)}$. Sei $f \in W_{p,c}^m(\Omega)$, $\tilde{f}$ wie in obigen Bemerkungen. Dann $\varrho_k * \tilde{f} \to \tilde{f}$ nach Satz 4.5 ($\varrho_k * f \in C_C^\infty(\Omega)$ für große k).

(iii). $(*)$ ist wichtig für Herleitung von Ungleichungen für $W_{p,0}^m$-Funktionen, siehe nächster §, Poincaré-Ungleichung.

(iv). $W_{p,0}^m(\mathbb{R}^n) = W_p^m(\mathbb{R}^n)$ für $1 \le p < \infty$ (Übung).

(v). Für Ω' allgemein gilt: $W_p^m(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ dicht in $W_p^m(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$. Beweis läuft unter „$W = H$“, schwierig, hier nicht.

5

Dirichlet-Problem und Poisson-Problem für den Laplace-Operator

- Klassisches Dirichlet-Problem: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $g \in C(\partial\Omega)$. Finde $u \in C(\bar{\Omega})$, u harmonisch auf Ω, $u|_{\partial\Omega} = g$. So allgemein nicht lösbar.
- Hier Abschwächung für Hilbertraum-Behandlung:
  (i). u harmonisch abgeschwächt zu $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\Delta u = 0$ im Distributionssinn, d.h.
  $$\forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega) : \int u \cdot \Delta\varphi = 0$$
  (Wir werden aber zeigen, dass dann u harmonisch ist.)
  (ii). Annahme der Randwerte: Verstärkung der Voraussetzungen. g stetig fortsetzbar auf $\bar{\Omega}$, also $g \in C(\bar{\Omega})$, mit:
  $$C_C^\infty(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int \Delta\varphi \cdot g$$
  stetig bzgl. $\|\cdot\|_{2,1}$-Norm $(*)$. Als Annahme der Randwerte findet man $u - g \in W^1_{2,0}(\Omega)$, d.h. u und g nehmen gleiche Randwerte an, aber nur im schwachen Sinne.
- Dirichlet-Problem (DP): Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $(*)$. Gesucht $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $\Delta u = 0$ im Distributionssinn und $u - g \in W^1_{2,0}(\Omega)$.

Bemerkungen:

(i). Für $(*)$ sind hinreichend:

(1) $g \in W^1_2(\Omega)$, denn $\int \Delta\varphi g = -\int \nabla\varphi \cdot \nabla g$ und

$$\left|\int \nabla\varphi \cdot \nabla g\right| = \left|\sum_j \int \partial_j\varphi \cdot \partial_j g\right| \le \sum_j \|\partial_j\varphi\|_2 \cdot \|\partial_j g\|_2$$
$$\le \left(\sum_j \|\partial_j\varphi\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_j \|\partial_j g\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \|\varphi\|_{2,1} \cdot \|g\|_{2,1}$$

Ist u Lösung des Dirichlet-Problems, so folgt $u \in W^1_2(\Omega)$.

(2) $\Delta g \in L^2(\Omega)$, denn:
$$\int \Delta\varphi \cdot g = \int \varphi \cdot \Delta g$$

(ii). $(*) \Leftrightarrow \Delta u_g \in (C_C^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{2,1})'$.

5.1 Satz (Existenz und Eindeutigkeit)

Für alle $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $(*)$ besitzt (DP) eine eindeutig bestimmte Lösung.

5.2 Lemma

Seien $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $(*)$, $v \in W^1_{2,0}(\Omega)$. Dann gilt: $u = g + v$ löst (DP) $\Leftrightarrow \int \nabla\varphi \cdot \nabla v = \int \Delta\varphi \cdot g$ für alle $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$.

Beweis:

$$\begin{aligned}\int \Delta\varphi \cdot u &= \int \Delta\varphi \cdot g + \int \Delta\varphi \cdot v \\ &= \int \Delta\varphi \cdot g - \int \nabla\varphi \cdot \nabla v\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$. Also $\Delta u = 0 \Leftrightarrow$ rechte Seite = 0. □

5.3 Satz (Poincaré-Ungleichung)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann gibt es für alle $f \in W^1_{2,0}(\Omega)$ ein $C \geq 0$ mit

$$\int_\Omega |f(x)|^2\,dx \leq C \cdot \int_\Omega \sum_{j=1}^n |\partial_j f(x)|^2\,dx$$

Durch

$$\|f\|_0 := \left(\sum_{j=1}^n \|\partial_j f\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist eine Norm $\|\cdot\|_0$ auf $W^1_{2,0}(\Omega)$ erklärt, die äquivalent zu $\|\cdot\|_{2,1}$ ist.

Bemerkung: Auf $W^1_2(\Omega)$ ist $\|\cdot\|_0$ keine Norm, da $\|1_\Omega\|_0 = 0$ wäre.

Beweis:
- Es gibt $a < b$ mit $\Omega \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n; a < x_1 < b\}$. Sei $\varphi \in C_C^\infty(\Omega) \subseteq C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für $x \in \Omega$ folgt:

$$\begin{aligned}|\varphi(x)|^2 = |\varphi(x) - \varphi(a, x_2, \ldots, x_n)|^2 &= \left|\int_a^{x_1} \partial_1\varphi(\xi, x_2, \ldots, x_n)\,d\xi\right|^2 \\ &\leq \underbrace{x_1 - a}_{\leq b-a} \int_a^{x_1} |\partial_1\varphi(\xi, x_2, \ldots, x_n)|^2\,d\xi \\ &\leq (b-a) \cdot \int_a^b |\partial_1\varphi(\xi, x_2, \ldots, x_n)|^2\,d\xi\end{aligned}$$

  Daher

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^2\,dx \overset{\text{Fub}}{\leq} (b-a)^2 \cdot \int_\Omega |\partial_1\varphi(x)|^2\,dx = (b-a)^2 \cdot \|\partial_1\varphi\|_2^2 \qquad (*)$$

  Die Abbildungen $W^1_2(\Omega) \ni f \mapsto f \in L^2(\Omega)$, $W^1_2(\Omega) \ni f \mapsto \partial_1 f \in L^2(\Omega)$ sind stetig und $C_C^\infty(\Omega)$ dicht in $W^1_{2,0}(\Omega)$, daher gilt $(*)$ auch für $f \in W^1_{2,0}(\Omega)$.

- Für $f \in W^1_{2,0}(\Omega)$ folgt:

$$\begin{aligned}\|f\|_0^2 \leq \|f\|_{2,1}^2 &= \|f\|_2^2 + \|f\|_0^2 \\ &\leq ((b-a)^2 + 1) \cdot \|f\|_0^2\end{aligned}$$

  d.h. die Normen sind äquivalent.

□

Bemerkung:

(i). Für Poincaré-Ungleichung hinreichend: Ω beschränkt in einer Richtung.

Beweis: (von Satz 5.1)

- Auf $W^1_{2,0}(\Omega)$ benutze Skalarprodukt

$$(f|g)_0 := \int_\Omega \nabla f \cdot \overline{\nabla g}$$

dieses erzeugt $\|\cdot\|_0$. Sei

$$\eta : C_C^\infty(\Omega) \to \mathbb{K}, \eta(\varphi) := \int \Delta\varphi \cdot g$$

η ist stetig bzgl. der W^1_2-Norm und besitzt eine eindeutige stetige lineare Fortsetzung auf $W^1_{2,0}(\Omega)$ (Folgerung 4.2, Funktionalanalysis I). Nach Darstellungssatz von Riesz-Fréchet: Es gibt $v \in W^1_{2,0}(\Omega)$ (eindeutig) mit

$$\eta(\varphi) = (\varphi|\bar{v})_0 \qquad \varphi \in W^1_{2,0}(\Omega) \supseteq C_C^\infty(\Omega)$$

Nach Lemma 5.2: $u = g + v$ löst das Dirichlet-Problem.

- Eindeutigkeit: Eindeutigkeit in Riesz-Fréchet.

□

5.4 **Satz** (Weyl'sches Lemma)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $\Delta u = 0$ im Distributionssinn. Dann besitzt u einen harmonischen Repräsentanten.

5.5 Lemma

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge harmonischer Funktionen auf Ω, $u_k \to u$ $(k \to \infty)$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (d.h. für alle $K \subseteq \Omega$ kompakt gilt

$$\int_K |u_k(x) - u(x)|\, dx \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

Dann gibt es $\tilde{u} \in C^\infty(\Omega)$, $\tilde{u}$ harmonisch, $u_k \to \tilde{u}$ kompakt $(k \to \infty)$, $u = \tilde{u}$ fast überall.

Beweis: Sei $K \subseteq \Omega$ kompakt. Es gibt $r > 0$, sodass $K_r := K + B[0,r] \subseteq \Omega$. Für $x \in K$ folgt:

$$\begin{aligned}|u_j(x) - u_k(x)| &\overset{2.2,2.1}{=} \left|\frac{1}{r^n \cdot w_n} \cdot \int_{B(x,r)} (u_j(y) - u_k(y))\, dy\right| \\ &\le \frac{1}{r^n \cdot w_n} \cdot \int_{K_r} |u_j(y) - u_k(y)|\, dy\end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned}\|u_j - u_k\|_{\infty,K} &\le \frac{1}{r^n \cdot w_n} \cdot \underbrace{\int_{K_r} |u_j(y) - u_k(y)|\, dy}_{\|u_j - u_k\|_{L^1(K_r)}} \\ &\to 0 \qquad (j,k \to \infty)\end{aligned}$$

wegen $u_k \to u$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Daher gibt es $\tilde{u} \in C(\Omega)$, sodass $u_k \to \bar{u}$ kompakt $(k \to \infty)$. Nach Folgerung 2.8: $\tilde{u}$ harmonisch, $\tilde{u} \in C^\infty(\Omega)$. Auch: $u_k \to \tilde{u}$ in L^1_{loc}. Daher $\tilde{u} = u$ fast überall. □

Beweis: (von Satz 5.4)

- Sei $x_0 \in \Omega, r > 0$ mit $B[x_0, 2r] \subseteq \Omega$ und $B := B(x_0, r)$. Genügt zu zeigen: $u|_B$ besitzt einen harmonischen Repräsentanten (siehe auch Übung 5).

- Sei $\tilde{u}(x) = u(x) \cdot 1_{B[x_0,2r]}(x)$. Dann ist $\tilde{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sei $(\varrho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine δ-Folge in $C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann ist für $\frac{1}{k} < r$ die Funktion $\varrho_k * \tilde{u}$ harmonisch auf B: Für $x \in B$ gilt

$$\begin{aligned}\Delta(\varrho_k * \tilde{u})(x) &\overset{2.7}{=} ((\Delta\varrho_k) * \tilde{u})(x) = \int_{B(x_0,2r)} \Delta\varrho_k(x-y) \cdot \tilde{u}(y)\, dy \\ &= \int_\Omega \Delta \underbrace{(y \mapsto \varrho_k(x-y))}_{\in C_C^\infty(\Omega)} \cdot u(y)\, dy \\ &\overset{\Delta u=0}{=} 0\end{aligned}$$

Aus Lemma 4.1: $\varrho_k * \tilde{u} \to \tilde{u}$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varrho_k * \tilde{u}|_B \to \tilde{u}|_B = u|_B$ in $L^1(B)$ für $k \to \infty$. Nach Lemma 5.5 besitzt u auf B einen harmonischen Repräsentanten.

□

Bemerkung:

(i). Satz 5.4 stammt von Hermann Weyl, 1940. Sogar: Ist u eine Distribution auf Ω, $\Delta u = 0$, dann wird u von einer harmonischen Funktion erzeugt.

(Beweis mit „Faltung“: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$(\varrho_k * f)(x) = \int \varrho_k(x-y) \cdot f(y)\, dy = u_f(\varrho_k(x - \cdot))$$

daher $u_k := u(\varrho_k(x - \cdot))$. Benutze Stetigkeitseigenschaft von u.)

Poisson-Problem, klassisch: Gegeben $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Finde u auf $\bar{\Omega}$ mit $\Delta u = f$, $u|_{\partial\Omega} = 0$.

5.6 Satz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in L^2(\Omega)$, dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $u \in W_{2,0}^1(\Omega)$, sodass $\Delta u = f$ (im Distributionssinn).

Beweis:
- Bemerke: Wenn $v \in W_2^1(\Omega)$, dann

$$\forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega) : \int_\Omega \Delta\varphi(x) \cdot v(x)\, dx = -\int \nabla\varphi(x) \cdot \nabla v(x)\, dx$$

  Daher ist $\nabla u = f$ äquivalent zu

$$\int \varphi(x) \cdot f(x)\, dx = -\int \nabla\varphi(x) \cdot \nabla v(x)\, dx \qquad (*)$$

  Ziel: u so zu finden, dass letzte Gleichung gilt.

- Benutze auf $W_{2,0}^1(\Omega)$ das Skalarprodukt

$$(f|g)_0 := \int_\Omega \nabla f \cdot \overline{\nabla g}$$

  siehe Beweis von 5.1, Poincaré-Ungleichung. Sei

$$\eta : W_{2,0}^1(\Omega) \to \mathbb{K}, \eta(\varphi) := -\int \varphi(x) \cdot f(x)\, dx$$

  Dann η linear und stetig, also $\eta \in W_{2,0}^1(\Omega)'$. (Dazu:

$$|\eta(\varphi)| \le \|f\|_2 \cdot \|\varphi\|_2 \le \|f\|_2 \cdot \|\varphi\|_{2,1}$$

  und $\|\cdot\|_{2,1}$ äquivalent zur 0-Norm.) Nach Darstellungssatz von Riesz-Fréchet gibt es eindeutig $u \in W_{2,0}^1(\Omega)$ mit

$$\forall \varphi \in W_{2,0}^1(\Omega) : \eta(\varphi) = (\varphi|\bar{u})_0 = \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla u$$

  Somit u Lösung.

- Eindeutigkeit: $(*)$ für alle $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$, damit auch für alle $\varphi \in W_{2,o}^1(\Omega) = \overline{C_C^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{2,1}}$. Dann mit Eindeutigkeit im Satz von Riesz-Fréchet.

□

Bemerkungen:

(i). Kombination von Satz 5.1 und Satz 5.6: Lösung des Poisson-Problems für Dirichlet-Randdaten $\neq 0$.

(ii). Für $\varphi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist $u := \varphi * L$ Lösung des Poisson-Problems $\Delta u = \varphi$.

Zum Randverhalten von $W_{2,0}^1$-Funktionen für $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$: Für $s > 0$ sei

$$\tau_s : C_C^\infty(\Omega) \to C_C^\infty(\mathbb{R}^{n-1}), \varphi \mapsto \varphi(\cdot, s)$$

5.7 Satz

Sei $1 \le p < \infty$. Für $s > 0$ ist τ_s $\|\cdot\|_{p,1} - \|\cdot\|_p$-stetig und hat daher eine eindeutige stetige Fortsetzung $\tau_s : W_{p,0}^1(\Omega) \to L^p(\mathbb{R}^{n-1})$. Es gilt $\|\tau_s\| \le s^{\frac{1}{q}}$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. (Für $p > 1$ folgt $\|\tau_s\| \to 0$ für $s \to 0$.) Für $p = 1$ gilt $\tau_s f \to 0$ für $s \to 0$ in $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ für alle $f \in W_{p,0}^1(\Omega)$.

Beweis: Sei $s > 0$, $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$. Für $\check{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\begin{aligned} |\tau_s(\varphi)| = |\varphi(\check{x}, s)| &= \left| \int_0^s 1 \cdot \partial_n \varphi(\check{x}, t)\, dt \right| \\ &\overset{\text{Hölder}}{\le} s^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_0^s |\partial_n \varphi(\check{x}, t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned} \|\tau_s(\varphi)\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(\check{x}, s)|^p \, d\check{x} \\ &\le s^{\frac{p}{q}} \cdot \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^s |\partial_n \varphi(\check{x}, t)|^p \, dt \, d\check{x} \\ &\le s^{\frac{p}{q}} \cdot \|\partial_n \varphi\|_p^p \le s^{\frac{p}{q}} \cdot \|\varphi\|_{p,1}^p \end{aligned}$$

Noch zu zeigen: Letzte Behauptung bei $p = 1$. Gezeigt ist $\|\tau_s\| \le 1$. Für $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$ gilt $\tau_s(\varphi) \to 0$ $(s \to 0)$. Genauer: $\tau_s \varphi = 0$ für s hinreichend klein, da φ kompakten Träger in Ω besitzt. Daher $\tau_s f \to 0$ $(s \to 0)$ für alle $f \in W_{1,0}^1(\Omega)$ nach Proposition 7.3, Funktionalanalysis 1. □

Nachtrag zu §3 siehe Bemerkungen nach Satz 3.2

6 Die Fourier-Transformation

- Funktionen in diesem Kapitel immer $\mathbb{C}$-wertig.
- Fourier-Transformation:

$$F : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_b(\mathbb{R}^n), \hat{f}(\xi) = Ff(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-\imath x \cdot \xi} \, dx$$

Es gilt $\hat{f} \in C_b(\mathbb{R}^n)$,

$$\|Ff\|_\infty \leq \frac{\|f\|_1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

(Stetigkeit von $\hat{f}$: dominierte Konvergenz) $\hat{f}$ heißt Fourier-Transformierte von f.

6.1 Satz

Sei $k \in \mathbb{N}$.

(i). Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $[x \mapsto |x|^k \cdot f(x)] \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$,

$$\forall |\alpha| \leq k : \partial^\alpha Ff = F(x \mapsto (-\imath x)^\alpha \cdot f(x))$$

Kurz: $\partial^\alpha \hat{f} = \widehat{(-\imath x)^\alpha f}$.

(ii). Für $f \in W_1^k(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\forall |\alpha| \leq k : F(\partial^\alpha f) = [\xi \mapsto (\imath \xi)^\alpha \cdot Ff(\xi)]$$

Kurz: $\widehat{\partial^\alpha f} = (\imath \xi)^\alpha \cdot \hat{f}$.

Beweis: (i). Differentiation unter dem Integral:

$$\partial_\xi^\alpha \int e^{-\imath x \cdot \xi} \cdot f(x) \, dx = \int e^{-\imath x \cdot \xi} (-\imath x)^\alpha \cdot f(x) \, dx$$

wegen

$$|e^{-\imath x \cdot \xi} \cdot f(x)| \leq |f(x)| \in L^1 \qquad |e^{-\imath x \cdot \xi} (-\imath x)^\alpha \cdot f(x)| \leq |x|^{|\alpha|} \cdot |f(x)| \in L^1$$

(ii). Für $f \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\int (\partial_x^\alpha f(x)) \cdot e^{-\imath x \cdot \xi} \, dx &= (-1)^{|\alpha|} \cdot \int \underbrace{(\partial_x^\alpha e^{-\imath x \cdot \xi})}_{(-\imath \xi)^\alpha \cdot e^{-\imath x \cdot \xi}} \cdot f(x) \, dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \cdot (-\imath \xi)^\alpha \int f(x) \cdot e^{-\imath x \cdot \xi} \, dx \\
&= (\imath \xi)^\alpha \cdot \hat{f}(\xi) \qquad (*)
\end{aligned}$$

Für $f \in W_1^k$ existiert $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ in $W_1^k(\mathbb{R}^n)$ (Übung 5). Damit $(*)$ auch für $f \in W_1^k(\mathbb{R}^n)$.

□

6.2 Folgerung (Satz von Riemann-Lebesgue)

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\hat{f}$ stetig und $\hat{f}(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$. Kurz: $F(L^1) \subseteq C_0$.

Beweis: Für $f \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:

$$\underbrace{\widehat{\partial^\alpha f}}_{\in C_b} = [\xi \mapsto (\imath\xi)^\alpha \cdot \hat{f}(\xi)]$$

ist beschränkt. Daher $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$, somit $F(C_C^\infty(\mathbb{R}^n)) \subseteq C_0(\mathbb{R}^n)$. Auch $C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Damit:

$$F\left(\overline{C_C^\infty}^{L^1}\right) \subseteq \overline{C_0}^{C_b} = C_0$$

da F stetig. □

Beispiel:

(i). Behauptung:

$$F\left(\exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)\right) = \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$$

Es genügt $n = 1$ zu behandeln (Satz von Fubini). Sei $f(x) := \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$. Dann:

$$\begin{aligned} f'(\xi) &\overset{6.1(i)}{=} -\int (\imath x) \cdot f(x) \cdot e^{-\imath x \cdot \xi}\, dx \\ &\overset{f'=-x\cdot f}{=} \imath \cdot \int f'(x) \cdot e^{-\imath x \cdot \xi}\, dx \\ &\overset{6.1(ii)}{=} \imath \cdot (\imath\xi) \cdot \hat{f}(\xi) = -\xi \cdot \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

also gilt $\hat{f}(\xi) = c \cdot \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2}\right)$. Aus

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \underbrace{\int \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right) \cdot e^0\, dx}_{\sqrt{2\pi}} = 1$$

folgt $c = 1$.

6.3 Lemma

Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann:

(i). $\int \hat{f} \cdot g = \int f \cdot \hat{g}$

(ii). Für $\eta \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$F(x \mapsto e^{\imath \eta \cdot x} \cdot f(x))(\xi) = \hat{f}(\xi - \eta)$$

(iii). Für $a > 0$ gilt

$$F\left(x \mapsto f\left(\frac{x}{a}\right)\right)(\xi) = a^n \cdot \hat{f}(a \cdot \xi)$$

Beweis: (i). Es gilt:

$$\begin{aligned} \int \hat{f}(y) \cdot g(y)\, dy &\overset{\text{Def}}{=} \int \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \int f(x) \cdot e^{-\imath x \cdot y}\, dx\right) g(y)\, dy \\ &\overset{\text{Fub}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \int f(x) \int e^{-\imath x \cdot y} \cdot g(y)\, dy\, dx \\ &= \int f(x) \cdot \hat{g}(x)\, dx \end{aligned}$$

(ii).

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \int e^{-\imath x\cdot\xi} \cdot e^{\imath \eta\cdot x} \cdot f(x)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \int e^{-\imath(\xi-\eta)\cdot x} \cdot f(x)\,dx$$
$$= \hat{f}(\xi-\eta)$$

(iii).

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \int e^{-\imath x\cdot\xi} \cdot f\left(\frac{x}{a}\right)dx \overset{\mathrm{TF}}{=} a^n \cdot \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \int e^{-\imath(a\cdot\xi)\cdot y} \cdot f(y)\,dy$$
$$= a^n \cdot \hat{f}(a\cdot\xi)$$

□

6.4 Satz (Fourier-Inversionssatz)

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und es gelte $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \int \hat{f}(\xi) \cdot e^{\imath x\cdot\xi}\,d\xi$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ fast überall.

Bemerkung:

(i). Formel besagt, dass f „Überlagerung" von „ebenen Wellen" $x \mapsto e^{\imath x\cdot\xi}$ ist. $\hat{f}$ „Fourier-Koeffizienten" von f. Hauptformel.

Beweis: Sei $\varphi(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_k := \varphi(k^{-1}\cdot)$ $(k \in \mathbb{N})$. Dann

$$\underbrace{\int \hat{f}(\xi) \cdot e^{\imath x\cdot\xi} \cdot \varphi_k(\xi)\,d\xi}_{\overset{dK}{\to}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\cdot\int \hat{f}(\xi)\cdot e^{\imath x\cdot\xi}\,d\xi} \overset{6.3(i)}{=} \int f(y) \cdot F(\xi \mapsto e^{\imath x\cdot\xi} \cdot \varphi_k(\xi))(y)\,dy$$
$$\overset{6.3(ii)}{=} \int f(y) \cdot F(\xi \mapsto \varphi_k(\xi))(y-x)\,dy$$
$$= (\hat{\varphi_k} \times f)(x)$$

Noch zu zeigen: $\hat{\varphi_k} \times f \to f$ in L^1. Dann fertig. Bemerke $\hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$, daher

$$\int \hat{\varphi}(\xi)\,d\xi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{n} \underbrace{\int e^{-\frac{\xi_j^2}{2}}\,d\xi_j}_{\sqrt{2\pi}} = 1$$

Auch $\hat{\varphi_k} \overset{6.3(iii)}{=} k^n \cdot \hat{\varphi}(k\cdot)$ (insbesondere $\hat{\varphi_k}$ symmetrisch). Aus dem nächsten Satz folgt dann die Behauptung. □

6.5 Satz

Seien $\varrho \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(i). Dann ist

$$(\varrho * f)(x) := \int \varrho(x-y) \cdot f(y)\,dy$$

fast überall definiert, d.h. $[y \mapsto \varrho(x-y) \cdot f(y)] \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für $x \in \mathbb{R}^n$ fast überall. $\varrho * f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\|\varrho * f\|_p \le \|f\|_p \cdot \|\varrho\|_1$.

(ii). Es gelte zusätzlich $p < \infty$, $\int \varrho = 1$ und $\varrho_k := k^n \cdot \varrho(k\cdot)$. Dann gilt $\varrho_k * f \to f$ $(k \to \infty)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

6.6 Lemma

Seien $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Für $y \in \mathbb{R}^n$ sei $f_y(x) := f(x-y)$. Dann ist $y \mapsto f_y \in L^p(\mathbb{R}^n)$ stetig.

Beweis:

- Klar, falls $f \in C_C(\mathbb{R}^n)$: f gleichmäßig stetig, für $y \in B(0,R)$ ist $\operatorname{spt} f_y \subseteq B(0, R+R')$.
- Es gibt $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C_C(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\|f_y^k - f_y\|_p = \|f_k - f\|_p \\
&\Rightarrow \underbrace{[y \mapsto f_y^k]}_{\text{stetig}} \overset{k\to\infty}{\to} \underbrace{[y \mapsto f_y]}_{\text{stetig}} \text{ glm auf} \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

□

Beweis: (von Satz 6.5 für $p = 1$)

(i). Satz von Tonelli:

$$\begin{aligned}
\int_x \int_y |\varrho(x-y) \cdot f(y)| \, dy \, dx &= \int_y \int_x |\varrho(x-y)| \, dx \, |f(y)| \, dy \\
&= \|\varrho\|_1 \cdot \int_y |f(y)| \, dy = \|\varrho\|_1 \cdot \|f\|_1 < \infty
\end{aligned}$$

daher

$$x \mapsto \int_y |\varrho(x-y) \cdot f(y)| \, dy \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \int_y |\varrho(x-y) \cdot f(y)| \, dy < \infty \qquad \text{fast überall}$$

damit $\varrho * f$ definiert fast überall und Ungleichung klar.

(ii). Fubini/Tonelli:

$$\begin{aligned}
\|\varrho_k * f - f\|_1 &= \int |\varrho_k * f(x) - f(x)| \, dx \\
&= \int_x \left| \int_y \varrho_k(y) \cdot (f(x-y) - f(x)) \, dy \right| dx \\
&\le \int_y \left(\int_x |f(x-y) - f(x)| \, dx \right) \varrho_k(y) \, dy \\
&= \int k^n \cdot |\varrho(k \cdot y)| \cdot \|f_y - f\|_1 \, dy \\
&= \int |\varrho(z)| \cdot \underbrace{\left\| f_{\frac{z}{k}} - f \right\|_1}_{\le 2\|f\|_1} dz \\
&\overset{\text{dK}}{\to} 0 \qquad (k \to \infty)
\end{aligned}$$

da $\left\| f_{\frac{z}{k}} - f \right\|_1 \to 0$ $(k \to \infty)$ nach Lemma 6.6.

□

Bemerkungen:

(i). Zur Ungleichung $\|\varrho_k * f - f\|_1 \leq \int |\varrho_k(y)| \cdot \|f_y - f\|_1 \, dy$:

$$\varrho_k * f = \int \underbrace{\varrho_k(y) \cdot f_y(\cdot)}_{\mathbb{R}^n \ni y \mapsto \varrho_k(y) \cdot f_y \in L^1(\mathbb{R}^n)} \, dy$$

$$\varrho_k * f - f = \int \varrho_k(y) \cdot (f_y - f) \, dy$$

$$\Rightarrow \|\varrho_k * f - f\|_1 \leq \int |\varrho_k(y)| \cdot \|f_y - f\|_1 \, dy$$

Funktioniert auch für $L^p(\mathbb{R}^n)$. (Integration im Banachraum)

(ii). $F(L^1) \nsubseteq L^1$; trotzdem zeigt Satz 6.4 die Injektivität der Fourier-Transformation F: Wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f} = 0$, dann $f = F^{-1}(0) = 0$.

Sei $M := \{f \in L^1(\mathbb{R}^n); \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$. M ist ein linearer Teilraum von $L^1(\mathbb{R}^n)$.

6.7 Lemma (i). Es gilt $C_C^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq W_1^{n+1}(\mathbb{R}^n) \subseteq M$

(ii). $F : M \to M$ ist bijektiv.

(iii). $M \subseteq L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$

(iv). M ist dicht in $L^1 \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ (Norm: $\|f\| := \|f\|_1 + \|f\|_\infty$) und in $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ (Norm: $\|f\| := \|f\|_1 + \|f\|_2$)

Beweis: (i). Für $f \in W_1^{n+1}(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha| \leq n+1$:

$$[\xi \mapsto (\imath \xi)^\alpha]\hat{f} \overset{6.1}{=} F(\partial^\alpha f)$$

beschränkt, damit

$$[\xi \mapsto 1 + |\xi|^{n+1}]\hat{f}$$

beschränkt. Daher

$$\hat{f} = \underbrace{\left[\xi \mapsto \frac{1}{1 + |\xi|^{n+1}}\right]}_{\in L^1(\mathbb{R}^n)} \underbrace{[\xi \mapsto 1 + |\xi|^{n+1}]\hat{f}}_{\text{beschränkt}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

(ii). Für $f \in M$ gilt

$$F\hat{f}(x) \overset{6.4}{=} F^{-1}\hat{f}(-x) \overset{6.4}{=} f(-x)$$

also $F\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\hat{f} \in M$. Aus $F^{-1}f = Ff(-\cdot)$ folgt, dass $F^{-1} : M \to M$, somit $F : M \to M$ surjektiv. (Injektiv nach obiger Bemerkung)

(iii). Für $f \in M$ ist $f = F^{-1}\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ nach 6.2. Für $f \in L^1 \cap C_0(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned} \int |f|^2 &\leq \|f\|_\infty \cdot \int |f| = \|f\|_\infty \cdot \|f\|_1 \\ &\leq \frac{1}{2}(\|f\|_1^2 + \|f\|_\infty^2) \end{aligned}$$

(Allgemeiner: $p_0 \leq p \leq p_1 \Rightarrow L^{p_0} \cap L^{p_1} \subseteq L^p$)

(iv). Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$. Approximation durch Abschneiden ($\eta \in C_C(\mathbb{R}^n)$, $\eta(x) = 1$ für $|x| \leq 1$, $\eta\left(\frac{\cdot}{k}\right) f \to f$ in $L^1 \cap C_0(\mathbb{R}^n)$). Damit $C_C(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$. Dann „Glätten“. Gleiche Prozedur für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

□

6.8 Satz

Die bijektive Abbildung $F|_M : M \to M$ lässt das L^2-Skalarprodukt invariant und ist daher isometrisch bzgl. der L^2-Norm. Somit besitzt $F|_M$ eine eindeutige unitäre Fortsetzung $F_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$. Für $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt $F_2 f = Ff$.

Beweis:
- Seien $f, g \in M$. Dann

$$\begin{aligned}(\hat{f}|\hat{g}) &= \int \hat{f} \cdot \overline{\hat{g}} \overset{6.3(i)}{=} \int f \cdot \hat{\overline{\hat{g}}} = \int f \cdot \overline{g} \\ &= (f|g)\end{aligned}$$

wegen

$$\overline{\hat{g}}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \int e^{\imath x \cdot \xi} \cdot \overline{g}(x)\, dx = F^{-1}(\overline{g})(\xi)$$

- Damit alles klar (Funktionalanalysis!) außer der letzten Gleichung. Sei $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, dann gibt es $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in M mit $f_k \to f$ in L^1 und L^2. Damit

$$Ff_k \to Ff \quad \text{in}\, C_0 \qquad\qquad Ff_k \to F_2 f \quad \text{in}\, L^2$$

also $Ff = F_2 f$.

□

Bemerkung:

(i). Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$F_2 f(\xi) = L^2 - \lim_{m \to \infty} \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \int e^{-\imath x \cdot \xi} \cdot 1_{B[0,m]} \cdot f(x)\, dx \right)$$

mit $F_2 f = L^2 - \lim_{m \to \infty} F(1_{B(0,m)} \cdot f)$. Ob punktweise Konvergenz ist ungeklärt.

7 Klassische Lösung der Wärmeleitungsgleichung

- Ziel: Löse
$$\partial_t u = c \cdot \Delta_x u \qquad u(0,\cdot) = u_0 \tag{WLG}$$
mit $c > 0$, $u = u(t,x)$, für Anfangswerte $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Gesucht $u : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, zweimal stetig differenzierbar auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ mit $\partial_t u = c \cdot \Delta u$.
- Herleitung der Lösungsformel (mit Fourier-Transformation): Annahme u löst die Wärmeleitungsgleichung (WLG). Fourier-Transformation bzgl. x-Variablen (falls alles erlaubt ist) ergibt
$$\partial_t \hat{u} = -c \cdot |\xi|^2 \cdot \hat{u} \qquad \hat{u}(0,\cdot) = \hat{u}_0$$
Lösung (gewöhnliche Differentialgleichung):
$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \cdot e^{-c\,t\cdot|\xi|^2}$$
Weitere Behandlung mittels Lemma 7.1

7.1 Lemma

Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann
$$\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \hat{f} \cdot \hat{g}$$

Beweis: Übung □

- Idee: Finde g mit
$$\hat{u}_0 \cdot \hat{g} = \hat{u}_0 \cdot e^{-c\,t\cdot|\xi|^2} \overset{7.1}{=} \widehat{u_0 * g} \cdot (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$$
Dann
$$u(t,\xi) = (u_0 * g)(t,\xi) \cdot (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$$
- Erinnerung:
$$F\left(\exp\left(-\frac{1}{2}|\cdot|^2\right)\right)(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2}|\xi|^2\right)$$
$$F\left(f\left(\frac{\cdot}{a}\right)\right)(\xi) = a^n \cdot \underbrace{Ff}_{=:g}(a\cdot\xi)$$
$$\Rightarrow F^{-1}(g(a\cdot))(x) = a^{-n} \cdot (F^{-1}g)\left(\frac{x}{a}\right)$$
Anwendung auf Obiges:
$$\begin{aligned} F^{-1}\left(e^{-c\,t\cdot|\xi|^2}\right)(x) &= F^{-1}\left(\exp\left(-|\underbrace{\sqrt{2ct}}_{\hat{=}a}\cdot\xi|^2\cdot\frac{1}{2}\right)\right)(x) \\ &= \frac{1}{(2ct)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{x}{\sqrt{2ct}}\right|^2\right) \\ &= (2ct)^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{|x|^2}{4ct}\right) (= k_{ct}(x)) \end{aligned} \tag{7.1}$$

Definition:

(i). Die Funktion

$$(0,\infty)\times\mathbb{R}^n \ni (t,x)\mapsto k(t,x) := k_t(x) := (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

heißt Wärmeleitungskern.

Zusammenfassung:

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}}\cdot\widehat{k_{ct}}(\xi) = e^{-c\,t\cdot|\xi|^2} \tag{7.2}$$

Damit

$$\begin{aligned}\hat{u}(t,\xi) &= \hat{u}_0(\xi)\cdot e^{-c\,t\cdot|\xi|^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\cdot\hat{u}_0(\xi)\cdot\widehat{k_{ct}}(\xi)\\ &= \widehat{k_{ct}*u_0}(\xi)\\ \Rightarrow u(t,x) &= k_{ct}*u_0(t,x)\end{aligned}$$

Ziel: Obiges ist okay für $u_0\in C_b(\mathbb{R}^n)$. Nur $c=1$ wird hier behandelt. (Stochastik: $c=\frac{1}{2}$).

Eigenschaften von k_t:

(i). Es gilt:

$$\|k_t\|_1 = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\cdot\int e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\cdot\int e^{-\frac{|x|^2}{2}}\,dx = 1$$

(k_t sind Gauß'sche Wahrscheinlichkeitsdichten.)

(ii). $k_t = t^{-\frac{n}{2}}\cdot k_1\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right)$, also ist $(k_t)_{t\geq 0}$ eine Art „δ-Folge“.

(iii). Aus (7.2) folgt:

$$F\left(\frac{d}{dt}k_t\right) = \frac{d}{dt}F(k_t)(\xi)$$

(Differentiation unter dem Integral) und

$$\frac{d}{dt}F(k_t)(\xi) \overset{(7.2)}{=} -|\xi|^2\cdot\widehat{k_t}(\xi)$$

Somit $\frac{d}{dt}k_t(x) = \Delta k_t(x)$, da Fourier-Transformation injektiv. D.h. $(t,x)\mapsto k_t(x)$ ist Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit $c=1$.

(iv). Für $s,t>0$ gilt:

$$\begin{aligned}F(k_s*k_t)(\xi) &= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\cdot(\hat{k}_s\cdot\hat{k}_t)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\cdot\exp^{-(s+t)\cdot|\xi|^2}\\ &= F(k_{s+t})(\xi)\end{aligned}$$

7.2 Satz (Existenz und stetige Abhängigkeit)

Sei $u_0\in C_b(\mathbb{R}^n)$. Sei $u:[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}$ definiert durch

$$u(t,x) := \begin{cases} u_0(x) & t=0, x\in\mathbb{R}^n\\ k_t*u_0(x) & t>0, x\in\mathbb{R}^n\end{cases}$$

Dann ist $u|_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^n}\in C^\infty$, $\partial_t u = \Delta u$ auf $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, u stetig (insbesondere wird Anfangswert u_0 stetig angenommen), u beschränkt, $\|u\|_\infty\leq\|u_0\|_\infty$. Ist u_0 gleichmäßig stetig, dann $u(t,\cdot)\to u_0$ $(t\to 0)$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$.

Bemerkungen:

(i). Für $t > 0$ ist

$$u(t,x) = \int u_0(y) \cdot k_t(x-y)\, dy \tag{7.3}$$

d.h. u ist eine Superposition der Lösung $(t,x) \mapsto k_t(x-y)$ (mit Gewicht $u_0(y)$) für $y \in \mathbb{R}^n$. $k(t,x)$ heißt (und ist (distributionelle), siehe Übung) Fundamentallösung von $\partial_t - \Delta$.

(ii). Für Eindeutigkeit von beschränkten Lösungen siehe §8.

(iii). Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten: Sind $u_0, v_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$, u, v zugehörige Lösungen aus 7.2, dann $u - v$ Lösung zum Anfangswert $u_0 - v_0$, also $\|u - v\|_\infty \le \|u_0 - v_0\|_\infty$.

(iv). Statt Beschränktheit von u_0 genügt es eine Abschätzung der Form

$$|u_0(x)| \le M \cdot e^{A \cdot |x|^2} \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

anzunehmen. Dann Lösung auf $\left[0, \frac{1}{4A}\right] \times \mathbb{R}^n$ (Übung).

7.3 Lemma

Sei $\varrho \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int \varrho = 1$ und für $s > 0$ sei $\varrho_s := \frac{1}{s^n} \cdot \varrho\left(\frac{x}{s}\right)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Sei $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt: Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$, f gleichmäßig stetig in A, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \forall x \in A, y \in B(x,\delta) : |f(x) - f(y)| \le \varepsilon$$

dann $\varrho_s \times f \to f$ $(s \to 0)$ gleichmäßig auf A. Insbesondere: $\varrho_s * f \to f$ gleichmäßig auf kompakten Mengen. Ist f gleichmäßig stetig, dann $\varrho_s * f \to f$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Für $s > 0, x \in A$ gilt

$$\begin{aligned}
(\varrho_s * f)(x) &= \int s^{-n} \cdot \varrho\left(\frac{y}{s}\right) \cdot f(x-y)\, dy \overset{y=sz}{=} \int \varrho(z) \cdot f(x - s \cdot z)\, dz \\
\Rightarrow |\varrho_s * f(x) - f(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^n} |\varrho(z)| \cdot |f(x - s\cdot z) - f(x)|\, dz \\
&\le \left(\int_{|z|<R} |\varrho(z)|\, dz\right) \cdot \sup_{|z|<R} |f(x - s \cdot z) - f(x)| \\
&\quad + \underbrace{\left(\int_{|z|\ge R} |\varrho(z)|\, dz\right) \cdot 2\|f\|_\infty}_{(*)}
\end{aligned}$$

Wähle $R > 0$ so, dass $(*) < \frac{\varepsilon}{2}$ (dominierte Konvergenz). Sei $\delta > 0$ wie in gleichmäßiger Stetigkeit von f in A. Für $s < \frac{\delta}{R}$ folgt

$$\forall z \in B(0,R) : |f(x - s \cdot z) - f(x)| \le \varepsilon$$

Daher

$$|\varrho * f(x) - f(x)| \le \varepsilon \cdot \|\varrho\|_1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

□

Beweis: (von Satz 7.2)

(i). Differenzierbarkeit, Wärmeleitungsgleichung:

Es genügt zu zeigen, dass unter dem Integral differenziert werden darf. Dazu genügt: Für $0 < t_0 < t_1$, $R > 0$, $k \in \mathbb{N}_0, \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gibt es $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\forall t \in [t_0, t_1], x \in B[0,R], y \in \mathbb{R}^n : \left|\partial_t^k \partial_x^\alpha k(t, x-y)\right| \le h(y)$$

Denn Behauptung mit Induktion, Differenzierbarkeitslemma.

Nun: $\partial_t^k \partial_x^\alpha k(t,x)$ ist (Polynom in $\frac{1}{\sqrt{t}}, x$) $\cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Somit gibt es $m \in \mathbb{N}_0$, $C > 0$ mit

$$\begin{aligned} |\partial_t^k \partial_x^\alpha k(t, x-y)| &\le C \cdot \left(1 + t^{\frac{-1}{2}}\right)^m \cdot (1 + |x-y|)^m \cdot e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \\ &\le C \cdot (1 + t_0^{-\frac{1}{2}})^m \cdot (1 + R + |y|)^m \cdot e^{-\frac{|x-y|^2}{4t_1}} \qquad (*) \end{aligned}$$

Wegen

$$\forall |x| \le R : |x-y|^2 = |x|^2 + 2(x|y) - |y|^2 \le 2R|y| - |y|^2$$

folgt in $(*)$:

$$|\partial_t^k \partial_x^\alpha k(t, x-y)| \le C \cdot (1 + t_0^{-\frac{1}{2}})^m \cdot (1 + R + |y|)^m \cdot e^{\frac{2R|y| - |y|^2}{4t_1}} =: h(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

(ii). Beschränktheit:
Für $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} |u(t,x)| &\le \int |k(t,y)| \cdot |u_0(x-y)| \, dy \le \|u_0\|_\infty \cdot \underbrace{\|k(t,\cdot)\|_1}_{1} \\ &= \|u_0\|_\infty \end{aligned}$$

(iii). Stetigkeitseigenschaften mit Lemma 7.3:
Mit $\varrho := k(1,\cdot) = k_1$ gilt:

$$k_t = t^{-\frac{n}{2}} \cdot k_1 \left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}} \right) = \varrho_{\sqrt{t}}$$

Aus Lemma 7.3 folgt somit: Ist u_0 gleichmäßig stetig, dann $u(t,\cdot) \to u_0$ gleichmäßig in $\mathbb{R}^n$. Ist $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$, dann $u(t,\cdot) = \varrho_{\sqrt{t}} * u_0 \to u_0$ kompakt $(t \to 0)$. Damit u stetig:

$$|u(t,x) - u_0(x_0)| \le \underbrace{|u(t,x) - u_0(x)|}_{\le \varepsilon \, (1)} + \underbrace{|u_0(x) - u_0(x_0)|}_{\le \varepsilon \, (2)}$$

(2): für $|x - x_0| \le \delta$, da u_0 stetig. (1): für $t \le \delta_1$ wegen kompakter Konvergenz auf $B[x_0, \delta]$.

□

8

Maximumprinzip und Eindeutigkeit

8.1 Satz (Maximumprinzip)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T \in \mathbb{R}$- Sei $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit $\partial_t u = \Delta u$. Dann nimmt $u|_{M_T}$ mit $M_T := \bar{\Omega} \cap (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$ ihr Maximum auf

$$\{(t,x) \in \partial\Omega; t \leq T\}$$

an.

Beweis:

- Ohne Einschränkung $\Omega \subseteq (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$. Sei $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon(t,x) := u(t,x) - \varepsilon \cdot t$.
- Zeige, dass $u_\varepsilon|_{M_T}$ ihr Maximum auf $\{(t,x) \in \partial\Omega; t \leq T\}$ annimmt. Annahme nicht. Dann gibt es $(t_0, x_0) \in \Omega$, $t_0 \leq T$, wo $u_\varepsilon|_{M_T}$ ihr Maximum annimmt. Daraus folgt, dass $\mathrm{Hess}_x(u_\varepsilon(t_0,\cdot))(x_0)$ negativ semidefinit ist, insbesondere $\partial_j^2 u_\varepsilon(t_0,x_0) \leq 0$ für $j = 1,\dots,n$, damit $\Delta u_\varepsilon(t_0,x_0) \leq 0$. Somit
  $$\partial_t u_\varepsilon(t_0,x_0) = \underbrace{\partial_t u(t_0,x_0)}_{\Delta u(t_0,x_0) = \Delta u_\varepsilon(t_0,x_0)} - \varepsilon \leq -\varepsilon < 0$$
  Daher gibt es $t < t_0$ sodass $(t,x_0) \in \Omega$, $u_\varepsilon(t,x_0) > u_\varepsilon(t_0,x_0)$. Widerspruch!
- Damit:
  $$\begin{aligned} \max u_\varepsilon|_{M_T} &\leq \max\{u_\varepsilon(t,x); (t,x) \in \partial\Omega, t \leq T\} \\ &\overset{u_\varepsilon \leq u}{\leq} \max\{u(t,x); (t,x) \in \partial\Omega, t \leq T\} \end{aligned}$$
  Für $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

$\square$

8.2 Folgerung (Eindeutigkeit)

Sei $T > 0$, $u : [0,T) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, $u(0,\cdot) = 0$, $u|_{(0,T)\times\mathbb{R}^n}$ erfülle die Wärmeleitungsgleichung. Dann gilt $u = 0$.

Beweis: Die Funktion $v(t,x) := 2nt + |x|^2$ erfüllt die Wärmeleitungsgleichung. Für $\varepsilon > 0$ betrachte

$$u_\varepsilon(t,x) := u(t,x) - \varepsilon \cdot v(t,x)$$

Sei $R > 0$ so, dass $\varepsilon \cdot R^2 > \|u\|_\infty$. Dann ist

$$u_\varepsilon(t,x) \leq 0 \text{ für } \begin{cases} t = 0, x \in \mathbb{R}^n \\ |x| = R, 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Aus Satz 8.1 folgt, dass $u_\varepsilon(t,x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T$. Für $\varepsilon \to 0$ folgt $u \leq 0$. Analog: $-u \leq 0$. $\square$

Bemerkungen:

(i). Eindeutigkeit gilt auch, falls $|u(t,x)| \leq M \cdot e^{A\cdot|x|^2}$ mit M, A geeignet. Statt v wie oben benötigt man dann eine stärker wachsende Lösung der Wärmeleitungsgleichung:

$$v(t,x) := |t|^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

ist Lösung auf $(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times \mathbb{R}^n$ (Übung). Für $t_0 > 0$ ist $v(t - t_0, x)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $[0, t_0) \times \mathbb{R}^n$ mit

$$v(t - t_0, x) \geq t_0^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t_0}}$$

(Lösung zum Anfangswert $t_0^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t_0}}$).

(ii). Aus dem bisher Bewiesenen folgt, dass für $t < 0$ im Allgemeinen keine beschränkte Lösung existiert. Ist $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$, u für ein $\varepsilon > 0$ eine beschränkte Lösung auf $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}^n$ mit $u(0,\cdot) = u_0$, dann u Lösung auf $\left[-\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right) \times \mathbb{R}^n$ zum Anfangswert $u\left(-\frac{\varepsilon}{2}, \cdot\right)$. Damit u auf $\left[-\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right)$ eindeutig nach Folgerung 8.2, damit wie in §7. Somit $u_0 = u(0,\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Damit: Falls $u \in C_b(\mathbb{R}^n)\backslash C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gibt es keine beschränkte Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}^n$.

(iii). Es gibt Lösungen der Wärmeleitungsgleichung auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ mit $u(0,\cdot) = 0$, $u \not\equiv 0$ (vgl. Hellwig).

(iv). Wärmeleitungsgleichung bei „Zeitumkehr“: $\partial_t u = -\Delta u$

9 Die n-dimensionale Wellengleichung

$$u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{K},(t,x)\mapsto u(t,x)\text{ mit } u_{tt}=\Delta u$$

9.1 Satz (Energieungleichung und Eindeutigkeit)

Sei $x_0\in\mathbb{R}^n$, $t_0>0$, $\Omega:=\{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n; t\in(0,t_0),|x-x_0|<t_0-t\}$. Sei $u\in C^2(\bar\Omega)$ ($u\in C^2(\Omega)$, Ableitungen stetig fortsetzbar auf $\bar\Omega$) mit $u_{tt}=\Delta_x u$. Für $0\le t<t_0$ sei

$$E(t):=\int_{|x-x_0|\le t_0-t}\left(u_t(t,x)^2+\sum_{j=1}^n\partial_j u(t,x)^2\right)dx$$

(„Energie“). Dann ist $E:[0,t_0)\to[0,\infty)$ monoton fallend, insbesondere $E(t)\le E(0)$ $(0\le t<t_0)$, „Energieungleichung“. Ist $u(0,x)=0, u_t(0,x)=0$ für alle $x\in B(x_0,t_0)$, dann $u=0$. (Entsprechend für $t_0<0$).

Beweis:

- Für $0<t_1<t_0$ sei $\Omega_{t_1}:=\{(t,x)\in\Omega; 0<t<t_1\}$ (Kegelstumpf).
- Vorbereitung des Gaußschen Integralsatzes: In Ω gilt

$$\begin{aligned}0&=2u_t\cdot(u_{tt}-\Delta u)\\&=(u_t^2)_t-2\sum_{j=1}^n\partial_j(u_t\cdot\partial_j u)+\sum_{j=1}^n\partial_t(\partial_j u)^2\\&=\operatorname{div}_{(t,x)}\begin{pmatrix}u_t^2+\sum_{j=1}^n(\partial_j u)^2\\-2u_t\cdot\partial_1 u\\\vdots\\-2u_t\cdot\partial_n u\end{pmatrix}\end{aligned}$$

- Gaußscher Integralsatz (in der Form aus Analysis 3, J. Voigt, eigentlich nicht anwendbar):

$$0=\int_{\partial\Omega t_1}\left(\left(u_t^2+\sum_{j=1}^n(\partial_j u)^2\right)\nu_t-2\sum_{j=1}^n u_t\cdot\partial_j u\cdot\nu_j\right)dS \qquad (*)$$

Auf dem Mantel gilt $\nu_t^2=\sum_{j=1}^n\nu_j^2=\frac{1}{2}$, daher Integrand in $(*)$:

$$\begin{aligned}&\left(u_t^2+\sum_{j=1}^n(\partial_j u)^2\right)\nu_t-2\sum_{j=1}^n u_t\cdot\partial_j u\cdot\nu_j\\&=\frac{1}{\nu_t}\cdot\left(\left(u_t^2+\sum_{j=1}^n(\partial_j u)^2\right)\nu_t^2-2\sum_{j=1}^n u_t\cdot\partial_j u\cdot\nu_j\cdot\nu_t\right)\\&=\sqrt{2}\cdot\left(\sum_{j=1}^n\left(u_t^2\cdot\nu_j^2+(\partial_j u)^2\cdot\nu_t^2\right)-2\sum_{j=1}^n u_t\cdot\partial_j u\cdot\nu_j\cdot\nu_t\right)\\&=\sqrt{2}\cdot\sum_{j=1}^n\left(-\partial_j u\cdot\nu_t+u_t\cdot\nu_j\right)^2\ge 0\end{aligned}$$

Daher in $(*)$ mit $S_{t_1} := \{(t,x) \in \Omega; t = t_1\}$:

$$\begin{aligned}
0 &\geq \int_{S_{t_1}} \left(\left(u_t^2 + \sum_{j=1}^n (\partial_j u)^2 \right) \nu_t - 2 \sum_{j=1}^n u_t \cdot \partial_j u \cdot \nu_j \right) dS \\
&\quad + \int_{S_0} \left(\left(u_t^2 + \sum_{j=1}^n (\partial_j u)^2 \right) \nu_t - 2 \sum_{j=1}^n u_t \cdot \partial_j u \cdot \nu_j \right) dS \\
&= \int_{|x-x_0| \leq t_0 - t_1} \left(u_t(t_1,x)^2 + \sum_{j=1}^n (\partial_j u(t_1,x))^2 \right) dx \\
&\quad - \int_{|x-x_0| \leq t_0} \left(u_t(0,x)^2 + \sum_{j=1}^n (\partial_j u(0,x))^2 \right) dx \\
&= E(t_1) - E(0)
\end{aligned}$$

(Für $S_{t_1} : \nu = (1, 0, \dots, 0)^T$, für S_0: $\nu = (-1, 0, \dots, 0)$)

- Monoton fallend: $0 \leq t_1 \leq t_2 < t_0$, zu zeigen $E(t_2) \leq E(t_1)$. Betrachte $u(\cdot + t_1, \cdot)$.
- Eindeutigkeit: Es folgt $u_t = 0, \partial_j u = 0$ auf Ω. Aus $u(0,\cdot) = 0$ und $u_t = 0$ folgt dann auch $u = 0$.

$\square$

Bemerkung:

(i). Beobachtungen zu Abhängigkeitsgebiet, Bestimmtheitsgebiet, Einflussgebiet wie für $n = 1$.

Jetzt zur Existenz einer Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ des Anfangswertproblems

$$\partial_t^2 u = \Delta u \qquad u(0,\cdot) = f \qquad \partial_t u(0,\cdot) = g$$

für f, g geeignet. Methode: Fourier-Transformation.
Annahme $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ ist Lösung mit $f, g \in C_C^2(\mathbb{R}^n)$. Dann $u(t,\cdot) \in C_C^2(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Fourier-Transformierte von u bzgl. Raumvariable x:

$$\hat{u}(t,\xi) := \widehat{u(t,\cdot)}(\xi)$$

Dann

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta u}(t,\xi) &= \sum_{j=1}^n \widehat{\partial_j^2 u}(t,\xi) = \sum_{j=1}^n (\imath \xi_j)^2 \cdot \hat{u}(t,\xi) = -|\xi|^2 \cdot \hat{u}(t,\xi) \\
\partial_t^2 \hat{u}(t,\xi) &= \widehat{\partial_t^2 u}(t,\xi)
\end{aligned}$$

Somit

$$\partial_t^2 \hat{u}(t,\xi) = \widehat{\partial_t^2 u}(t,\xi) = \widehat{\Delta u}(t,\xi) = -|\xi|^2 \cdot \hat{u}(t,\xi)$$

Für $\xi \in \mathbb{R}^n$: gewöhnliche Differentialgleichung für $\hat{u}(\cdot,\xi)$, Anfangswerte $\hat{u}(0,\xi) = \hat{f}(\xi)$, $\partial_t \hat{u}(0,\xi) = \hat{g}(\xi)$. Es folgt

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \cos(|\xi| \cdot t) + \frac{\hat{g}(\xi)}{|\xi|} \cdot \sin(|\xi| \cdot t) =: v(t,\xi)$$

Falls $v(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$u(t,x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \int v(t,\xi) \cdot e^{\imath x \cdot \xi} \, d\xi$$

... ist Lösung, falls unter dem Integral differenziert werden darf. Dafür muss man f, g einschränken.

9.2 Satz

Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq \frac{n+1}{2}$, $f \in C^{k+2}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n)$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\partial_t^2 u = \Delta u \qquad u(0,\cdot) = f \qquad \partial_t u(0,\cdot) = g$$

genau eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

Bemerkungen:

(i). Für $n = 1$ ist $k = 1$. Aber Satz auch wahr für $k = 0$ (Satz 1.3). Im Allgemeinen ist Satz 9.2 falsch für $k = 0$. Aber: $\frac{n+1}{2}$ ist nicht optimal (vielleicht später, nächster Paragraph).

(ii). Setzt man $f \in C^{k+2+\ell}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^{k+1+\ell}(\mathbb{R}^n)$, dann $u \in C^{2+\ell}(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere: Falls $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, dann $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(iii). Satz 9.2 geht allgemeiner mit Sobolev-Räumen.

Beweis: (von Satz 9.2) Eindeutigkeit mit Satz 9.1. Existenz:

(i). Annahme: f, g besitzen kompakten Träger. Dann $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sei

$$v(t,\xi) := \hat{f}(\xi) \cdot \cos(t \cdot |\xi|) + \frac{\hat{g}(\xi)}{|\xi|} \cdot \sin(t \cdot |\xi|)$$

für $(t,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Sei $t_0 > 0$. Zeige anschließend:

$$\begin{aligned}\forall |t| \le t_0, \xi \in \mathbb{R}^n : (1 + |\xi|)^2 \cdot |v(t,\xi)| &\le (1 + |\xi|)^2 \cdot |\hat{f}(\xi)| + (1 + t_0)\cdot)(1 + |\xi|) \cdot |\hat{g}(\xi)| \\ &=: h(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

In

$$u(t,x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \int v(t,\xi) \cdot e^{\imath x\cdot\xi}\, d\xi$$

darf dann zweimal unter dem Integral differenziert werden (t-Differentiation genauer!).

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u(t,x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \int v(t,\xi) \cdot (-|\xi|^2) \cdot e^{\imath x\cdot\xi}\, d\xi \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \int v(t,\xi) \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (\imath \xi_j)^2 \cdot e^{\imath x\cdot\xi}}_{\Delta_x e^{\imath x\cdot\xi}}\, d\xi \\ &= \Delta u(t,x)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}u(0,x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \int \underbrace{v(0,\xi)}_{\hat{f}(\xi)} e^{\imath x\cdot\xi}\, d\xi = f(x) \\ \partial_t u(0,x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \int \hat{g}(\xi) \cdot e^{\imath x\cdot\xi}\, d\xi = g(x)\end{aligned}$$

Abschätzung: Es genügt zu zeigen:

$$\frac{1 + |\xi|}{|\xi|} \cdot |\sin(t \cdot |\xi|)| \le 1 + t_0$$

Für $|t \cdot |\xi|| \le 1$:

$$\frac{1 + |\xi|}{t \cdot |\xi|} \cdot |\sin(t \cdot |\xi|)| \cdot t \le (1 + |\xi|) \cdot |t| \le 1 + t_0$$

Für $|t \cdot |\xi|| > 1$:

$$\frac{1 + |\xi|}{|\xi|} \cdot |\sin(t \cdot |\xi|)| \le \left(\frac{1}{|\xi|} + 1\right) \le t_0 + 1$$

Zu $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$: Für $|\alpha| \le k+2$ ist $\partial^\alpha f \in C_2 \subseteq L^2$, mit Satz 6.6 folgt $L^2 \ni \widehat{\partial^\alpha f} = (\imath\xi)^\alpha \cdot \hat{f}$. Daher

$$(1 + |\xi|)^{\frac{n+1}{2}+2} \cdot |\hat{f}(\xi)| \le \sum_{|\alpha| \le k+2} |\xi^\alpha| \cdot |\hat{f}(\xi)| \in L^2$$

damit

$$(1+|\xi|)^2 \cdot \hat{f}(\xi) = \underbrace{(1+|\xi|)^{-\frac{n+1}{2}}}_{\in L^2} \cdot \underbrace{(1+|\xi|)^{\frac{n+1}{2}+2} \cdot \hat{f}(\xi)}_{\in L^2} \in L^1$$

nach Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Analog:

$$(1+|\xi|) \cdot \hat{g}(\xi) = \underbrace{(1+|\xi|)^{-\frac{n+1}{2}}}_{\in L^2} \cdot \underbrace{(1+|\xi|)^{\frac{n+1}{2}+1} \cdot \hat{g}(\xi)}_{\in L^2} \in L^1$$

also $h \in L^1$.

Für t-Differentiation:

$$\begin{aligned} \partial_t v(t,\xi) &= -|\xi| \cdot \hat{f}(\xi) \cdot \sin(t \cdot |\xi|) + \frac{\hat{g}(\xi)}{|\xi|} \cdot \cos(t \cdot |\xi|) \cdot |\xi| \\ \Rightarrow |\partial_t v(t,\xi)| &\le (1+|\xi|) \cdot |\hat{f}(\xi)| + |\hat{g}(\xi)| \le h(\xi) \in L^1 \end{aligned}$$

(ii). Allgemeiner Fall: Konstruiere für $R > 0$ Lösung auf

$$\Omega_R := \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; |x| + |t| \le R\}$$

Sei $\varphi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi = 1$ auf $B(0,R)$. Zu Anfangswerten $\varphi \cdot f$, $\varphi \cdot g$ existiert nach (i) eine Lösung $u_\varphi \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Nach Satz 9.1: u_φ auf Ω_R unabhängig von der Wahl von φ. Definiere $u(t,x) := u_\varphi(t,x)$ für $(t,x) \in \Omega_R$. (Für R hinreichend groß: u überall definiert.)

□

10 Wellengleichung im sphärischen Mittel

Für $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ sei

$$M\varphi(t,x) := \frac{1}{\sigma_{n-1}} \cdot \int_{S_{n-1}} \varphi(x + t\cdot\xi)\, dS(\xi)$$

für $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Dann $M\varphi \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$,

$$M\varphi(-t,\cdot) = M\varphi(t,\cdot) \qquad M\varphi(0) = \varphi$$

und $\{\varphi \in C^k \Rightarrow M\varphi \in C^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)\}$. Falls φ harmonisch, dann $M\varphi = \varphi$.

10.1 Satz (Wellengleichung in ungerader Raumdimension)

Seien $n = 2k+1$ mit $k \geq 1$, $f \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n) = C^{k+2}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n) = C^{k+1}(\mathbb{R}^n)$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\partial_t^2 u = \Delta u \qquad u(0,\cdot) = f \qquad \partial_t u(0,\cdot) = g \tag{WLG}$$

die Lösung

$$u(t,x) = \frac{1}{1\cdot 3 \cdots (n-2)} \cdot \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{n-3} 2t^{n-2} Mf(t,x) + \left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} Mg(t,x)\right)$$

Bemerkungen:

(i). $k = \frac{n-1}{2}$, Mf-Term:

$$\frac{1}{t}\frac{d}{dt}(t^m \cdot \varphi) = m \cdot t^{m-2}\cdot\varphi + t^{m-1}\cdot\frac{d}{dt}\varphi$$

d.h. $\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{n-3}{2}}(t^{n-2}Mf)$ ist Summe von Termen, niedrigste t-Potenz $(n-2)-2\cdot\frac{n-3}{2} = 1$, höchste Ableitung von Mf ist $\frac{n-3}{2} = k-1$. Mf-Term nochmal abgeleitet, dann höchste Ableitung $\frac{n-1}{2} = k$. Damit Term $\in C^2$. Term ohne t-Potenz (alle Ableitungen auf t):

$$(n-2)\cdot(n-4)\cdots 1 \cdot Mf$$

und Mg-Term ist ungerade in t (s. (iii)), daher $u(0,x) = Mf(0,x) = f(x)$.

(ii). Mg-Term: Analog wie in (i) folgt: Höchste Ableitungsordnung ist $\frac{n-3}{2} = k-1$, somit Term in C^2.

$$\partial_t u(0,x) = 0 + Mg(0,x) = g(x)$$

(Mf-Term ist gerade in t, s. (iii)). Damit: $u \in C^2$ und Anfangswerte werden angenommen.

(iii). Mg-Term ist ungerade in t: Mg ist gerade (siehe oben), nach Multiplikation mit t^{n-2} ungerade, bleibt bei Anwendung von $\frac{1}{t}\frac{d}{dt}$ ungerade. Mf-Term ist $\frac{d}{dt}$ (ungerade), also gerade.

10.2 Lemma

Sei $h \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Dann

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{d}{dr}\right) Mh(r,x) = \Delta_x Mh(r,x)$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dr}Mh(r,x) &= \frac{1}{\sigma_{n-1}} \cdot \int_{|\xi|=1} \sum_{j=1}^{n} \partial_j h(x + r\cdot\xi)\cdot\xi_j \, dS(\xi) \\
&\overset{\text{GIS}}{=} \frac{r}{\sigma_{n-1}} \cdot \int_{|\xi|<1} \Delta_x h(x + r\cdot\xi)\, d\xi \\
&= \frac{r}{\sigma_{n-1}\cdot r^n} \Delta_x \int_{|y-x|<r} h(y)\, dy \\
&= \frac{r^{1-n}}{\sigma_{n-1}} \Delta_x \int_{\varrho=0}^{r} \int_{|y-x|=\varrho} h(y)\, dS(y)\, d\varrho \\
&= r^{1-n}\Delta_x \int_{\varrho=0}^{r} Mh(\varrho,x)\cdot\varrho^{n-1}\, d\varrho
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{d}{dr}Mh(r,x)\right) = \Delta_x(Mh(r,x)\cdot r^{n-1})
$$

□

Bemerkung:

(i). Satz 10.1 für $n=3$: $f \in C^3(\mathbb{R}^3), g \in C^2(\mathbb{R}^3)$,

$$
u(t,x) = \frac{d}{dt}(t\cdot Mf(t,x)) + t\cdot Mg(t,x)
$$

(Kirchhoff'sche Formel) Beweis für diesen Fall: Erfüllung der Anfangswerte siehe oben. Zweiter Term erfüllt Wellengleichung:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}(t\cdot Mg(t,x)) &= \frac{d}{dt}\left(Mg(t,x) + t\cdot\frac{d}{dt}Mg(t,x)\right) \\
&= 2\frac{d}{dt}Mg(t,x) + t\cdot\frac{d^2}{dt^2}Mg(t,x) \\
&= t\cdot\left(\frac{d^2}{dt^2}Mg(t,x) + \frac{2}{t}\frac{d}{dt}Mg(t,x)\right) \overset{10.2}{=} t\cdot\Delta_x Mg(t,x)
\end{aligned}
$$

Erster Term: Wie zweiter Term, nach t differenziert.

10.3 Lemma

Sei $k\in\mathbb{N}$, $\varphi \in C^{k+1}(\mathbb{R})$. Dann

$$
\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}(r^{2k-1}\cdot\varphi(r)) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k}(r^{2k}\cdot\varphi'(r))
$$

Beweis: per Induktion

(i). $k=1$:

$$
\frac{d^2}{dr^2}(r\cdot\varphi(r)) = 2\varphi'(r) + r\cdot\varphi''(r)
$$

$$
\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)(r^2\cdot\varphi'(r)) = \frac{1}{r}(2r\cdot\varphi'(r) + r^2\cdot\varphi''(r))
$$

(ii). $k\to k+1$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\underbrace{\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)(r^{2k+1}\cdot\varphi(r))}_{(2k+1)\cdot r^{2k-1}\cdot\varphi(r)+r^{2k-1}\cdot r\cdot\varphi'(r)} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k}\left(r^{2k}\cdot\varphi'(r)\cdot(2k+1) + r^{2k}\cdot\frac{d}{dr}(r\cdot\varphi'(r))\right) \\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^{2(k+1)}\cdot\varphi'(r))\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k+1}(r^{2(k+1)}\cdot\varphi'(r))
\end{aligned}
$$

$\square$

Beweis: (von Satz 10.1)

- Annahme der Anfangswerte: Siehe Bemerkungen nach Satz 10.1
- Wellengleichung für $\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{k-1}(t^{2k-1}Mg(t,x))$:

$$\begin{aligned}\Delta_x\left(\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{k-1}(t^{2k-1}Mg(t,x))\right) &= \left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{t}\cdot t^{n-1}\Delta_x Mg(t,x)\right)\\ &\overset{10.2}{=} \left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left(t^{n-1}\cdot\frac{d}{dt}Mg(t,x)\right)\right)\\ &= \left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{k}\left(t^{n-1}\frac{d}{dt}Mg(t,x)\right)\\ &\overset{10.3}{=} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{k-1}(t^{2k-1}\cdot Mg(t,x))\end{aligned}$$

Der erste Term ist t-Ableitung des entsprechenden Terms mit f statt g. Gleichheit oben gilt auf $(\mathbb{R}\backslash\{0\})\times\mathbb{R}^n$. Stetigkeit der Ableitung gibt Gleichheit auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

$\square$

Bemerkung:

(i). Für n gerade: „Absteigemethode von Hadamard“

Seien $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}$ mit n gerade. Definiere $\tilde{f}(x_1,\dots,x_{n+1}) := f(x_1,\dots,x_n)$, $\tilde{g}(x_1,\dots,x_{n+1}) := g(x_1,\dots,x_n)$. Die mit Satz 10.1 gewonnene Lösung $\tilde{u}$ des Anfangswertproblems hängt nicht von x_{n+1} ab. Mit $u(t,x_1,\dots,x_n) := \tilde{u}(t,x_1,\dots,x_n,0)$ ist daher Lösung des Anfangswertproblems gegeben. Zur Berechnung der Mittelwerte:

$$\begin{aligned}M\tilde{f}(r,x,0) &= \frac{1}{\sigma_n}\cdot\int_{\xi_1^2+\ldots+x_{n+1}^2=1} f(x_1+r\cdot\xi_1,\dots,x_n+r\cdot\xi_n)\,dS(\xi)\\ &= \frac{2}{\sigma_n}\cdot\int_{\xi_1^2+\ldots+\xi_{n+1}^2=1,\xi_{n+1}>0} f(x_1+r\cdot\xi_1,\dots,x_n+r\cdot\xi_n)\,dS(\xi)\\ &\overset{*}{=} \frac{2}{\sigma_n}\cdot\int_{y\in B(0,1)} f(x+r\cdot y)\cdot\sqrt{\frac{1}{1-|y|^2}}\,dy\\ &= \frac{2}{\sigma_n}\cdot\left|-\frac{1}{r}\right|^n\cdot\int_{B(0,|r|)} f(x-z)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{|z|^2}{r^2}}}\,dz\\ &= |r|^{1-n}\cdot\int_{B(0,|r|)}\frac{2}{\sigma_n}\cdot\frac{\operatorname{sgn} r}{\sqrt{r^2-|z|^2}}\cdot f(x-z)\,dz\end{aligned}$$

Zu $(*)$ - Erinnerung, Analysis 3: Sei $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $M := \{(x,\varphi(x));x\in\Omega\}$. Dann ist M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und für $h\in C_C(M)$ gilt

$$\int_m h(\xi)\,dS(\xi) = \int_\Omega h(x,\varphi(x))\cdot\sqrt{1+|\operatorname{grad}\varphi(x)|^2}\,dx$$

Hier $\varphi(y)=\sqrt{1-|y|^2}$ und daher:

$$\operatorname{grad}\varphi(y) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1-|y|^2}}\cdot(-2y) = -\frac{y}{\sqrt{1-|y|^2}}$$

$$\Rightarrow 1+|\operatorname{grad}\varphi(y)|^2 = 1+\frac{|y|^2}{1-|y|^2} = \frac{1}{1-|y|^2}$$

Es gilt:

$$\sigma_{n-1} = n \cdot w_n = 2 \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sigma_n} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \overset{n=2k}{=} \frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi^{k+\frac{1}{2}}} = \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{(2\pi)^k}$$

10.4 Satz (Wellengleichung in gerader Raumdimension)

Sei $n = 2k$ mit $k \geq 1$. Sei $f \in C^{\frac{n+4}{2}}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^{\frac{n+2}{2}}(\mathbb{R}^n)$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$u_{tt} = \Delta u \qquad u(0,\cdot) = f \qquad u_t(0,\cdot) = g$$

die Lösung

$$\begin{aligned} u(t,x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^{n-1} \cdot \int_{B(0,1)} \frac{f(x+t\cdot y)}{\sqrt{1-|y|^2}}\,dy \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^{n-1} \cdot \int_{B(0,1)} \frac{g(x+t\cdot y)}{\sqrt{1-|y|^2}}\,dy \right) \right) \\ &\overset{t\neq 0}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{n-2}{2}} (k_t * f)(x) + \left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{n-2}{2}} (k_t * g)(x) \end{aligned}$$

mit

$$k_t(x) := \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{\operatorname{sgn} t}{\sqrt{t^2-|x|^2}} & |x| < |t| \\ 0 & |x| \geq |t| \end{cases}$$

Bemerkungen:

(i). In Satz 10.1 bzw. Satz 10.4 sind f und g einmal weniger stetig differenzierbar vorausgesetzt als in Satz 9.2.

(ii). Sei $t \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Für $n = 2k+1$, $k \geq 1$ hängt $u(t,x)$ ab von $\partial^\alpha f|_{\partial B(x,|t|)}$ für $|\alpha| \leq \frac{n-1}{2} = k$ und $\partial^\alpha g|_{\partial B(x,|t|)}$ für $|\alpha| \leq \frac{n-3}{2} = k-1$. Bei $n = 2k$ hängt $u(t,x)$ ab von $\partial^\alpha f|_{B(x,|t|)}$ für $|\alpha| \leq \frac{n-1}{2} = k$ und $\partial^\alpha g|_{B(x,|t|)}$ für $|\alpha| \leq \frac{n-2}{2} = k-1$.

11

Über lineare Operatoren

- Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Definiere Operator H in $L^2(\Omega)$ durch $Hf := -\Delta f$ für $f \in D(H) := \{f \in W^1_{2,0}(\Omega); \Delta f \in L^2(\Omega)\}$. Ziel dieses §: H ist ein positiver selbstadjungierter Operator.
- Erinnerung: Wie definiert man „anständig", was eine Abbildung ist? Seien M, N Mengen, dann ist $A : M \to N$ Abbildung $:\Leftrightarrow A \subseteq M \times N$, $\forall x \in M \exists! y \in N : (x, y) \in A$. D.h. eine Abbildung ist das, was sonst Graph genannt wird.
- Für H wie oben: $M = N = L^2(\Omega)$,

  $$H = \{(f, g) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega); f \in W^1_{2,0}(\Omega), -\Delta f = g\}$$

  (H nicht auf ganz $L^2(\Omega)$ definiert!)

Definitionen:

(i). Seien E, F Vektorräume. A heißt (linearer) Operator von E nach F, falls $A \subseteq E \times F$ (linearer) Teilraum und

$$\{(x, y_1), (x, y_2) \in A \Rightarrow y_1 = y_2 =: Ax\} (\Leftrightarrow \{(0, y) \in A \Rightarrow y = 0\})$$

Falls $E = F$: Operator in E.

(ii). Für Teilraum $A \subseteq E \times F$ sei

$$\begin{aligned} D(A) &:= \{x \in E; \exists y \in F : (x, y) \in A\} && \text{Definitionsbereich von A} \\ R(A) &:= \{y \in F; \exists x \in E : (x, y) \in A\} && \text{Wertebereich von A} \\ N(A) &:= \{x \in E; (x, 0) \in A\} && \text{Nullraum von A} \end{aligned}$$

A heißt injektiv $:\Leftrightarrow N(A) = \{0\}$.

Bemerkungen:

(i). $D(A), N(A)$ sind Teilräume von E, $R(A)$ ist Teilraum von F.

(ii). Ist A ein Operator, dann $D(A) \to R(A)$ lineare Abbildung.

Definition:

(i). Sei $A \subseteq E \times F$ ein Teilraum. Dann $A^{-1} := \{(y, x) \in F \times E; (x, y) \in A\}$.

Bemerkung:

(i). $D(A^{-1}) = R(A)$, $R(A^{-1}) = D(A)$. A injektiv $\Leftrightarrow \{x \in E; (x, 0) \in A\} = \{0\} \Leftrightarrow A^{-1}$ Operator von F nach E, zu A inverser Operator. Analog: A^{-1} injektiv $\Leftrightarrow A$ Operator.

Definition:

(i). Seien A, B Operatoren von E nach F. B heißt Fortsetzung von A (A Einschränkung von B) $:\Leftrightarrow B \supseteq A (\Leftrightarrow \forall x \in D(A) : x \in D(B), Bx = Ax)$.

Seien E, F Banachräume.

Definitionen: Sei A ein Operator von E nach F.

(i). A abgeschlossen $:\Leftrightarrow$ A ist abgeschlossener Teilraum von $E \times F$ ($\|(x,y)\| := \|x\|_E + \|y\|_F$)

(ii). A abschließbar $:\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ Operator $\Leftrightarrow$ Es existiert abgeschlossener Operator von E nach F mit $B \supseteq A$. („$\Rightarrow$“: Klar. „$\Leftarrow$“: Sei $(0,y) \in \bar{A} (\subseteq B)$, daher $y = 0$, da B Operator.) $\bar{A}$ heißt Abschließung von A.

(Achtung: A abgeschlossen $\not\Rightarrow$ A beschränkt; folgt falls $D(A) = E$ nach Graphensatz.)

Beispiel:

(i). $E = L^2(\mathbb{R})$, $F = \mathbb{K}$, $Af := f(0)$ für $f \in D(A) := C_C(\mathbb{R})$. Dann A nicht abschließbar (Übung 11).

Adjungierte und selbstadjungierte Operatoren:

- Im Folgenden seien $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ Hilberträume. Dann $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ mit Skalarprodukt

$$((x,y)|(x_1,y_1)) := (x|x_1)_{\mathcal{G}} + (y|y_1)_{\mathcal{H}}$$

Hilbertraum.

- Idee des adjungierten Operators: Sei A Operator von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{H}$. Dann soll A^* der maximale (bzgl. Inklusion) Operator von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{G}$ sein mit

$$(Ax|y)_{\mathcal{H}} = (x|A^*y)_{\mathcal{G}} \qquad (x \in D(A), y \in D(A^*))$$

Definition:

(i). Sei $A \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{H}$ ein Teilraum. Dann

$$\begin{aligned} A^* &:= \{(y,x) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G}; \forall (x_1,y_1) \in A : \underbrace{(x_1|x)_{\mathcal{G}} = (y_1|y)_{\mathcal{H}}}_{\Leftrightarrow ((x_1,y_1)|(-x|y))=0}\} \\ &= \{(y,x) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G}; (-x,y) \in A^\perp\} = \{(y_1,-x_1) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G}; (x_1,y_1) \in A\}^\perp \end{aligned}$$

11.1 Satz

Sei $A \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{H}$ ein Teilraum. Dann

(i). $D(A)$ dicht in $\mathcal{G} \Leftrightarrow A^*$ Operator von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{G}$, der zu A adjungierte Operator.

(ii). $D(A^*)$ dicht in $\mathcal{H} \Leftrightarrow A$ abschließbarer Operator.

Bemerkung:

(i). Sei A Operator von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{H}$, $D(A)$ dicht in $\mathcal{G}$. Für $x \in \mathcal{G}, y \in \mathcal{H}$ gilt dann

$$y \in D(A^*), A^*y = x \Leftrightarrow (y,x) \in A^* \Leftrightarrow \forall x_1 \in D(A) : (Ax_1|y) = (x_1|x) (= (x_1|A^*y))$$

11.2 Lemma

Sei $A \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{H}$ ein Teilraum. Dann

(i). $A \subseteq A^{**} = \bar{A}$, $(\bar{A})^* = A^*$, $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

(ii). $N(A^*) = R(A)^\perp$, insbesondere A^* injektiv $\Leftrightarrow R(A)$ dicht in $\mathcal{H}$

(iii). $N(\bar{A}) = R(A^*)^\perp$

Beweis: (i). Erinnerung: $\mathcal{H}$ Hilbertraum, $M \subseteq \mathcal{H}$ Teilraum, dann $M^{\perp\perp} = \bar{M}$ (Projektionssatz).

(1) $A \subseteq \bar{A}$ klar, zeige $(A^*)^* = \bar{A}$.

$$(x,y) \in (A^*)^* \Leftrightarrow \forall \underbrace{(y_1,x_1) \in A^*}_{\Leftrightarrow(-x_1|y_1)\in A^\perp} : \underbrace{(y_1|y) = (x_1|x)}_{\Leftrightarrow((-x_1,y_1)|(x,y))=0} \Leftrightarrow (x,y) \in (A^\perp)^\perp = \bar{A}$$

(2) $(y,x) \in \bar{A}^* \Leftrightarrow (-x,y) \in \bar{A}^\perp = A^\perp \Leftrightarrow (y,x) \in A^*$

(3) $(x,y) \in (A^{-1})^* \Leftrightarrow \forall (y_1,x_1) \in A^{-1} : (x_1|x) = (y_1|y) \Leftrightarrow \forall (x_1,y_1) \in A : (x_1|x) = (y_1|y) \Leftrightarrow$ $(y,x) \in A^* \Leftrightarrow (x,y) \in (A^*)^{-1}$

(ii). $y \in N(A^*) \Leftrightarrow (y,0) \in A^* \Leftrightarrow \forall (x_1,y_1) \in A : (y_1|y) = (x_1|0) = 0 \Leftrightarrow \forall y_1 \in R(A) : (y_1|y) = 0 \Leftrightarrow$ $y \in R(A)^\perp$

(iii). $N(\bar{A}) \overset{(i)}{=} N(A^{**}) \overset{(ii)}{=} R(A^*)^\perp$

□

Beweis: (von Satz 11.1)

(i). Lemma 11.2 für A^{-1}: $D(A) = R(A^{-1})$ dicht in $\mathcal{G} \Leftrightarrow (A^{-1})^*$ injektiv $\Leftrightarrow A^*$ Operator

(ii). $D(A^*)$ dicht in $\mathcal{H} \overset{(i)}{\Leftrightarrow} (A^*)^* = \bar{A}$ Operator $\Leftrightarrow A$ abschließbarer Operator

□

Beispiel:

(i). Definiere Operator A in $L^2(\mathbb{R})$: $D(A) \coloneqq C_C^\infty(\mathbb{R}), Af = f'$. (Also $A = \{(f,f'); f \in C_C^\infty(\mathbb{R})\}$). Dann

$$\begin{aligned} g \in D(A^*), A^*g = f \Leftrightarrow & \ \forall \varphi \in C_C^\infty(\mathbb{R}) : (A\varphi|g) = (\varphi|f) \\ \Leftrightarrow & \ \forall \varphi \in C_C^\infty(\mathbb{R}) : \int g \cdot \varphi' = \int f \cdot \varphi \\ \Leftrightarrow & \ g' = -f \text{ distributionell} \end{aligned}$$

Somit $D(A^*) = W_2^1(\mathbb{R})$, $A^*g = -g'$. Behauptung: $\bar{A} = -A^*$. Folgt, da $C_C^\infty(\mathbb{R})$ dicht in $W_2^1(\mathbb{R})$.

11.3 Satz

Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{G},\mathcal{H})$.

(i). Dann $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{G})$, $\|A^*\| = \|A\|$, $A^{**} = A$

(ii). Sei B ein Operator von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{H}$, $D(B)$ dicht in $\mathcal{G}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann $(\lambda A + B)^* = \bar{\lambda}A^* + B^*$ (wobei $D(\lambda A + B) = D(B)$, $(\lambda A + B)(x) = \lambda Ax + Bx$ für $x \in D(B)$).

Beweis: (i). Sei $y \in \mathcal{H}$. Definiere $\eta : \mathcal{G} \to \mathcal{H}, \eta(x) \coloneqq (Ax|y)$. Dann ist η stetig, linear,

$$|\eta(x)| \le \|Ax\| \cdot \|y\| \le \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

also $\|\eta\| \le \|A\| \cdot \|y\|$. Nach Satz von Fréchet-Riesz gibt es $z \in G$, $\|z\| = \|\eta\|$ mit

$$\forall x \in \mathcal{G} : (Ax|y) = \eta(x) = (x|z)$$

Somit $y \in D(A^*) = z = A^*y$. Gezeigt: $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{G})$,

$$\|A^*y\| = \|z\| = \|\eta\| \le \|A\| \cdot \|y\|$$

also $\|A^*\| \le \|A\|$. Aus Lemma 11.2: $A^{**} = \bar{A} = A$, damit auch $\|A^{**}\| \le \|A^*\|$. Somit $\|A^*\| = \|A\|$.

(ii). Sei $y \in D(B^*)$. Für alle $x_1 \in D(B)$ folgt:

$$\begin{aligned}((\lambda A + B)x_1, y) &= (\lambda A x_1, y) + (Bx_1, y) = (x_1|\bar{\lambda} A^* y) + (x_1|B^* y)\\ &= (x_1|(\bar{\lambda} A^* + B^*)y)\end{aligned}$$

Daher $y \in D((\lambda A + B)^*)$, $(\lambda A + B)^* y = (\bar{\lambda} A^* + B^*)y$. Somit $(\lambda A + B)^* \supseteq \bar{\lambda} A^* + B^*$. Es folgt

$$B^* = (-\lambda A + (\lambda A + B))^* \supseteq (-\lambda A)^* + (\lambda A + B)^* = -\bar{\lambda} A^* + (\lambda A + B)^*$$

also $\bar{\lambda} A^* + B^* \supseteq (\lambda A + B)^*$.($(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$ folgt mit erstem Teil für $B = 0$.) Somit „=“.

□

Beispiel:

(i). Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{G} = \mathbb{C}^m$, $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, dann $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \mathbb{C}^{n \times m}$. Für $A = (a_{ij})_{i,j}$ gilt

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \dots & \overline{a_{n1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1m}} & \dots & \overline{a_{nm}} \end{pmatrix} = \overline{A^T}$$

Definition: Sei A Operator in $\mathcal{H}$. Dann

(i). A symmetrisch $:\Leftrightarrow D(A)$ dicht in $\mathcal{H}$, $A \subseteq A^*$

(ii). A selbstadjungiert $:\Leftrightarrow D(A)$ dicht in $\mathcal{H}$, $A = A^*$

(iii). A wesentlich selbstadjungiert $:\Leftrightarrow D(A)$ dicht in $\mathcal{H}$, $\bar{A}$ selbstadjungiert.

Bemerkung:

(i). Bei selbstadjungiert „$D(A)$ dicht“ redundant, da $A^* = A$ Operator, damit $D(A)$ dicht nach Satz 11.1.

Beispiel:

(i). A in $L^2(\mathbb{R}), Af = f'$, $D(A) = C_C^\infty(\mathbb{R})$. Gezeigt: $\bar{A} = -A^* = -\overline{A}^*$. Für $B := \imath \bar{A}$ gilt

$$B^* = \bar{\imath} \overline{A}^* = -\imath(-\bar{A}) = \imath \bar{A} = B$$

also B selbstadjungiert. Auch $-B = \overline{\imath A}$, also $\imath A$ wesentlich selbstadjungiert.

11.4 Proposition

Sei A ein Operator in $\mathcal{H}$.

(i). A symmetrisch $\Leftrightarrow D(A)$ dicht und $(Ax|y) = (x|Ay)$ für $x, y \in D(A)$

(ii). A symmetrisch $\Rightarrow A$ abschließbar, $\bar{A}$ symmetrisch

(iii). Satz von Hellinger-Toeplitz: A symmetrisch, $D(A) = \mathcal{H} \Rightarrow A$ selbstadjungiert, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

(iv). Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum. Dann A symmetrisch $\Leftrightarrow D(A)$ dicht, $(Ax|x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in D(A)$.

Beweis: (i). „$\Rightarrow$“

$D(A)$ dicht ist klar nach Definition. Für $x, y \in D(A) \subseteq D(A^*)$ gilt

$$(Ax|y) = (x|A^* y) = (x|Ay)$$

„$\Leftarrow$“

Sei $y \in D(A)$. Für alle $x \in D(A)$ gilt $(Ax|y) = (x|Ay)$, also $y \in D(A^*)$, $A^* y = Ay$.

(ii). Aus $A \subseteq A^*$ folgt mit Satz 11.1(ii), dass A abschließbar und $\overline{A} \subseteq A^* = \overline{A}^*$. $D(\overline{A})$ dicht ist klar, da $D(\overline{A}) \supseteq D(A)$.

(iii). Aus $A \subseteq A^*$ und $D(A) = \mathcal{H}$ folgt $A^* = A$. Insbesondere A^* abgeschlossen, mit Graphensatz folgt $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

(iv). „$\Rightarrow$“: Für $x = y$ in (i) folgt Behauptung.
„$\Leftarrow$“: Seien $x, y \in D(A)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, dann

$$\mathbb{R} \ni (A(\alpha x + y), (\alpha x + y)) = \underbrace{(A(\alpha x)|\alpha x)}_{\in\mathbb{R}} + (\alpha Ax|y) + (Ay|\alpha x) + \underbrace{(Ay|y)}_{\in\mathbb{R}}$$

Damit $(\alpha Ax|y) + (Ay|\alpha x)$ reell, d.h.

$$\mathrm{Im}((\alpha Ax|y)) = -\mathrm{Im}((Ay|\alpha x)) = \mathrm{Im}(\alpha(x|Ay))$$

Mit $\alpha = 1$, $\alpha = \imath$: $(Ax|y) = (x|Ay)$. Dann Behauptung mit (i).

□

11.5 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, A Operator in $\mathcal{H}$ mit

$$\forall x, y \in D(A) : (Ax|y) = (x|Ay) \qquad (*)$$

($:\Leftrightarrow$ A hermitesch), $R(A) = \mathcal{H}$. Dann A selbstadjungiert, A injektiv, $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert.

Beweis:

- $D(A)$ dicht: Sei $z \in D(A)^\perp$. Es gibt $y \in D(A)$ mit $Ay = z$. Für $x \in D(A)$ folgt

$$0 = (x|z) = (x|Ay) \overset{*}{=} (Ax|y)$$

somit $y \in R(A)^\perp = \mathcal{H}^\perp = \{0\}$, daher $z = Ay = 0$. Also $D(A)$ dicht, damit A symmetrisch nach 11.4(i).

- Wegen $N(A^*) = R(A)^\perp = \{0\}$ ist A^* injektiv. Aus $A \subseteq A^*$ folgt $A = A^*$, *denn: Angenommen es existiert* $(x, y) \in A^* \setminus A$. *Wegen* A *surjektiv existiert* $x_1 \in \mathcal{H} : (x_1|y) \in A$, *d.h.* $y = Ax_1 = A^* x_1$. *Aus Injektivität von* A^* *folgt* $x_1 = x$, *d.h.* $(x|y) \in A$.

- Auch A^{-1} symmetrisch: Für $x, y \in \mathcal{H}$ gilt

$$(A^{-1}x|y) = (A^{-1}x|AA^{-1}y) = (AA^{-1}x|A^{-1}y) = (x|A^{-1}y)$$

und $D(A^{-1}) = \mathcal{H}$. Damit A^{-1} selbstadjungiert, $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ nach Satz 11.4(iii).

□

Beispiele: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

(i). Sei A Operator in $L^2(\Omega)$, $D(A) = C_C^\infty(\Omega)$, $Af := -\Delta f$ für $f \in D(A)$. Dann A symmetrisch: $C_C^\infty(\Omega)$ ist dicht in $L^2(\Omega)$ und für $f, g \in C_C^\infty(\Omega)$ gilt

$$(Af|g) = -\int_\Omega \Delta f \cdot \overline{g} \overset{\mathrm{pI}}{=} -\int f \cdot \overline{\Delta g} = (f|Ag)$$

Ist $\Omega \neq \emptyset$ beschränkt, dann A nicht wesentlich selbstadjungiert. Bestimme A^*:

$$\begin{aligned}(g, f) \in A^* &\Leftrightarrow \forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega) : (A\varphi|g) = (\varphi|f) \\ &\Leftrightarrow \forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega) : -\int_\Omega \Delta\varphi \cdot g = \int_\Omega \varphi \cdot f \\ &\Leftrightarrow \Delta g = -f \in L^2(\Omega) \text{ distributionell}\end{aligned}$$

Somit $D(A^*) = \{g \in L^2(\Omega); \Delta g \in L^2(\Omega)\}$, $A^* g = -\Delta g$.

Es gilt $(A^{**} =)\overline{A} \subset A^*$: Nämlich: $f := 1_\Omega \in D(A^*), A^*f = 0$. Für $f \in D(\bar{A})$ folgt

$$\int \bar{A}f \cdot 1 = (f|A^*1) = 0$$

Aber: Es gibt $g \in D(A^*)$, sodass $\int_\Omega A^*g \neq 0$, zum Beispiel $g(x) := x_1^2$. Dann $A^*g = -2$, also

$$\int A^*g = -2 \cdot \lambda^n(\Omega) \neq 0$$

Somit $\bar{A} \subset A^* = \overline{A}^*$, also A nicht wesentlich selbstadjungiert.

(ii). Definiere H in $L^2(\Omega)$:

$$D(H) := \{f \in W^1_{2,0}(\Omega); \Delta f \in L^2(\Omega)\}, Af := -\Delta f$$

Wir zeigen: H ist selbstadjungiert.

- Zunächst: H ist symmetrisch und $H \geq 0$ (d.h. $(Hf|f) \geq 0$ für alle $f \in D(H)$): Seien $f, g \in D(H) \subseteq W^1_{2,0}(\Omega)$, dann

$$(Hf|g) = (-\Delta f|g) \overset{11.6}{=} \sum_{j=1}^n (\partial_j f|\partial_j g) \overset{11.6}{=} (f| -\Delta g) = (f|Hg)$$

  Damit H symmetrisch nach Proposition 11.4 und $H \geq 0$:

$$(Hf|f) = \sum_{j=1}^n (\partial_j f|\partial_j f) = \sum_{j=1}^n \|\partial_j f\|_2^2 \geq 0$$

- Falls Ω beschränkt, dann $R(H) = L^2(\Omega)$ nach Satz 5.6. Somit H selbstadjungiert nach 11.5.
- Allgemeiner Fall: Zeige, dass $R(I + H) = L^2(\Omega)$. Dann ist $I + H$ symmetrisch und damit selbstadjungiert nach 11.5.

$$I + H = (I + H)^* = I^* + H^* = I + H^*$$

  gibt $H = H^*$.
  Sei $f \in L^2(\Omega)$. Suche $u \in D(H)$ mit $u + Hu = f$, d.h. $u \in W^1_{2,0}(\Omega)$ mit

$$\forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega) : \int \varphi \cdot \bar{u} - \int \varphi \cdot \overline{\Delta u} = \int \varphi \cdot \bar{f} \qquad (*)$$

  (Für „$\Leftarrow$“: zu zeigen $u \in D(H)$. Gilt da $-\Delta u = f - u \in L^2(\Omega)$.) Mit

$$-\int \Delta\varphi \cdot \bar{u} = \int \sum_{j=1}^n \partial_j \varphi \cdot \overline{\partial_j u}$$

  wird $(*)$ zu

$$\forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega) : (\varphi|u)_{W_2^1} = \int \varphi \cdot \bar{f}$$

  Sei $\eta : W^1_{2,0}(\Omega) \to \mathbb{K}$ definiert durch

$$\eta(g) := \int g \cdot \bar{f} \qquad (g \in W^1_{2,0}(\Omega))$$

  Dann $\eta \in W^1_{2,0}(\Omega)'$. Satz von Riesz-Fréchet: Es existiert $u \in W^1_{2,0}(\Omega)$ mit

$$(g|u)_{W_2^1} = \eta(g) = \int g \cdot \bar{f}$$

  für alle $g \in W^1_{2,0}(\Omega)$. Insbesondere $(*)$ erfüllt für alle $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$.

Gezeigt: H ist ein positiver selbstadjungierter Operator, der Dirchlet-Laplace-Operator.

11.6 Lemma

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in W_2^1(\Omega)$, $\Delta f \in L^2(\Omega)$, $g \in W_{2,0}^1(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_\Omega \Delta f(x) \cdot g(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)\, dx$$

Beweis: Für $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$:

$$\int \Delta f \cdot \varphi = \int f \cdot \Delta\varphi = -\int \nabla f \cdot \nabla\varphi$$

Die Abbildungen

$$W_2^1(\Omega) \to \mathbb{K}, \varphi \mapsto \int \Delta f \cdot \varphi \qquad\qquad W_2^1(\Omega) \to \mathbb{K}, \varphi \mapsto \int \sum_{j=1}^n \partial_j f \cdot \partial_j \varphi$$

sind stetig und linear. Daher folgt Gleichheit der äußeren Terme auch für alle $\varphi \in \overline{C_C^\infty(\Omega)}^{W_2^1} = W_{2,0}^1(\Omega)$. □

Bemerkungen:

(i). Ist Ω beschränkt, dann H^{-1} beschränkt (11.5). Sogar: H^{-1} kompakt und es gibt Orthonormalbasis von $L^2(\Omega)$, bestehend aus Eigenfunktionen von H (Folgerung 13.6). Eigentliches Ziel!

(ii). Für $n = 1$, $\Omega = (0,\pi)$ bilden

$$\varphi_k(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sin(k \cdot x) \in W_{2,0}^1(0,\pi) \qquad (k \in \mathbb{N})$$

eine Orthonormalbasis von $L^2((0,\pi))$ (Übung), $-\Delta\varphi_k = -\varphi_k'' = k^2 \cdot \varphi_k$.

12

Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren

Erinnerung: E, F Banachräume, $A \in \mathcal{L}(E,F)$ kompakt $:\Leftrightarrow A(B_E(0,1))$ relativ kompakt in F.

12.1 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert. Dann gilt

$$\|A\| := \sup\{|(Ax|x)|; \|x\| \leq 1\}(=: c)$$

Beweis:

- „$\geq$“: Folgt aus

$$|(Ax|x)| \leq \|Ax\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|^2 \leq \|A\|$$

- „$\leq$“: Bekannt:

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup\{|(Ax|y)|; \|x\|, \|y\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\operatorname{Re}(Ax|y)|; \|x\|, \|y\| \leq 1\}\end{aligned}$$

Seien $\|x\|, \|y\| \leq 1$. Dann

$$\begin{aligned}|\operatorname{Re}(Ax|y)| &\overset{A=A^*}{=} \frac{1}{4}|(A(x+y)|x+y) - (A(x-y)|x-y)| \\ &\leq \frac{1}{4} \cdot c \cdot \left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) \overset{\text{PI}}{=} \frac{1}{2}c \cdot \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \leq c\end{aligned}$$

□

12.2 Satz

Seien $\mathcal{H} \neq \{0\}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt und selbstadjungiert. Dann ist $\|A\|$ oder $-\|A\|$ Eigenwert von A.

Beweis: Wenn $A = 0$: klar. Sei also $A \neq 0$. Nach Satz 12.1 gibt es $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\|x_k\| = 1$ $(k \in \mathbb{N})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| = \|A\|$, sodass $(Ax_k|x_k) \to \lambda$. Damit ist

$$\begin{aligned}0 \leq \|Ax_k - \lambda \cdot x_k\|^2 &= \underbrace{\|Ax_k\|^2}_{\leq\lambda^2} - 2\lambda \cdot (Ax_k|x_k) + \underbrace{\|x_k\|^2}_{1} \cdot \lambda^2 \\ &\leq 2 \cdot (\lambda^2 - \lambda \cdot (Ax_k|x_k)) = 2\lambda \cdot (\lambda - (Ax_k|x_k)) \to 0 \qquad (k \to \infty)\end{aligned}$$

d.h. $Ax_k - \lambda \cdot x_k \to 0$ für $k \to \infty$. Da A kompakt: Es existiert eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$, sodass $(Ax_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergent, $Ax_{n_j} \to y$. Dann

$$\begin{aligned}x_{n_j} &= \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x_{n_j} - Ax_{n_j}) + \frac{1}{\lambda}Ax_{n_j} \to \frac{1}{\lambda} \cdot y =: x \\ &\Rightarrow Ax = \lambda \cdot x \qquad \|x\| = 1\end{aligned}$$

□

12.3 Satz (Satz von Hilbert, Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakt und selbstadjungiert. Dann gibt es $A \subseteq \mathbb{N}$ und ein Orthonormalsystem $(e_j)_{j\in A}$ von Eigenelementen von T mit Eigenwerten $(\lambda_j)_{j\in A}$ in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\lambda_j \to 0$ ($j \to \infty$ in A), sodass

$$\{e_j; j \in A\}^\perp = N(T) \qquad\qquad Tf = \sum_{j\in A} \lambda_j \cdot (f|e_j) \cdot e_j$$

für alle $f \in \mathcal{H}$. Insbesondere. T injektiv $\Leftrightarrow$ $(e_j)_{j\in A}$ Orthonormalsystem.

Beweis:
- $T = 0$, dann alle Aussagen klar ($A = \emptyset$). Sei $T \neq 0$. Nach 12.2 gibt es $\lambda_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $|\lambda_1| = \|T\|$, $e_1 \in \mathcal{H}$, $\|e_1\| = 1$ mit $Te_1 = \lambda_1 \cdot e_1$. Sei $\mathcal{H}_1 := \{e_1\}^\perp$. Dann $T(\mathcal{H}_1) \subseteq \mathcal{H}_1$:

$$f \in \mathcal{H}_1 \Rightarrow (Tf|e_1) = (f|Te_1) = \lambda_1 \cdot (f|e_1) = 0$$

Sei $T_1 := T|_{\mathcal{H}_1}$, als Operator in $\mathcal{H}_1$. Dann $\|T_1\| \le \|T\|$. T_1 ist kompakt und selbstadjungiert. Nach 12.2 existiert $e_2 \in \mathcal{H}$, $\|e_2\| = 1$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda_2| = \|T_1\|$, $Te_2 = \lambda_2 \cdot e_2$. Und so weiter.

Seien $\lambda_1, \dots$ Eigenwerte (mit $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \dots$) mit Eigenelementen $e_1, \dots$.

(i). $\exists n \in \mathbb{N} : T_n = 0$: Dann $\{e_1, \dots, e_n\}^\perp \subseteq N(T)$, $A = \{1, \dots, n\}$.

(ii). $\forall n \in \mathbb{N} : T_n \neq 0$: Dann $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \dots > 0$ und $a := \lim_{n\to\infty} |\lambda_n|$ existiert. Für $j \neq k$ gilt:

$$\|Te_j - Te_k\|^2 = \|\lambda_j \cdot e_j - \lambda_k \cdot e_k\|^2 = \lambda_j^2 + \lambda_k^2 \ge 2a^2$$

Da T kompakt ist, besitzt $(Te_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Daraus folgt $a = 0$. Also $|\lambda_j| \to 0$ für $j \to \infty$.
Ist $f \in \{e_j; j \in \mathbb{N}\}^\perp$, dann $f \in \mathcal{H}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\|Tf\| \le \underbrace{\|T_n\|}_{|\lambda_n|} \cdot \|f\| = |\lambda_n| \cdot \|f\| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

also $f \in N(T)$, d.h. $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}^\perp \subseteq N(T)$.

Umgekehrt: Ist $f \in N(T)$, also $Tf = 0$, und $j \in A$, dann

$$\lambda_j \cdot (e_j|f) = (Te_j|f) = (e_j|Tf) = 0$$

also $e_j \perp f$. Somit $N(T) \subseteq \{e_j; j \in A\}^\perp$.

- Für $f \in \mathcal{H}$ folgt

$$f_0 := f - \sum_{j\in A} (f|e_j) \cdot e_j \perp e_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

somit $f_0 \in \{e_j; j \in A\}^\perp = N(T)$. Damit

$$Tf = T\left(\sum_{j\in A} (f|e_j) \cdot e_j\right) = \sum_{j\in A} (f|e_j) \underbrace{Te_j}_{\lambda_j \cdot e_j}$$

□

Bemerkung:

(i). Sei $\mathcal{H}$ separabel, $N(T) = \overline{\mathrm{lin}\{e_j; j \in B\}}$ mit $B \subseteq -\mathbb{N}_0$, $(e_j)_{j\in B}$ orthonormal. Sei

$$U : \mathcal{H} \to \ell_2(B \cup A), f \mapsto ((f|e_j))_{j\in B\cup A}$$

Dann ist U unitär, UTU^{-1} in $\ell_2(B \cup A)$. Für $j \in A$ gilt:

$$UTU^{-1} 1_{\{j\}} = UTe_j = U(\lambda_j e_j) = \lambda_j \cdot 1_{\{j\}}$$

für $j \in B$:

$$UTU^{-1} 1_{\{j\}} = U(Te_j) = 0$$

Mit $\lambda_j := 0$ für $J \in B$ ist T unitär äquivalent zur Multiplikation mit $\lambda = (\lambda_j)_{j\in B\cup A}$ in $\ell_2(B \cup A)$.

12.4 Folgerung

Sei $\mathcal{H}$ ein ∞-dimensionaler Hilbertraum. Sei T selbstadjungiert in $\mathcal{H}$, T^{-1} kompakt, $T \geq 0$, T injektiv, $R(T) = \mathcal{H}$. Dann besitzt $\mathcal{H}$ eine Orthonormalbasis $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus Eigenelementen von T zu Eigenwerten $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\lambda_j \to \infty$ für $j \to \infty$. Weiterhin gilt:

$$Tf = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \cdot (f|\varphi_j) \cdot \varphi_j$$

für alle $f \in D(T)$ und

$$D(T) = \left\{ f \in \mathcal{H}; \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \cdot |(f|\varphi_j)|^2 < \infty \right\}$$

Beweis:

- Anwendung von Satz 12.3 auf T^{-1} gibt Orthonormalsystem $(\varphi_j)_{j\in A}$ mit Eigenwerten $(\mu_j)_{j\in A}$. Aus der Injektivität von T^{-1} folgt, dass $(\varphi_j)_{j\in A}$ Orthonormalbasis, $A = \mathbb{N}$. Mit $\lambda_j := \mu_j^{-1}$ folgt die Behauptung:
  (i). $T^{-1}\varphi_j = \mu_j \cdot \varphi_j \Rightarrow \varphi_j = T(\mu_j \cdot \varphi_j) \Rightarrow \frac{1}{\mu_j}\varphi_j = T\varphi_j$
  (ii). $\mu_j \to 0$ und aus $T \geq 0$ folgt $\lambda_j = \lambda_j(e_j|e_j) = (Te_j|e_j) \geq 0$, also $\lambda_j \to \infty$.
- Für $f \in \{f \in \mathcal{H}; \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j^2 \cdot |(f|\varphi_j)|^2 < \infty\}$ gilt:

$$D(T) \ni \sum_{j=1}^{n} (f|\varphi_j) \cdot \varphi_j \to f \qquad (n \to \infty)$$
$$T\left(\sum_{j=1}^{n} (f|\varphi_j) \cdot \varphi_j\right) = \sum_{j=1}^{n} (f|\varphi_j) \cdot \underbrace{T\varphi_j}_{\lambda_j \cdot \varphi_j} \to \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \cdot (f|\varphi_j) \cdot \varphi_j$$

  Da T abgeschlossen (da selbstadjungiert) folgt $f \in D(T)$, $Tf = \sum \lambda_j \cdot (f|\varphi_j) \cdot \varphi_j$.
- Für $f \in D(T)$ sei $g := Tf$. Dann

$$f = T^{-1}g = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \cdot (g|\varphi_j) \cdot \varphi_j$$

  daher ist $(f|\varphi_j) = \mu_j \cdot (g|\varphi_j)$,

$$\lambda_j \cdot (f|\varphi_j) = \frac{1}{\mu_j} \cdot (f|\varphi_j) = (g|\varphi_j)$$
$$\Rightarrow \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j^2 \cdot |(f|\varphi_j)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(g|\varphi_j)|^2 \overset{g\in\mathcal{H}}{<} \infty$$

□

13 Rellich'scher Auswahlsatz, Kompaktheit in $L^p(\Omega)$

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ziel: Ist Ω beschränkt, $1 \leq p < \infty$, dann ist die Abbildung $W^1_{p,0}(\Omega) \to L^p(\Omega), f \mapsto f$ kompakt. („Auswahlsatz von Rellich", 1930, auch: Satz von Rellich-Kondrachov)

13.1 Satz

Sei $1 \leq p < \infty$, $K \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ mit

(i). K beschränkt (d.h. $\sup_{f \in K} \|f\|_p < \infty$)

(ii). $\sup\{\|f(\cdot - y) - f\|_p; f \in K\} \to 0$ $(y \to 0)$

(iii). $\exists R > 0 : \forall f \in K : \operatorname{spt} f \subseteq B(0,R)$

Dann ist K relativ kompakt in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung:

(i). Wesentlicher Teil des Kompaktheitskriteriums von Kolmogorov; entspricht Arzelà-Ascoli. Wird Äquivalenz, wenn (iii) ersetzt wird durch

$$\sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} |f|^p; f \in K\right\} \to 0 \qquad (R \to \infty)$$

13.2 Lemma

Sei $\varrho \in C_C(\mathbb{R}^n)$, $\varrho \geq 0$, $\int \varrho = 1$. Seien $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\|\varrho * f - f\|_p \leq \int \|f(\cdot - y) - f\|_p \cdot \varrho(y)\, dy$$

Im Folgenden: $f_y := f(\cdot - y)$.

Beweis: Benutze: Für $g \in L^p(\mu)$ gilt

$$\|g\|_p = \sup\left\{\left|\int g \cdot h\, d\mu\right|; h \in L^{p'}(\mu), \|h\|_{p'} \leq 1\right\} \tag{*}$$

mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Sei $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, $\|h\|_{p'} \leq 1$. Dann:

$$\begin{aligned}
\left|\int (\varrho * f - f)(x) \cdot h(x)\, dx\right| &= \left|\int_x \int_y \varrho(y) \cdot (f(x-y) - f(x))\, dy h(x)\, dx\right| \\
&\overset{\text{Fub}}{=} \left|\int_y \int_x (f(x-y) - f(x)) \cdot h(x)\, dx \varrho(y)\, dy\right| \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \int \|f_y - f\|_p \cdot \underbrace{\|h\|_{p'}}_{\leq 1} \cdot \varrho(y)\, dy
\end{aligned}$$

Aus $(*)$ folgt die Behauptung. □

13.3 Lemma

Sei $\varrho \in C_C(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{spt}\varrho \subseteq B[0,1]$. Sei $R > 0$, $1 \le p < \infty$. Dann ist die Abbildung $L^p(B(0,R)) \ni f \mapsto \varrho * f \in C(B[0,R+1])$ kompakt.

Beweis: Es genügt $p = 1$ zu behandeln, da $L^p(B(0,R)) \subseteq L^1(B(0,R))$ mit stetiger Einbettung. Wegen Arzelà-Ascoli genügt es zu zeigen:

$$\{\varrho * f; f \in L^1(B(0,R)), \|f\|_1 \le 1\}$$

ist beschränkt und gleichgradig stetig.

(i). beschränkt: Sei $|x| \le R+1$, $f \in L^1(B(0,R))$, $\|f\|_1 \le 1$, dann

$$|(\varrho * f)(x)| \le \int |\varrho(x-y)| \cdot |f(y)|\, dy \le \|\varrho\|_\infty \cdot \underbrace{\|f\|_1}_{\le 1}$$

(ii). gleichgradig stetig: Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\delta > 0$, sodass $|\varrho(x) - \varrho(x')| \le \varepsilon$ für $|x - x'| \le \delta$. Für $x, x' \in B[0,R+1]$, $|x - x'| \le \delta$, $f \in L^1(B(0,R))$ mit $\|f\|_1 \le 1$ folgt:

$$|(\varrho * f)(x) - (\varrho * f)(x')| \le \int \underbrace{|\varrho(x-y) - \varrho(x'-y)|}_{\le \varepsilon} \cdot |f(y)|\, dy = \varepsilon \cdot \|f\|_1 \le \varepsilon$$

□

Bemerkung:

(i). Sei M ein metrischer Raum. Dann äquivalent:

(1) M kompakt

(2) M präkompakt und vollständig

M präkompakt $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists F \subseteq M$ endlich mit $M = \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon)$

13.4 Lemma

Sei M eine Menge, X Banachraum, $f_n : M \to X$ für $n \in \mathbb{N}$, $f : M \to X$, für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n(M)$ präkompakt und $f_n \to f$ gleichmäßig. Dann ist $f(M)$ präkompakt.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{y \in M} \|f_n(y) - f(y)\| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Es gibt $F \subseteq M$ endlich, sodass

$$f_n(M) \subseteq \bigcup_{y \in F} B\left(f_n(y), \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

Dann

$$f(M) \subseteq \bigcup_{y \in F} B(f(y), \varepsilon)$$

denn: Sei $x \in M$, dann existiert $y \in F$ mit $\|f_n(x) - f_n(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$, damit

$$\|f(x) - f(y)\| \le \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(y)\| + \|f_n(y) - f(y)\| < \varepsilon$$

□

Beweis: (von Satz 13.1)

- Sei $(\varrho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C_C(\mathbb{R}^n)$ eine δ-Folge. Wir zeigen, dass K präkompakt ist mit Lemma 13.4. (Dann fertig, da dann $\bar{K}$ präkompakt und vollständig, also kompakt.)
- Dazu: Sei $T_k : K \to L^p(\mathbb{R}^n), f \mapsto \varrho_k * f$. Aus Lemma 13.3: $\{\varrho_k * f; f \in K\}$ ist relativ kompakt (präkompakt) in $L^p(B[0,R])$ (interpretiert als $\subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$) für alle $k \in \mathbb{N}$. Noch zu zeigen: $T_k \to \mathrm{id}$ gleichmäßig. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen (ii) aus Satz 13.1 gibt es $\delta > 0$, sodass

$$\sup\{\|f_y - f\|_p; f \in K\} \le \varepsilon$$

für $|y| \le \delta$. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} \le \delta$. Mit Lemma 13.2 folgt

$$\|\varrho_k * f - f\|_p \le \int_{B(0,\frac{1}{k})} \|f_y - f\|_p \cdot \varrho_k(y)\, dy \le \varepsilon$$

für alle $f \in K$, d.h. $T_k \to \mathrm{id}$ gleichmäßig $(k \to \infty)$ auf K. Nach Lemma 13.4 ist $K = \mathrm{id}_K(K)$ präkompakt.

□

13.5 Satz (Rellich-Kondrachov)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $1 \le p < \infty$. Dann ist $W^1_{p,0}(\Omega) \to L^p(\Omega), f \mapsto f$ kompakt.

Beweis: Für $K := \{f \in W^1_{p,0}(\Omega); \|f\|_{p,1} \le 1\}$ zeigen wir (i)-(iii) von Satz 13.1:

(i). $\|f\|_p \le \|f\|_{p,1}$, also klar.

(ii). Da $C_C^\infty(\Omega)$ dicht in $W^1_{p,0}(\Omega)$ genügt es, (ii) für $K_0 := \{f \in C_C^\infty(\Omega); \|f\|_{p,1} \le 1\}$ zu zeigen. Für $f \in K_0$, $y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|f_y - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^1 \underbrace{\frac{d}{dt} f(x-ty)}_{-y\cdot \mathrm{grad}\, f(x-ty)}\, dt \right|^p dx$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |y|_{p'}^p \cdot \underbrace{|\,\mathrm{grad}\, f(x-ty)|_p^p}_{\sum_{j=1}^n |\partial_j f(x-ty)|^p}\, dt\, dx$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{\le} |y|_{p'}^p \cdot \|f\|_{p,1}^p \le |y|_{p'}^p \overset{\text{glm}}{\to} 0 \quad (y \to 0)$$

(iii). Klar, da Ω beschränkt.

□

Bemerkungen:

(i). Für $\Omega = \mathbb{R}^n$ ist $W^1_p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ nicht kompakt. (Betrachte Folge von Translaten für eine konkret gewählte beschränkte Funktion, besitzt keine konvergente Teilfolge.)

(ii). Ist Ω schön genug (betrachte $\partial\Omega$), dann $W^1_p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ kompakt. (Zum Beispiel nicht kompakt für $n = 1$, $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty (a_j, b_j)$ mit $a_1 < b_1 < a_2 < \ldots$, $\sup b_j < \infty$)

13.6 Folgerung

Sei Ω offen und beschränkt, H der Dirichlet-Laplace-Operator,

$$D(H) := \{f \in W^1_{2,0}(\Omega); \Delta f \in L^2(\Omega)\} \qquad\qquad Hf := -\Delta f$$

Dann besitzt $L^2(\Omega)$ eine Orthonormalbasis $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus Eigenelementen von H mit Eigenwerten $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $(0,\infty)$ und es gilt $\lambda_j \to \infty$ $(j \to \infty)$.

Beweis: Letztes Beispiel von §11: $R(H) = L^2(\Omega)$, H^{-1} stetig (als Operator in L^2). Aber $H^{-1} : L^2(\Omega) \to W^1_{2,0}(\Omega) \supseteq D(H)$ ist auch stetig: Sei $f \in D(H)$ und $g := Hf$. Dann

$$\begin{aligned} \|f\|_0^2 &= \sum_{j=1}^n \int \partial_j f \cdot \overline{\partial_j f} \overset{11.6}{=} (-\Delta f|f) = (Hf|f) \\ &= (g|f) \le \|g\|_2 \cdot \|f\|_2 \overset{5.3}{\le} c \cdot \|g\|_2 \cdot \|f\|_0 \\ \Rightarrow \|f\|_0 &\le c \cdot \|g\|_2 \end{aligned}$$

Insgesamt:

$$H^{-1} : L^2(\Omega) \overset{\text{stetig}}{\to} W^1_{2,0}(\Omega) \qquad \mathrm{id} : W^1_{2,0}(\Omega) \overset{\text{kompakt}}{\to} L^2(\Omega)$$

damit $H^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kompakt (Funktionalanalysis, §4). Folgerung 12.4 gibt Behauptung. □

Bemerkung:

(i). Stetigkeit von $H^{-1} : L^2(\Omega) \to W^1_{2,0}(\Omega)$ folgt auch aus dem Graphensatz. $H^{-1}(L^2(\Omega)) \subseteq W^1_{2,0}(\Omega)$ ist klar. H^{-1} abgeschlossen: Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_k \to f$ in L^2, $H^{-1}f_k \to g$ in $W^1_{2,0}(\Omega)$. Bekannt: $H^{-1}f_k \to H^{-1}f$ in L^2, da $H^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ stetig. Aus $H^{-1}f_k \to g$ in $W^1_{2,0}(\Omega)$ folgt aber auch $H^{-1}f_k \to g$ in $L^2(\Omega)$, also $g = H^{-1}f$. Also $H^{-1} : L^2(\Omega) \to W^1_{2,0}(\Omega)$ abgeschlossen.

Allgemeiner: X, Y, Z Banachräume, $A : X \to Y$, $j : Y \to Z$ injektiv, $j \circ A$ stetig, dann A abgeschlossen.

Anwendungen (skizzenhaft): Bezeichnungen wie in 13.6

(i). Gegeben $f \in L^2(\Omega)$. Gesucht: Lösung des Anfangswertproblems

$$\partial_t u = \Delta u \qquad u(0,\cdot) = f \qquad u(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0$$

Modellierung: Suche $u : [0,\infty) \to L^2(\Omega)$ stetig, stetig differenzierbar auf $(0,\infty)$ mit $u'(t) = \Delta u(t) (\in L^2(\Omega))$, $u(t) \in W^1_{2,0}(\Omega)$ für $t > 0$, $u(0) = f$ (WLG). (Somit $u(t) \in D(H)$ für $t > 0$.)

Annahme: u löst (WLG). Für $j \in \mathbb{N}$ sei $\alpha_j(t) := (u(t)|\varphi_j)$ für $t > 0$. Dann

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (u'(t)|\varphi_j) = (\Delta u(t)|\varphi_j) = (u(t)|\Delta\varphi_j) \\ &= -\lambda_j \cdot (u(t)|\varphi_j) = -\lambda_j \cdot \alpha_j(t) \\ \alpha_j(0) &= (u(0)|\varphi_j) = (f|\varphi_j) \end{aligned}$$

Somit $\alpha_j(t) = (f|\varphi_j) \cdot e^{-\lambda_j \cdot t}$, also

$$u(t) = \sum_{j=1}^\infty (u(t)|\varphi_j) \cdot \varphi_j = \sum_{j=1}^\infty e^{-\lambda_j \cdot t} \cdot (f|\varphi_j) \cdot \varphi_j \qquad (t \ge 0) \tag{*}$$

Umgekehrt: Für $f \in L^2(\Omega)$ erfüllt $(*)$ die (WLG): (klassisch!)

(1) $u(0) = f$

(2) u stetig auf $[0,\infty)$, da Koeffizienten stetig, beschränkt durch

$$|e^{-\lambda_j \cdot t} \cdot (f|\varphi_j)| \le |(f|\varphi_j)|$$

(3) Wegen

$$\sum_{j=1}^\infty \lambda_j^2 \cdot |(u(t)|\varphi_j)|^2 = \sum_{j=1}^\infty \underbrace{\lambda_j^2 \cdot e^{-2\lambda_j \cdot t}}_{(\lambda_j \cdot e^{-\lambda_j \cdot t})^2 \to 0\ (j\to\infty)} \cdot |(f|\varphi_j)|^2 < \infty$$

gilt $u(t) \in D(H)$ nach Folgerung 12.4.

(4) Zur Differentialgleichung:

$$u'(t) = \sum_{j=1}^{\infty} (-\lambda_j) \cdot e^{-\lambda_j \cdot t} \cdot (f|\varphi_j) \cdot \varphi_j = -\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \cdot (u(t)|\varphi_j) \cdot \varphi_j \overset{12.4}{=} -Hu(t)$$

(ii). Gegeben $f, g \in W^1_{2,0}(\Omega)$ mit $\Delta f \in L^2(\Omega)$. Gesucht: Lösung des Anfangs-Randwertproblems für die Wellengleichung

$$\partial_t^2 u = \Delta u \qquad u(0) = f \qquad \partial_t u(0) = g \qquad u(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0$$

Modellierung: Suche $u : \mathbb{R} \to L^2(\Omega)$ zweimal stetig differenzierbar mit

$$u''(t) = \Delta u(t) (\in L^2(\Omega)) \quad \forall t \in \mathbb{R} : u(t) \in W^1_{2,0}(\Omega) \quad u(0) = f \quad u'(0) = g \tag{WG}$$

Ist u Lösung von (WG), $\alpha_j(t) := (u(t)|\varphi_j)$, dann folgt wie oben:

$$\alpha_j''(t) = -\lambda_j \cdot \alpha_j(t) \qquad\qquad \alpha_j(0) = (f|\varphi_j) \alpha_j'(0) = (g|\varphi_j)$$

Lösung ist

$$\alpha_j(t) = a \cdot \cos(\sqrt{\lambda_j} \cdot t) + b \cdot \sin(\sqrt{\lambda_j} \cdot t) \quad \alpha_j(0) = a \quad \alpha_j'(0) = b \cdot \sqrt{\lambda_j}$$

also

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(t) \cdot \varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \left((f|\varphi_j) \cdot \cos(\sqrt{\lambda_j} \cdot t) + \frac{(g|\varphi_j)}{\sqrt{\lambda_j}} \cdot \sin(\sqrt{\lambda_j} \cdot t) \right) \cdot \varphi_j$$

Ziel: $u : \mathbb{R} \to L^2(\Omega)$ in C^2, $u(t) \in D(H)$, $u''(t) = -Hu(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Davon hier nur $u(t) \in D(H)$. Benötigt (Folgerung 12.4):

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \cdot |(f|\varphi_j) \cdot \cos(\sqrt{\lambda_j} \cdot t)|^2 < \infty \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \cdot \left| \frac{(g|\varphi_j)}{\sqrt{\lambda_j}} \cdot \sin(\sqrt{\lambda_j} \cdot t) \right|^2 < \infty$$

Erste Forderung klar mit Folgerung 12.4, da $f \in D(H)$. Zweite Forderung: Für $g \in W^1_{2,0}(\Omega)$ gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \cdot |(g|\varphi_j)|^2 < \infty$$

Nämlich: Mit Skalarprodukt $(f|g)_0 := (\nabla f | \nabla g)_2$ auf $W^1_{2,0}(\Omega)$ ist $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \cdot \varphi_j \right)_{j \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem von $W^1_{2,0}(\Omega)$:

$$(\varphi_j|\varphi_k)_0 = (\nabla\varphi_j|\nabla\varphi_k)_2 \overset{11.6}{=} -(\Delta\varphi_j|\varphi_k)_2 = \lambda_j \cdot (\varphi_j|\varphi_k)_2 = \lambda_j \cdot \delta_{jk}$$

Und

$$(g|\varphi_j)_2 = -\frac{1}{\lambda_j} \cdot (g|\Delta\varphi_j)_2 \overset{11.6}{=} -\frac{1}{\lambda_j} \cdot \underbrace{(\nabla g|\nabla\varphi_j)}_{(g|\varphi_j)_0}$$

Besselsche Ungleichung:

$$\infty > \sum_{j=1}^{\infty} \left| \left(g \middle| \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \cdot \varphi_j \right)_0 \right|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \cdot |(g|\varphi_j)|^2$$

14

Ergänzung: Analytizität harmonischer Funktionen

14.1 Satz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{K}$ harmonisch. Dann ist u analytisch, d.h. für jedes $x_0 \in \Omega$ gibt es $r > 0$ und $a_\alpha \in \mathbb{K}$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, sodass

$$u(x_0 + x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha x^\alpha$$

für alle x mit $|x - x_0| < r$. (Dann auch $a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha u(x_0)$.)

14.2 Lemma

Sei $a_\alpha \in \mathbb{K}$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $R \subseteq [0,\infty)^n$, $C := \sup\{|a_\alpha \cdot r^\alpha|; r \in R, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\} < \infty$. Sei $0 < \varrho < 1$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha x^\alpha$ gleichmäßig absolut auf $\bigcup_{r \in R} \prod_{j=1}^n B_{\mathbb{K}}[0, \varrho \cdot r_j] \subseteq \mathbb{K}^n$.

Bemerkungen:

(i). Ist $r \in (0,\infty)$, $R = \{r\}$, so konvergiert die Reihe auf $\prod_{j=1}^n B(0, r_j)$. (Polyzylinder)

(ii). Für alle $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\nu_{n,k} := |\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n; |\alpha| = k\}| = \binom{k+n-1}{n-1}$$

(Per Induktion, $\nu_{n,k} = \sum_{j=0}^k \nu_{n-1,j}$) Insbesondere gibt es c_n, sodass $\nu_{n,k} \le c_n \cdot k^n$.

Beweis: (von Lemma 14.2)

- Für $r \in R$, $x \in \prod_{j=1}^n B[0, \varrho \cdot r_j]$ gilt $|a_\alpha \cdot x^\alpha| \le |a_\alpha| \cdot r^\alpha \cdot \varrho^{|\alpha|}$. Aus

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |a_n| \cdot r^\alpha \cdot \varrho^{|\alpha|} \le c \cdot \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \varrho^{|\alpha|} = c \cdot \sum_{k=0}^\infty \nu_{n,k} \cdot \varrho^k$$
$$\le c \cdot c_n \cdot \sum_{k=0}^\infty k^n \cdot \varrho^k < \infty$$

folgt die Behauptung.

□

14.3 Satz

Sei $v : S_{n-1} \to \mathbb{K}$ stetig, $\gamma \in \mathbb{R}$ und für $x \in B(0,1)$ sei

$$u(x) := \int_{|y|=1} v(y) \cdot |x - y|^\gamma \, dS(y)$$

Dann ist $u \in C^\infty(B(0,1))$ und

$$u(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha u(0) \cdot x^\alpha$$

konvergiert für $|x| < \sqrt{2} - 1$.

Beweis: Sehr lang, vielleicht später. □

Beweis: (von Satz 14.1)

- Ohne Einschränkung $x_0 = 0$, $B[0,1] \subseteq \Omega$. Aus Poisson-Formel

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{\sigma_{n-1}} \cdot \int_{|y|=1} \frac{u(y)}{|x-y|^n}\, dS(y)$$

und Satz 14.3 folgt die Behauptung.

□

Bemerkungen:

(i). In Satz 14.3 hat man im Allgemeinen keine Konvergenz für $|x| < 1$. Sei zum Beispiel $u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ für $z \in \mathbb{C}$ Potenzreihe mit Konvergenzradius 1. Dann

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x + \imath \cdot y)^n$$

harmonisch auf $B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$.

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (\imath\, y)^k$$

Ist letzte Reihe konvergent, dann $\{a_n \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}; 0 \le k \le n < \infty\}$ beschränkt. Nach 14.2 ist $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \cdot e^n$ absolut konvergent, also

$$\infty > \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_n| \cdot \binom{n}{k} \cdot |x|^k \cdot |y|^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot (|x| + |y|)^n \cdot r^n$$
$$\Rightarrow |x| + |y| < 1$$

(ii). Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot y^n$ ist konvergent für $|x \cdot y| < 1$.