Technische Universität Dresden

Skript:

Lineare Algebra und analytische Geometrie I & II

Verfasser Franziska Kühn

Daten Prof. Dr. Gert Bär
Wintersemester 2008/09 + Sommersemester 2009
Grundstudium

Inhaltsverzeichnis

1

Grundbegriffe

1.1 Elementare Aussagenlogik

1.1.1 Aussage

Definition: sprachlich sinnvoller Satz, der einen Tatbestand ausdrückt, der entweder wahr (1) oder falsch (0) ist.

Beispiele:

- p := „2 mal 2 ist vier.“ (:= ... per Definition gleich)
- q := „10 ist durch 3 teilbar.“
- r:= „Alle Menschen sind sterblich.“
- unzulässig: Frage-/Wunsch-/Befehlssätze

Einer Aussage p wird eindeutig ein Wahrheitswert $|p|$ zugeordnet:

$$|p| = \begin{cases} \text{wahr} \\ \text{falsch} \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

für obige Beispiele: $|p| = 1 \quad |q| = 0 \quad |r| = 1$

1.1.2 Elementare Aussageverbindungen

	Name	Symbol
nicht p	Negation	$\bar{p}/\neg p$
p und q	Konjunktion	$p \wedge q$
p oder q	Disjunktion	$p \vee q$
wenn p wahr, dann q wahr	Implikation	$p \Rightarrow q$
p wahr g.d.w. q wahr	Äquivalenz	$p \Leftrightarrow q$

- Aussageverbindungen entstehen durch Verneinung/Verknüpfung von Aussagen mit Funktoren $(\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$

- Eine Aussageverbindung ist wieder eine Aussage, die wahr oder falsch ist (gemäß der Wahrheitstabelle).

p	q	$\bar{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

- Lesebeispiele:
  - Wenn $|p| = 1$, dann sei $|\bar{p}| = 0$
  - Wenn $|p| = 1$ und $|q| = 0$, dann sei $|p \wedge q| = 0$
  - Wenn $|p| = 0$ und $|q| = 1$, dann sei $|p \Rightarrow q| = 1$
- Bemerkung: Implikation ist nur dann falsch, wenn die Prämisse p wahr ist und die Konklusion q falsch ist.
- Beispiele:
  - p := „3 ist eine Primzahl.“ $|p| = 1$
  - q := „10 ist durch 3 teilbar.“ $|q| = 0$
  - r := „4 ist eine Primzahl.“ $|p| = 0$
  - $\bar{p}$:= „3 ist keine Primzahl.“ $|\bar{p}| = 0$
  - $|p \wedge q| = 0$
  - $|p \vee q| = 1$

1.1.3 n-stellige Aussageverbindungen

- n-stellige Aussageverbindung $a(p_1, p_2, ..., p_n)$ durch Verknüpfung von n Aussagen $p_1, p_2, ..., p_n$ mittels Funktoren definiert $(n \geq 2)$
- Sie ist wieder eine Aussage, deren Wahrheitswert $|a(p_1, p_2, ..., p_n)|$ von den n Wahrheitswerten $p_1, p_2, ..., p_n$ abhängt und in einer Wahrheitswerttabelle angegeben werden kann.
- bei n-stelligen Aussageverbindungen gibt es 2^n Kombinationen der Wertbelegung

- Beispiele:

1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$ (3-stellige Aussageverbindung)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

2. $((p \vee q) \wedge \bar{p}) \Rightarrow q$

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \bar{p}$	$((p \vee q) \wedge \bar{p}) \Rightarrow q$
1	1	1	0	1
1	0	1	0	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	1

stets wahre Aussageverbindung (Tautologie) $\longrightarrow$ aussagenlogisches Gesetz

3. $p \wedge \bar{p}$

p	$p \wedge \bar{p}$
1	0
0	0

stets falsche Aussageverbindung (Kontradiktion)

1.1.4 Aussagenlogische Gesetze

1. $|p \vee \bar{p}| = 1$ Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten
2. $|p \wedge \bar{p}| = 0$ Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch
3. $\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$ Gesetz von der Negation der Negation
4. $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$ Gesetz von de Morgan I

5. $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$ Gesetz von de Morgan II

6. $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \bar{q}$

7. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ Kontraposition für indirekten Beweis

   Anwendung bei Beweisführung:

   - direkter Beweis: Annahme: p ist wahr; dann ist auch ... wahr und somit ist q wahr.
   - indirekter Beweis (nach 7.): Annahme: $\bar{q}$ ist wahr; dann ist auch ... wahr und somit $\bar{p}$ wahr $\longrightarrow$ nach 7. ist dann $p \Rightarrow q$ wahr

8. $(\bar{p} \Rightarrow \bar{q}) \wedge q \Rightarrow p$ Gesetz zum indirekten Beweis mit Widerspruch für eine Aussage p

   Wenn die Implikation $(\bar{p} \Rightarrow \bar{q})$ und die Aussage q gelten, so ist p wahr. Dabei wird q die Voraussetzung und p die Behauptung genannt. Die auftretende Kontradiktion q und $\bar{q}$ wird als Widerspruch bezeichnet.

   Beispiel

   - p:= „Herr X hat den Mord am Freitagabend in der Scheune nicht begangen."
   - q:= „Herr X hat unter Zeugen am Freitagabend in der Bierstube gesessen."

9. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ Gesetz der Transititivtät der Implikation

Bemerkung: In den Gesetzen sind Vorrangregeln verwendet: $\neg$ vor $\wedge$ vor $\vee$ vor $\Rightarrow$ vor $\Leftrightarrow$

1.1.5 Aussageformen

- sprachlich sinnvoller Satz p(x) über einen Tatbestand, der mit einer Variable x formuliert ist, heißt eine Aussageform, wenn p(x) für jede konkrete Variable x eine Aussage ist.
- Aussageformen können durch Funktoren zu Aussageformverbindungen verknüpft werden.

Beispiele:

- x sei eine natürliche Zahl: p(x):="x ist eine Primzahl."
- q(x) := „x ist eine gerade Zahl."
- $p(x) \wedge q(x)$: „x ist eine gerade Primzahl."

$$|p(x) \wedge q(x)| = \begin{cases} 0 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

- Generalisierung einer Aussageform mit dem Allquantor: $\forall x : p(x)$ oder $\bigvee x : p(x)$

  Wenn x den Variablenbereich (Menge) M durchlaufen kann: $\forall x \in M : p(x)$ oder $\bigvee x \in M : p(x)$

- Partikularisierung einer Aussageform mit dem Existenzquantor: $\exists x \in M : p(x)$ oder $\bigwedge x \in M : p(x)$

- Beispiel:
  - $\forall x \in \mathbb{N} : q(x) =$ „Alle natürlichen Zahlen sind gerade.“ $\longrightarrow$ Wahrheitswert 0, z.B. falsch für x=1
  - $\exists x \in \mathbb{N} : q(x) =$ „Es existiert min. 1 nat. Zahl, die gerade ist.“ $\longrightarrow$ Wahrheitswert 1, z.B. wahr für x=2

- Negation:
  - $\overline{\forall} x \in M : p(x) \Leftrightarrow$ „Nicht für alle x gilt p(x).“
  - $\overline{\exists} x \in M : p(x) \Leftrightarrow$ „Es gibt kein $x \in M$, sodass p(x) gilt.

1.1.6 Prädikatenlogik-Gesetze

1. $\forall x \in M : p(x) \Rightarrow \exists x \in M : p(x)$
2. $\forall x \in M : \neg p(x) \Leftrightarrow \overline{\exists} x \in M : p(x)$
3. $\exists x \in M : \neg p(x) \Leftrightarrow \overline{\forall} x \in M : p(x)$
4. $\forall x \in M : (p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : p(x) \wedge \forall x \in M : q(x)$
5. $\exists x \in M : (p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : p(x) \vee \exists x \in M : q(x)$
6. $\forall x \forall y : p(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x : p(x, y)$
7. $\exists x \exists y : p(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x : p(x, y)$
8. $\exists x \forall y : p(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x : p(x, y)$

   Beispiel: x $\in$ Menge der Frauen, y $\in$ Menge der Männer, p(x,y) := „x liebt y.“
   $\longrightarrow$ „Wenn es eine Frau gibt, die alle Männer liebt, dann gibt es für jeden Mann eine Frau, die ihn liebt.“ (Umkehrschluss nicht möglich.)

1.2 Mengenlehre

1.2.1 Menge

- Menge: Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten x unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen (nach G. Cantor (1845-1918))

- Objekte x heißen Elemente von M

Beispiel:

1. $M = \{3, 4, 6\}$ Menge der natürlichen Zahlen 3, 4 und 6 ($3 \in M, 7 \notin M$)

2. Zahlenbereiche

   - $\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen
   - $\mathbb{Z} = \{x|$ x ist eine ganze Zahl $\}$
   - $\mathbb{Q} = \{x|$ x ist eine rationale Zahl $\}$
   - $\mathbb{R} = \{x|$ x ist eine reelle Zahl $\}$
   - $\mathbb{C} = \{x|$ x ist eine komplexe Zahl $\}$

3. Menge der ganzen Zahlen, für die $x^2 = 4$ gilt:
   $A = \{x \in \mathbb{Z}|x^2 = 4\} = \{-2; 2\}$

1.2.2 Mengen: Definitionen

- A heißt Teilmenge von B, falls jedes Element von a auch Element von B ist ($A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$)

  $\forall A, B, C \subseteq M$ gilt: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

  Beweis:
  $A \subseteq B$, d.h.: $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$
  $B \subseteq C$, d.h.: $\forall x : x \in B \Rightarrow x \in C$
  $\longrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in C$ (also $A \subseteq C$)

- A heißt echte Teilmenge von B ($A \subset B$): $A \subseteq B \wedge \exists b \in B : b \notin A$

- Mengengleichheit: $A = B :\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

- leere Mengen: $B := \{x \in \mathbb{Z}|x^2 = -4\} = \emptyset$ falsch in $\mathbb{Z}$

  Die Menge, die kein Element enthält, heiße leer und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

- Potenzmenge: Die Menge $\wp(M) := \{A|A \subseteq M)$, die alle Teilmengen einer Menge M enthält, heißt Potenzmenge von M.

  Bsp.: $M = \{1, 2\} \longrightarrow \wp(M) = \{\emptyset; \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

1.2.3 Mengenalgebra

Verknüpfung von Mengen durch Operationen: Vereinigung, Durchschnitt, Differenz. Einige Beziehungen zu logischen Operationen bestehen.

- Vereinigungsmenge: $A \cup B := \{x|x \in A \vee x \in B\}$

- Durchschnittsmenge: $A \cap B := \{x|x \in A \wedge x \in B)$

- Differenzmenge: $A \backslash B := \{x|x \in A \wedge x \notin B)$

- A und B heißen disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$.

- $M\backslash A = \{x|x \in M \wedge x \notin A\} = \complement_M(A) = \bar{A}$ heißt das Komplement von A bzgl. M.
- Venn-Diagramme dienen der Veranschaulichung entsprechender (Teil)Mengen.

Bsp.:

- $A = \{1, 5\} \qquad B = \{5, 7, 9\}$
- $A \cup B = \{1, 5, 7, 9\}$
- $A \cap B = \{5\}$
- $A\backslash B = \{1\} \qquad B\backslash A = \{7, 9\}$

1.2.4 Rechenregeln für Mengenoperationen

Seien A, B, C, M Mengen mit $A, B, C \subseteq M$

1. $A \cup A = A$ Gesetz der Idempotenz
   $A \cap A = A$
2. $A \cup B = B \cup A$ Gesetz der Kommutativität
   $A \cap B = B \cap A$
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ Gesetz der Assoziativität
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ Gesetz der Distributivität
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5. $A \cap \bar{A} = \emptyset$
   $A \cup \bar{A} = M$
6. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ Regeln von de Morgan
   $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Beweis der Regel von de Morgan (1): Zu zeigen ist, dass $\overline{A \cup B}$ eine Teilmenge von $\bar{A} \cap \bar{B}$ und $\bar{A} \cap \bar{B}$ eine Teilmenge von $\overline{A \cup B}$ ist.

1. $\overline{A \cup B}$ ist Teilmenge von $\bar{A} \cap \bar{B}$:
   $\forall x : x \in \overline{A \cup B}$
   $\longrightarrow x \notin A \cup B$
   $\longrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$
   $\longrightarrow x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B}$
   $\longrightarrow x \in (\bar{A} \cap \bar{B})$
2. $\bar{A} \cap \bar{B}$ ist Teilmenge von $\overline{A \cup B}$:
   $\forall x : x \in (\bar{A} \cap \bar{B})$
   $\longrightarrow x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B}$
   $\longrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$
   $\longrightarrow x \notin A \cup B$
   $\longrightarrow x \in \overline{A \cup B}$

$\longrightarrow \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

1.2.5 Geordnetes Paar

- Seien A, B Mengen. $a \in A, b \in B, (a, b)$ heißt geordnetes Paar.
- Zwei geordnete Paare (a,b) und (a',b') sind gleich:
  $(a, b) = (a', b') :\Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$
- Die Menge $A \times B := \{(a, b)|a \in A \wedge b \in B\}$ heißt kartesisches Produkt der Menge A und B.

  $A \times A =: A^2$
  $A \times ... \times A =: A^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n)|a_i \in A, i = 1, 2, ..., n\}$
- $(a_1, a_2, ..., a_n)$ ist ein geordnetes n-Tupel (3-Tupel = Tripel)

Beispiel:

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)|x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$
- geometrische Interpretation: Zahlenebene $(P \leftrightarrow (x, y))$

1.2.6 Verallgemeinerung von Vereinigung und Durchschnitt

I: Indexmenge ($I \subseteq \mathbb{N}$ oder $I \subseteq \mathbb{Z}$) A_i mit $i \in I$: Menge

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x|\exists i \in I : x \in A_i\}$$
$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x|\forall i \in I : x \in A_i\}$$

Beispiele:

$$I = \{g|g = 2k \wedge k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$$
$$I = \{2, 4, 6, 8\} \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i = A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup A_8$$

1.3 Relationen und Abbildungen

1.3.1 Relationen

- Seien A,B Mengen. Eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ heißt eine Relation zwischen A und B. Falls $A = B$ heißt R eine Relation auf (der Menge) A.
- Bezeichnung: $(a, b) \in R \Leftrightarrow aRb$
- Veranschaulichung durch Pfeildiagramme möglich
- Beispiele:
  1. $R = \{(1, 1), (1, 3), (3, 3), (4, 2)\}$
  2. Gleichheitsrelation auf A: $\{(a, a)|a \in A\}$
  3. Teilerrelation auf $\mathbb{Z}$: $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2|m|n\}$

4. Kleinerrelation auf $\mathbb{R}$: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x < y\}$
5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$, also $xRy \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1$

   Interpretation: $xRy \Leftrightarrow P(x,y)$ liegt in der Einheitskreisscheibe

- Eine Relation R auf einer Menge A heißt
  - ... reflexiv, falls $\forall a \in A : aRa$
  - ... symmetrisch, falls $\forall a, b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$
  - ... antisymmetrisch, falls $\forall a, b \in A : (a,b) \in R \land (b,a) \in R \Rightarrow a = b$
  - ... transitiv, falls $\forall a, b, c \in A : (a,b) \in R \land (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$
- Eine Relation R auf einer Menge A heißt Ordnungsrelation, falls R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

  Bsp.: $\leq$ auf R ist eine Ordnungsrelation
- Eine Relation R auf einer Menge A heißt Äquivalenzrelation, falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv.

1.3.2 Abbildungen

- A, B: Mengen; $f \subseteq A \times B$: Relation
- f heißt eine Abbildung (Funktion), falls
  1. $\forall a \in A \exists b \in B : (a,b) \in f$
  2. $\forall a \in A \forall b, b' \in B : (a,b) \in f \land (a,b') \in f \Rightarrow b = b'$
- Bezeichnung: A... Definitionsbereich von f   B...Wertebereich von f

$$\begin{aligned} (a,b) \in f \quad &\Leftrightarrow \quad f(a) = b \\ &\Leftrightarrow \quad f : a \mapsto b \end{aligned}$$

$$\text{Ausführlich:} \qquad \begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ a & \mapsto & b \end{array}$$

- Bild von X ($X \subseteq A$): $f(X) := \{f(x) | x \in X\}$
- Urbild von Y ($Y \subseteq B$): $f^{-1}(Y) := \{a \in A | f(a) \in Y\}$
- Beispiel:
  - $f : A \Rightarrow B = \{(a,3), (b,3), (c,2), (d,1), (e,1)\}$
  - $f(A) = \{1,2,3\} \subset B$
  - $f^{-1}(\{1\}) = \{d, e\}$
  - $f^{-1}(\{2\}) = \{c\}$
  - $f^{-1}(\{5\}) = \{\emptyset\}$

1.3.3 Eigenschaften von Abbildungen

- Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ heißt...
  - injektiv, wenn $\forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$
    $\longrightarrow$ Jedes Bildelement hat höchstens ein Urbildelement.
  - surjektiv, wenn $f(A) = B$
    $\longrightarrow$ Jedes $b \in B$ hat min. 1 Urbild
  - bijektiv, wenn surjektiv und injektiv
- Wenn A=B und f bijektiv, dann heißt f eine Permutation von A.
- Beispiele:
  1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ ist bijektiv
  2. $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist weder surjektiv noch injektiv
     $g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty) : x \mapsto x^2$ ist surjektiv
     $g_2 : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) : x \mapsto x^2$ ist bijektiv
- Bem.: Die Relation $\{(a, f(a)) | a \in A\}$ heißt Graph von $f : A \longrightarrow B$

Komposition:

- Seien $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$. Die Abbildung $g \circ f$ heißt Komposition(-sabbildung):

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : A & \longrightarrow & C \\ a & \mapsto & (g \circ f)(a) := g(f(a)) \end{array}$$

- Zwei Abbildungen f, g heißen gleich, wenn $\forall a \in A : f(a) = g(a)$

Satz 1:

Seien $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$: Abbildungen

1. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (d.h. die Komposition ist assoziativ)
2. f, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv
3. f, g surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv
4. f, g bijektiv $\Rightarrow g \circ f$ bijektiv

Beweis (1):

$$\begin{array}{rcl} \forall a : (h \circ (g \circ f))(a) & = & h((g \circ f)(a)) \\ & = & h(g(f(a))) \\ & = & (h \circ g)(f(a)) \\ & = & ((h \circ g) \circ f)(a) \end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x+1 \\ g:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f\circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2) = x^2+1 \\ (g\circ f)(x) &= g(f(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 \\ \longrightarrow (f\circ g)(x) &\neq (g\circ f)(x) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Komposition ist nicht kommutativ

Satz 2:

Sei $f: A \longrightarrow B$: Abbildung

- f ist injektiv $\Leftrightarrow \exists g: B \longrightarrow A$ mit $g \circ f = id_A$

  Die Abbildung $id_A(a) = a$ heißt identische Abbildung in A (A: Menge).

  $$id_A : A \longrightarrow A : a \mapsto id_A(a) = a$$

- f ist surjektiv $\Leftrightarrow \exists g: B \longrightarrow A$ mit $f \circ g = id_B$
- f ist bijektiv $\Leftrightarrow \exists g: B \longrightarrow A$ mit $f \circ g = id_B$ und $g \circ f = id_A$

Beweis zu a):

1. „$\Rightarrow$"
   - Sei f injektiv. Sei

     $$g: B \longrightarrow A : b \mapsto g(b) = \begin{cases} a & \text{falls } \exists a \in A : f(a) = b \\ a_o & \text{falls } \forall a \in A : f(a) \neq b \, (b \notin f(a)) \end{cases}$$

   - Ist g eine Abbildung?
     (a) g auf B definiert: g(B) ist für alle $b \in B$ definiert
     (b) g ist eindeutig:
       - Sei $b \in f(A) : g(b) = a$ und $g(b) = a'$. Daraus folgt, dass $f(a) = b = f(a')$ ist und somit $a = a'$, da f injektiv.
       - Sei $b \notin f(A)$: $g(b) = a_o$
       - Also ist g eine Abbildung
   - Anwendung der Komposition: Sei $a \in A$ (beliebig).

     $$(g\circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a \Rightarrow (g \circ f)(a) = id_A$$

2. „$\Leftarrow$"
   - Sei $g \circ f = id_A$. Also $(g \circ f)(x) = x$ für alle $x \in A$.

- Sei $f(a) = f(a')$, dann

$$\begin{aligned} g(f(a)) &= g(f(a')) \\ (g \circ f)(a) &= (g \circ f)(a') \\ id_A(a) &= id_A(a') \\ a &= a' \end{aligned}$$

Beweis zu b):

1. „$\Rightarrow$“
   - Sei f surjektiv, d.h. $f(A) = B$. Für jedes $b \in B$ wird $a \in A$ gewählt, sodass $f(a) = b$.
   - Sei $g(b) = a$. Jetzt ist $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b$. Also ist $f \circ g = id_B$.
2. „$\Leftarrow$“
   - $(f \circ g) = id_B$ mit $g : B \longrightarrow A$.
   - $\forall b \in B : b = (f \circ g)(b) = f(g(b))$. Somit hat b Urbild $g(b)$ bei f. Also f surjektiv.

Beweis zu c):

1. „$\Rightarrow$“
   - Sei f bijektiv, also f ist injektiv und surjektiv. Nach a) und b) folgt $g \circ f = id_A$ und $(f \circ g) = id_B$.
2. „$\Leftarrow$“
   - Sei $g \circ f = id_A$ und $(f \circ g) = id_B$. Nach a) und b) folgt f ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

1.3.4 Umkehrabbildung

- Ist $f : A \longrightarrow B$ bijektiv, dann hat jedes $b \in B$ genau ein Urbild $f^{-1}(\{b\})$, das mit $f^{-1}(b)$ bezeichnet wird. Dann heiße $f^{-1} : B \longrightarrow A : b \mapsto f^{-1}(b)$ die Umkehrabbildung von f (auch inverse Abbildung genannt).
- Bemerkung: $f^{-1}(\{b\})$ ist für jede Abbildung erklärt, jedoch $f^{-1}(b)$ nur für bijektive Abbildungen.

Satz 3: Sei $f : A \longrightarrow B$ bijektiv.

- f^{-1} bijektiv
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- $f^{-1} \circ f = id_A$
- $f \circ f^{-1} = id_B$

1.4 Gruppen, Ringe, Körper

1.4.1 Gruppe

- Eine Menge G, in der es eine Abbildung $\circ : G \times G \longrightarrow G$, die innere Verknüpfung genannt wird, gibt und dabei die folgende Axiome gelten:
  - (G1) Assoziativgesetz: $\forall a, b, c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
  - (G2) Existenz eines neutralen Elements in G: $\exists e \in G \ \forall a \in G : e \circ a = a$
  - (G3) Existenz inverser Elemente: $\forall a \in G \ \exists a^{-1} \in G : a^{-1} \cdot a = e$

  heißt eine Gruppe (G, $\circ$). Sie heißt kommutativ (abelsch), wenn zusätzlich gilt:
  - (G4) Kommutativgesetz: $\forall a, b \in G : a \circ b = b \circ a$

Beispiele:

1. $\text{G} = \mathbb{Z} \quad \circ = +$
   - Behauptung: $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine kommutative Gruppe - die additive Gruppe der ganzen Zahlen.
   - Beweis: $+$ ist die innere Verknüpfung von $\mathbb{Z}$, denn $a, b \in \mathbb{Z}$, also $a+b$ eindeutig definiert.
     - (G1) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a + b) + c = a + (b + c)$
     - (G2) $\exists e \in \mathbb{Z} : e + a = a \longrightarrow e = 0$
     - (G3) $\forall a \in \mathbb{Z} \ \exists a^{-1} \in \mathbb{Z} : a^{-1} + a = 0$, d.h. $a^{-1} = a$ erfüllt das Gesetz.
     - (G4) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a + b = b + a$
   - Bemerkungen:
     - Neutrales Element einer additiven Gruppe heißt auch Nullelement.
     - Das inverse Element a^{-1} heißt in einer additiven Gruppe auch entgegengesetztes Element.
2. $\text{G} = \mathbb{Q}\backslash\{0\} =: \mathbb{Q}* \quad \circ = \cdot$
   - Behauptung: $(\mathbb{Q}*, +)$ ist eine kommutative Gruppe
   - Beweis: Multiplikation $\cdot$ ist innere Verknüpfung.
     - (G1) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}* : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
     - (G2) $\exists e \in \mathbb{Q} * \forall a \in \mathbb{Q}* : e \cdot a = a \longrightarrow e = 1$
     - (G3) $\forall a \in \mathbb{Q} * \exists a^{-1} \in \mathbb{Q}* : a^{-1} \cdot a = 1$
     - (G4) $\forall a, b \in \mathbb{Q}* : a \cdot b = b \cdot a$
   - Bemerkungen:
     - Neutrales Element einer multiplikativen Gruppe heißt Einselement.

- Inverses Element einer multiplikativen Gruppe heißt reziprokes Element.
- $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ist keine Gruppe, da zu $0 \in \mathbb{Q}$ kein inverses Element existiert.

Satz 1:

(G, $\circ$) sei eine Gruppe mit neutralem Element e. Dann gilt:

1. $\forall a \in G : a \circ a^{-1} = e$
2. $\forall a \in G : a \circ e = a$
3. Es gibt genau ein neutrales Element.
4. Zu jedem $a \in G$ gibt es genau ein $a^{-1} \in G$.
5. $e^{-1} = e \qquad (a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1} \qquad (a^{-1})^{-1} = a$

Beweis:

1. $a^{-1} \in G \overset{G3}{\Rightarrow} (a^{-1})^{-1} \in G$, also $(a^{-1})^{-1} \circ a^{-1} = e$

   Damit:

$$\begin{aligned} a \circ a^{-1} &\overset{G2}{=} e \circ a \circ a^{-1} = ((a^{-1})^{-1} \circ a^{-1}) \circ a \circ a^{-1} \\ &\overset{G1}{=} (a^{-1})^{-1} \circ (a^{-1} \circ a) \circ a^{-1} \overset{G3}{=} (a^{-1})^{-1} \circ e \circ a^{-1} \\ &\overset{G2}{=} (a^{-1})^{-1} \circ a^{-1} = e \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} a \circ e &\overset{G3}{=} a \circ (a^{-1} \circ a) \overset{G1}{=} (a \circ a^{-1}) \circ a \\ &\overset{1.}{=} e \cdot a \overset{G2}{=} a \end{aligned}$$

3. Sei e' ein weiteres neutrales Element. Setze e' = a in (G2):

$$e \circ e' = e'$$

   und

$$e \circ e' = e$$

   da für neutrales Element auch 2. gilt. Daraus folgt: e' = e.

4. Sei $\underline{a^{-1}}$ ein weiteres inverses Element von a.

$$\begin{aligned} \underline{a^{-1}} &\overset{2.}{=} \underline{a^{-1}} \circ e \overset{G1}{=} \underline{a^{-1}} \circ (a \circ a^{-1}) \\ &\overset{G1}{=} (\underline{a^{-1}} \circ a) \circ a^{-1} \overset{G3}{=} e \circ a^{-1} \\ &\overset{G2}{=} a^{-1} \end{aligned}$$

5. Wegen 2. mit $a = e^{-1}$:

$$e^{-1} \circ e = e^{-1} \overset{G3}{\Rightarrow} e = e^{-1}$$

6. Setze a^{-1} anstelle von a in 1.:

$$a^{-1} \circ (a^{-1})^{-1} = e$$

Daraus folgt, dass $(a^{-1})^{-1}$ inverses Element zu a^{-1} ist.

7.

$$\begin{aligned}(b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b) &\overset{G1}{=} b^{-1} \circ (a^{-1} \circ a) \circ b \\ &\overset{G3}{=} b^{-1} \circ b \overset{G3}{=} a\end{aligned}$$

Also ist $(b^{-1} \circ a^{-1})$ inverses Element zu $a \circ b$.

Fortsetzung Beispiele:

1. G = B^A $\quad \circ = \oplus$
   - Sei (B,+) eine abelsche Gruppe, $A \neq \emptyset$ Menge

     $$B^A := \{f : A \longrightarrow B | f \text{Abbildung}\}$$

     B^A ist die Menge der Abbildungen von A nach B.
   - Für $f, g \in B^A$ sei eine innere Verknüpfung

     $$f \oplus g : A \longrightarrow B : x \mapsto (f \oplus g)(x) := f(x) + g(x)$$

     definiert.
   - Behauptung: $(B^A, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe.
   - Beweis:
     - Innere Verknüpfung ist wohldefiniert. (s.o.)
     - (G1)

       $$\begin{aligned}((f \oplus g) \oplus h)(x) &= (f \oplus g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) \qquad \text{B: abelsche Gruppe!} \\ &= f(x) + (g \oplus h)(x) = (f \oplus (g \oplus h))(x)\end{aligned}$$

     - (G2) Neutrales Element ist die Nullfunktion o

       $$o : A \longrightarrow B : x \mapsto 0$$

       Die 0 steht hierbei für das Nullelement von (B, +)!

       $$(o \oplus f)(x) = 0 + f(x) = f(x)$$

     - (G3) Inverses Element ist $-f : A \longrightarrow B : x \mapsto -f(x)$. -f(x) steht hier als inverses Element von (B,+)!
     - (G4) Da (B,+) abelsch ist:

       $$f(x) + g(x) = g(x) + f(x) \longrightarrow (f \oplus g)(x) = (g \oplus f)(x)$$

2. Modulo-Gleichheit:

- Sei $m \in \mathbb{N}$ fest gegeben. Sei Relation $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ definiert:

$$a \sim b :\Leftrightarrow m|a-b \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z} : m \cdot x = a - b \Leftrightarrow a = m \cdot x + b$$

- Sei $b = m \cdot y + r$ mit $0 \leq r < m$ (r ist Divisionsrest) $\longrightarrow$ a hat ebenfalls Divisionsrest r bei Division durch m
- $a \sim b \Leftrightarrow$ a und b haben den gleichen Rest bei Division durch m („a gleich b modulo m“):

$$a = b \mod m \Leftrightarrow a \sim b \Leftrightarrow m|a-b$$

- Behauptung: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation
- Beweis:
  (a) reflexiv, denn $\forall a \in \mathbb{Z} : m|a-a$, also $a \sim a$
  (b) symmetrisch, denn $\forall a, b \in \mathbb{Z} : m|a-b \Rightarrow m|-(b-a)$
  (c) transitiv, denn $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : m|a-b \wedge m|b-c \Rightarrow m|a-c$, weil $a-c = (a-b)+(b-c)$. Also $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

1.4.2 Äquivalenzklassen

- Sei $\sim$ eine beliebige Äquivalenzrelation auf M. Dann für $a \in$ M eine Äquivalenzklasse

$$[a] := \{x | x \sim a\} \subseteq M$$

definiert. Element a heißt Repräsentant von $[a]$.

- Satz 2: Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann gilt $\forall a, b \in$ M:
  1. $[a] \neq \emptyset$
  2. $[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$
  3. $\bigcup_{a \in M} [a] = M$

Anwendung auf Modulo-Gleichheit mit $M = \mathbb{Z}$:

- Bez.: $m \cdot \mathbb{Z} = \{m \cdot x | x \in \mathbb{Z}\} \quad m \in \mathbb{N}$
- Äquivalenzklasse von a:

$$[a] := \{x | x = a \mod m\} = \{x | x - a \in m \cdot \mathbb{Z}\}$$

Menge aller x, die bei Division durch m den gleichen Rest haben wie a

- $\mathbb{Z}/_{m \cdot \mathbb{Z}} := \{[a] | a \in \mathbb{Z}\}$ „Z modulo $m \cdot \mathbb{Z}$“
- Bemerkung: m=2
  - $[0] = \{x | x \sim 0\} = \{x |$x ist gerade Zahl$\}$
  - $[1] = \{x | x \sim 1\} = \{x |$ x ist eine ungerade Zahl$\}$
  - $[0] \cap [1] = \emptyset$
  - $\mathbb{Z}/_{m \cdot \mathbb{Z}} = \{[0], [1]\}$

- Innere Verknüpfung von $\mathbb{Z}/_{m\cdot\mathbb{Z}}$ sei definiert durch:

$$[a] \oplus [b] = [a+b]$$

- Zu zeigen: $\oplus$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl des Repräsentanten a und b für die Äquivalenzklassen $[a]$ und $[b]$ ist $[a+b]$ genau definiert.
  $\longrightarrow$ Seien a' und b' aus $\mathbb{Z}$ weitere Repräsentanten von a und b, d.h. $[a] = [a']$ und $[b] = [b']$, dann ist $[a+b] = [a'+b']$, denn:

$$\begin{aligned}
a \sim a' \Rightarrow m|a-a' \quad b \sim b' \Rightarrow m|b-b' \\
\Rightarrow \exists e, f \in \mathbb{Z} : m \cdot e = a - a' \wedge m \cdot f = b - b' \\
\Rightarrow m \cdot (e+f) = a - a' + b - b' \Rightarrow m|(a+b) - (a'+b') \\
\Rightarrow a + b \sim a' + b' \Rightarrow [a+b] = [a'+b'] \qquad \backslash\backslash
\end{aligned}$$

- Satz 3: $Z/_{m\cdot\mathbb{Z}}$ ist eine abelsche Gruppe mit m Elementen.

  Beweis:

  1. $$\begin{aligned}
([a] \oplus [b]) \oplus [c] &= [a+b] \oplus [c] = [(a+b)+c] \\
&= [a+(b+c)] = [a] \oplus [b+c] \\
&= [a] \oplus ([b] \oplus [c])
\end{aligned}$$
  2. neutrales Element: [0]
  3. inverses Element zu $[a]$ ist $[-a]$

- Beispiele:

  1. m=1 $\quad \forall a, b \in \mathbb{Z} : a \sim b \Leftrightarrow 1|a-b$ (immer erfüllt)

     $Z/_{1\cdot\mathbb{Z}} = \{[0]\}$
  2. m=3 $\quad \forall a, b \in \mathbb{Z} : a \sim b \Leftrightarrow 3|a-b$

     $[0] = \{x | x = 0 \mod 3\}$ (Menge aller durch 3 teilbaren Zahlen)
     $[1] = \{x | x = 1 \mod 3\}$ (Mengen aller ganzen Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 1 lassen)
     $[2] = \{x | x = 2 \mod 3\}$

     $Z/_{3\cdot\mathbb{Z}} = \{[0], [1], [2]\}$

1.4.3 Permutation

Sei $M \neq \emptyset$ Menge. Bijektive Abbildung $f : M \to M$ heißt eine Permutation von M. Bezeichnung:

$$S_M = Sym(M) := \{f | f \text{ Permutation von M}\}$$

Satz 4:

$(S_M, \circ)$ ist eine Gruppe (bzgl. der Komposition $\circ$)

Beweis:

1. $\circ$ ist wohldefiniert, denn: $\forall f, g \in S_M$: f, g bijektiv. Nach Satz 1.3 Satz 1d) ist damit auch $f \circ g$ bijektiv. Damit ist $f \circ g \in S_M$.
2. Weil Komposition assoziativ ist, auch für Permutationen assoziativ.
3. $id_M \in S_M$ und $id_M \circ f = f$. Also ist id_M neutrales Element.
4. 1.3 Satz 3: Wenn f bijektiv, dann existiert f^{-1} bijektiv. $f^{-1} \in S_M$.

1.4.4 Untergruppen

- Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Sei $U \subseteq G$. U heißt eine Untergruppe von G, falls:
  1. $e \in U$
  2. $\forall a, b \in U : a \circ b \in U$
  3. $\forall a \in U : a^{-1} \in U$
- Folgerungen:
  - $(G, \circ)$ ist Untergruppe von $(G, \circ)$.
  - $(\{e\}, \circ)$ ist Untergruppe von $(G, \circ)$.
  - $U \subseteq G$, dann $(U, \circ_u)$ eine Gruppe. ($\circ_u$ ... Einschränkung von $\circ$ auf U)
- Beispiele:
  - $(\mathbb{Z}, +) \subseteq (\mathbb{Q}, +) \subseteq (\mathbb{R}, +)$
  - $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot) \subseteq (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$
  - $m \in \mathbb{Z} \qquad m \cdot \mathbb{Z} = \{x \cdot m | x \in \mathbb{Z}\}$
    $(m \cdot \mathbb{Z}, +) \subseteq (\mathbb{Z}, +)$
    1. e $= 0 \in \mathbb{Z}$ (klar)
    2. Kompositionsabbildung liegt in Untergruppe:
       $$\forall a, b \in m \cdot \mathbb{Z} \exists x, y \in \mathbb{Z} : a = m \cdot x \wedge b = m \cdot y$$
       $$a + b = m \cdot (x + y) \Rightarrow a + b \in m \cdot \mathbb{Z}$$
    3. (-a) ist inverses Element von a
       $$\begin{aligned} \forall a \in m \cdot \mathbb{Z} \exists x \in \mathbb{Z} : a &= m \cdot x \\ \Rightarrow -a &= m \cdot (-x) \Rightarrow -a \in m \cdot \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Satz 5: (Untergruppenkriterium)

Sei $(G, \circ)$ Gruppe mit neutralem Element, $U \subseteq G$ Teilmenge. U ist eine Untergruppe von G $\Leftrightarrow$:

1. $U \neq \emptyset$
2. $\forall x, y \in U : x \circ y^{-1} \in U$

1.4.5 Algebraische Strukturen mit 2 inneren Verknüpfungen

- R sei eine Menge mit den beiden inneren Verknüpfungen „$+ : R\times R \to R$" („Addition") und „$\cdot : R \times R \to R$"(„ Multiplikation ").
- $(R, \cdot)$ heißt Halbgruppe (Semigruppe), wenn $\cdot$ assoziativ ist.
- $(R, +, \cdot)$ heißt ein Ring, falls:
  - (R1) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
  - (R2) $(R, \cdot)$ ist eine Halbgruppe.
  - (R3) Es gelten die beiden Distributivgesetze:

$$\forall a, b, c \in R : (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) = a \cdot c + b \cdot c$$

$$\forall a, b, c \in R : c \cdot (a + b) = (c \cdot a) + (c \cdot b) = c \cdot a + c \cdot b$$

- Ein Ring heißt kommutativ, falls $(R, \cdot)$ eine kommutative Halbgruppe ist.
- $(R, +, \cdot)$ heißt ein „Ring mit 1", falls $(R, +, \cdot)$ ein Ring ist und $\exists 1 \in R : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.
- $(R, +, \cdot)$ heißt Schiefkörper, falls:
  - (S1) $(R, +, \cdot)$ ist ein Ring.
  - (S2) $(R\backslash\{0\}, \cdot)$ eine Gruppe (0 ist Nullelement von $(R, +)$).
- $(R, +, \cdot)$ heißt Körper , falls $(R, +, \cdot)$ ein Schiefkörper ist, dessen Gruppe $(R\backslash\{0\}, \cdot)$ abelsch ist.
- Beispiele:
  1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kommutativer Ring mit 1
  2. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ kein Ring
  3. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind Körper.
  4. $(R, +, \cdot)$ Ring, $A \neq \emptyset$ Menge und $R^A = \{f | f : A \longrightarrow R\}$
     - $(R, \oplus)$ abelsche Gruppe (Bsp. 3)
     - Sei Multiplikation definiert:

$$f \odot g := A \longrightarrow R : x \mapsto (f \odot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

     - Behauptung: $(R, \oplus, \odot)$ ist ein Ring
     - Beweisidee: Wenn R kommutativ, dann R^A kommutativ. Wenn R Ring mit 1, dann R^A Ring mit $\mathbf{1}$, wobei $\mathbf{1}$: $\mathbf{1} : A \longrightarrow R : x \mapsto 1$ (konst. Abbildung)
  5. Ein Körper aus 2 Elementen: $R = \{0, 1\}$. 0 sei Nullelement von $(R, +)$ und 1 sei Einselement von $(R\backslash\{0\}, \cdot)$. Addition und Multiplikation nach Tabelle. Gültigkeit der Assoziativ- und Distributivgesetze nachrechnen für alle mgl. Kombinationen von $a, b, c \in R$.

Satz 6:

1. Sei $(R,+,\cdot)$ ein Ring, dann gilt für das Nullelement von $(R,+)$, dass $\forall x \in R : 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
2. Sei $(R,+,\cdot)$ ein Ring mit 1, dann gilt:
$$\forall a,b \in R : -a = a \cdot (-1) = (-1) \cdot a$$
$$\forall a,b \in R : (-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -a \cdot b$$
3. Falls R ein Körper ist, dann ist $(R,+,\cdot)$ ein kommutativer Ring mit 1.

Beweis:

1. $x \in R : 0 \cdot x + 0 \cdot x \overset{R3}{=} (0+0) \cdot x = \overset{R1}{=} 0 \cdot x$. Man setze nun $a := 0 \cdot x$:
$$0 \cdot x + a = a \overset{R1}{\Rightarrow} 0 \cdot x = a - a = 0$$
Analog: $x \cdot 0 = 0$
2.
$$\begin{aligned} a + a \cdot (-1) &= a \cdot 1 + a \cdot (-1) \overset{R3}{=} a \cdot (1 + (-1)) \\ &= a \cdot 0 \overset{R3}{a} 0 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} (-a) \cdot b \overset{b}{=} (a \cdot (-1)) \cdot b &\overset{R2}{=} a \cdot ((-1) \cdot b) \overset{b}{=} a \cdot (-b) \\ &= ((-1) \cdot a) \cdot b = (-1) \cdot (a \cdot b) = -(a \cdot b) \end{aligned}$$
3. $(R\backslash\{0\},\cdot)$ ist kommutativ nach Voraussetzung. Nach a) gilt Kommutativität auch für 0. Also $(R,\cdot)$ kommutativ. In $(R\backslash\{0\},\cdot)$ gilt $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ nach Voraussetzung. Wegen a) auch für x=0.

Satz 7:

$(K,+,\cdot)$ sei ein Körper, dann gilt $\forall a,b \in K$ mit $a \neq 0$:

1. $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow b = 0$
2. $a \cdot x = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$

Bemerkung: In einem Ring kann $b \neq 0$ existieren, sodass $a \cdot b = 0$ für $a \neq 0$. Dann heißt b ein Nullteiler.

Satz 8:

1. Für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ ist $\mathbb{Z}/_{n\cdot\mathbb{Z}}$ ein kommutativer Ring mit 1 (Restklassenring modulo n).
2. Ist p eine Primzahl, so ist $\mathbb{Z}/_{p\cdot\mathbb{Z}}$ ein Körper mit genau p Elementen, der sogenannte Restklassenkörper modulo n.

Beweis zu 8.1:

- $\mathbb{Z}/_{n\cdot\mathbb{Z}} = \{[0],[1],...[n-1]\}$ mit $[a] = \{b|a = b \mod m\}$
- $(\mathbb{Z}/_{n\cdot\mathbb{Z}}, \oplus)$ ist abelsche Gruppe (Satz 3) mit genau n Elementen.
- Zu zeigen: Es gibt Multiplikation $\odot$ und diese ist assoziativ, kommutativ und es gibt ein Einselement.
- Es sei $[a] \odot [b] = [a \cdot b]$. Dann ist $\odot$ wohldefiniert, weil die Produktäquivalenzklasse nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängt wie die Rechnung zeigt:
  Seien a' und b' andere Repräsentanten von $[a]$ bzw. $[b]$.

$$\begin{array}{rcl} [a] = [a'] & \Leftrightarrow & a' = a \mod n \\ [\mathrm{b}] = [b'] & \Leftrightarrow & b' = b \mod n \\ \Rightarrow a' \cdot b' & = & a \cdot b \mod n \Rightarrow [a \cdot b] = [a' \cdot b'] \end{array}$$

- (G1) Assoziativität

$$\begin{array}{rcl} ([a] \odot [b]) \odot [c] & = & [a \cdot b] \odot [c] = [(a \cdot b) \cdot c] \\ & = & [a \cdot (b \cdot c)] = [a] \odot [b \cdot c] \\ & = & [a] \odot ([b] \odot [c]) \end{array}$$

- (G2) $[a] \odot [1] = [a \cdot 1] = [a]$
- (G4) $[a] \odot [b] = [a \cdot b] = [b \cdot a] = [b] \odot [a]$
- Bemerkung: Mit GF(q) bezeichnet man einen Körper aus genau q Elementen (Galois-Field).

1.5 Körper der komplexen Zahlen

- L. Euler (1777) definierte: Die imaginäre Einheit i löst $x^2 = -1$, d.h. es gelte $i^2 = -1$.
- Menge $\mathbb{C}$ komplexer Zahlen bilden: $z = a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dabei wird a (=Re(z)) Realteil und b (=Im(z)) Imaginärteil genannt.
  - für b=0: $z = a + i \cdot 0 = a \in \mathbb{R}$
  - für a=0, $b \neq 0$: $z = b \cdot i$ (rein imaginär)

  Also $\mathbb{C} = \{z|z = a + b \cdot i \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}\}$ und $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Gleichheitsbegriff: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$
- Addition:
  - $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : (z_1, z_2) \mapsto z_1 + z_2 := (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2)$
  - offenbar assoziativ und kommutativ
  - Nullelement: $0 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

- entgegengesetztes Element: $z + (-z) = 0$ mit $-z = -a - i \cdot b$
- Damit ist $(\mathbb{C}, +)$ eine abelsche Gruppe.

- Multiplikation:
  - $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : (z_1, z_2) \mapsto z_1 \cdot z_2 := (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i \cdot (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1$
  - Behauptung: $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe
    1. (G1) Assoziativität:

$$\begin{aligned} l &:= (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = ((a_1 a_2 - b_1 b_2) + \imath \cdot (a_1 b_2 + a_2 b_1)) \cdot z_3 \\ &= ... = z_1 \cdot ((a_2 a_3 - b_2 b_3) + \imath \cdot (a_2 b_3 + a_3 b_2)) \\ &= z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = r \end{aligned}$$

       (ausführliche Rechnung s. Mitschriften)
    2. (G2) Existenz des Einselements: $1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$$1 \cdot z = 1 \cdot (a + i \cdot b) = 1a + \imath \cdot 1b = a + \imath \cdot b = z$$

    3. (G3) Existenz des Inversen: $z^{-1} = x + \imath \cdot y$ mit $z \neq 0$, d.h. $a^2 + b^2 \neq 0$.

$$\begin{aligned} z \cdot z^{-1} &= 1 \\ \Rightarrow (x \cdot a - y \cdot b) + \imath \cdot (x \cdot b + a \cdot y) &= 1 \\ \Rightarrow x &= -\frac{ay}{b} \qquad x = \frac{yb+1}{a} \\ \Rightarrow (yb+1) \cdot b &= -a^2 y \\ \Rightarrow y \cdot (a^2 + b^2) &= -b \\ \Rightarrow y &= -\frac{b}{a^2+b^2} \qquad x = \frac{a}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

       Das Einselement ist also eindeutig bestimmbar:
       $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \imath \cdot \frac{b}{a^2+b^2}$.
    4. (G4) Kommutativität: $z_1 \cdot z_2 = ... = z_2 \cdot z_1$
  - Insgesamt folgt: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper, da auch Distributivgesetze bestätigt werden können.

- Subtraktion: $z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2)$
- Division: $\frac{1}{z} := z^{-1}$
- Konjugation: Für $z = a + i \cdot b$ sei $\bar{z} = a - \imath \cdot b$ die konjugiert komplexe Zahl.

1.5.1 Eigenschaften der komplexen Zahlen

1. $z \cdot \bar{z} = (a + \imath \cdot b) \cdot (a - \imath \cdot b) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$
2. $z + \bar{z} = (a + \imath \cdot b) + (a - \imath \cdot b) = 2 \cdot a \in \mathbb{R}$. Also $a = 0,5 \cdot (z + \bar{z})$.
3. $z - \bar{z} = (a + \imath \cdot b) - (a - \imath \cdot b) = \imath \cdot 2b$. Also $b = 0,5 \cdot (z - \bar{z})$.

4. Herstellen eines reellen Nenners: $z = a + \imath \cdot b$ und $w = c + \imath \cdot d$

$$\begin{aligned} \frac{w}{z} &= \frac{w \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{(c + \imath \cdot d) \cdot (a - \imath \cdot b)}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{ca + bd}{a^2 + b^2} + \imath \cdot \frac{bc + ad}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

5. Potenzen der imaginären Einheit ($n \in \mathbb{N}$):
   - $\imath^{-1} = \frac{1}{\imath} = \frac{-\imath}{-\imath^2} = -\imath$
   - $\imath^1 = \imath \Rightarrow \imath^{4n+1} = \imath$
   - $\imath^2 = -1 \Rightarrow \imath^{4n+2} = -1$
   - $\imath^3 = -\imath \Rightarrow \imath^{4n+3} = -\imath$
   - $\imath^4 = 1 \Rightarrow \imath^{4n} = 1$

1.5.2 Veranschaulichung: Gauß'sche Zahlenebene

- $P(a, b) \Leftrightarrow z = a + \imath \cdot b$
- absoluter Betrag von z: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Argument von z: $\varphi = \measuredangle(Re(z), \overline{0P}) = Arg(z)$
- Darstellungsformen:
  1. Polarkoordinaten: (r, φ)

     $$\begin{aligned} \frac{a}{r} &= \cos\varphi \qquad \frac{b}{r} = \sin\varphi \\ z &= a + \imath \cdot b = r \cdot (\cos\varphi + \imath \cdot \sin\varphi) \end{aligned}$$

     trigonometrische Darstellung von z
  2. Benutzung der Eulerschen Formel:

     $$e^{\imath \cdot \varphi} = \cos\varphi + \imath \cdot \sin\varphi$$

     als Schreibweise mit Beachtung des Rechnens mit Potenzen.

     $$z = a + \imath \cdot b = r \cdot (\cos\varphi + \imath \cdot \sin\varphi) = r \cdot e^{\imath \cdot \varphi}$$

     exponentielle Darstellung von z
  3. arithmetische Darstellung von z: $z = a + \imath \cdot b$
- Rechenregeln:
  - $e^{\imath \cdot 0,5 \cdot \pi} = \cos\frac{\pi}{2} + \imath \cdot \sin\frac{\pi}{2} = i$
  - $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot e^{\imath \cdot \varphi_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{\imath \cdot \varphi_2}) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{\imath \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}4$
  - $z_1 \cdot (z_2)^{-1} = (r_1 \cdot e^{\imath \cdot \varphi_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{\imath \cdot \varphi_2})^{-1} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{\imath \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$
  - $e^{\imath \cdot \varphi} = e^{i \cdot (2k\pi)}$ mit $k \in \mathbb{Z}$

1.5.3 Lösen von algebraischen Gleichungen - Fundamentalsatz der Algebra

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k = a_0 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + ... + a_n \cdot z^n$$

- Polynom n-ten Grades ($a_n \neq 0$) mit:
  - $z \in \mathbb{C}$
  - $a_k \in \mathbb{C}$ (k-ter Koeffizient)
  - a_0 (Absolutglied)
  - a_n Leitkoeffizient
- $P(z) = 0$ algebraische Ungleichung n-ten Grades für die Unbekannte z
- Fundamentalsatz der Algebra: (C.F. Gauß)
  - $P(z) = 0$ besitzt genau n Lösungen (Wurzeln) $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$, falls diese entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden.
  - Die Lösung z_j hat die Vielfachheit $\alpha_j \in \mathbb{N}$, falls $(z - z_j)^{\alpha_j} | P(z)$, d.h. $P(z) = (z - z_j)^{\alpha_j} \cdot Q(z)$ mit einem Polynom Q(z) vom Grad $n - \alpha_j$.
  - Bemerkung: Durch Polynomdivision sieht man leicht, dass es höchstens n Lösungen gibt. Für „genau“ n Lösungen werden „nicht-algebraische“ Hilfsmittel benötigt.
  - $P(z) = (z-z_1)^{\alpha_1} \cdot (z-z_2)^{\alpha_2} \cdot ... \cdot (z-z_m)^{\alpha_m}$ mit $m \leq n$ und $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = n$, also Darstellung von P(z) durch Linearfaktoren.
  - Bemerkung: Fundamentalsatz sagt nichts über den Weg (des Radizierens) zur Bestimmung von Lösungen aus.
  - Für $n \leq 4$ sind Lösungen bekannt, für $n \geq 5$ sind Lösungen nicht mit elementaren Funktionen zu bestimmen.

1.5.4 Lösungen für Sonderfälle

1. Man löse $z^n = c \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{C}$)

   Ansatz:

$$\begin{aligned} z &= \varrho \cdot e^{\imath \cdot \tau} \qquad c = r \cdot e^{\imath \cdot \varphi} \\ z^n &= (\varrho \cdot e^{\imath \cdot \tau})^n = r\dot{e}^{\imath \cdot \varphi} \\ \Rightarrow \varrho^n &= r \\ \Rightarrow n \cdot \tau_k &= \varphi + 2k\pi \\ \tau_k &= \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{aligned}$$

   Wegen $e^{\imath \tau_k} = e^{\imath(\tau_k + 2l\pi)}$ für $l \in \mathbb{Z}$ genügt es $k = 0, 1, ..., n-1$ zu betrachten, d.h. die Lösungen τ_k mit $\frac{\varphi}{n} \leq \tau_k < \frac{\varphi}{n} + 2\pi$, die in einem Intervall der Länge 2π liegen.

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\imath(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n})}$$

Die Lösungen der speziellen Gleichung $z^n = 1 (r = 1, \varphi = 0)$ sind $z_k = e^{\imath k \frac{2\pi}{n}}$ mit $k = 0, 1, ..., n$ und heißen n-te Einheitswurzeln.

Bsp.: $z^3 = i = e^{\imath 0,5\pi}$

$$z_k = 1 \cdot e^{\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi 3} \qquad \text{mit k=0,1,2}$$

2. Man löse die quadratische Gleichung $z^2 + pz + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{C}$.

   Ansatz:

   $z^2 + pz + q = (z + a)^2 - b = 0$ mit $a, b \in \mathbb{C}$, also $w^2 = b$. Nach Beispiel 1 mit $w = z + a$ zu lösen.

$$\begin{aligned} z^2 + pz + q &= (z + a)^2 - b \\ \Rightarrow p &= 2a \qquad q = a^2 - b \\ \Rightarrow a &= 0,5p \qquad b = -q + \frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

   (a) b=0: $z_0 = -a = -0,5p$ (mit Vielfachheit 2)

   (b) $b \neq 0$: Nach Bsp. 1 hat $w^2 = b$ die Lösungen:

$$\begin{aligned} w_0 &= r \cdot e^{\imath \cdot \frac{\varphi}{2}} \\ w_1 &= r \cdot e^{\imath \cdot \frac{\varphi}{2} + \pi} = -r \cdot e^{\imath \cdot \frac{\varphi}{2}} \end{aligned}$$

   Da $w = z + a$ folgt für die Lösungen mit $r = |b|$ und $\varphi = \arg b$:

$$\begin{aligned} z_0 &= r \cdot e^{\imath \cdot \frac{\varphi}{2}} - a \\ z_1 &= -r \cdot e^{\imath \cdot \frac{\varphi}{2}} - a \end{aligned}$$

   Falls $p, q \in \mathbb{R}$: $b \in \mathbb{R}$, $\varphi = 0$ für $b > 0$ und $\varphi = \pi$ für $b < 0$.

   Für $b > 0$:

$$\begin{aligned} z_0 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ z_1 &= -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}$$

   Für $b > 0$:

$$\begin{aligned} z_0 &= -\frac{p}{2} + \imath \cdot \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ z_1 &= -\frac{p}{2} - \imath \cdot \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}$$

   Die Lösungen sind konjugiert komplexe Lösungen.

2
Vektorräume

2.1 Einführung: Geometrische Punkt- und Vektorräume

2.1.1 Vektorraumdefinition

- Ziel: wesentliche Methoden der Vektorraumtheorie an Bsp. erläutern - dann verallgemeinern.
- Vor.: geometrische Punkträume der physikalischen Erfahrungswelt
  - Gerade A^1 (Menge der Punkte einer Gerade)
  - Ebene A^2 (Menge der Punkte einer Ebene)
  - Raum A^3 (Menge der Punkte des Raums)
- Koordinatensysteme:
  1. in der Gerade A^1:
     - (O, E): Koordinatensystem mit Einheitsstrecke $\overline{OE}$ (O...Ursprung, E...Einheitspunkt)
     - $\chi \in A^1 \leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ mit $\overline{O\chi} = x \cdot \overline{OE}$.
     - $x > 0$, falls χ und E auf der gleichen Seite bzgl. O liegen
     - $x < 0$, falls χ und E auf verschiedenen Seiten bzgl. O liegen
  2. in der Ebene A^2:
     - (O, E_1, E_2): Koordinatensystem, $OE_1 = A_1^1$ und $OE_2 = A_2^1$
     - Koordinatenpunkte χ_1 bzw. χ_2 mit parallelen Geraden zu A_1^1 bzw. A_2^1 ausgeschnitten

$$\begin{array}{ccll} \chi_i & \leftrightarrow & x_i \in \mathbb{R} & \text{i-te Koordinate von } \chi \\ \chi & \leftrightarrow & (x_1, x_2) \in \mathbb{R} & \end{array}$$

  3. Verallgemeinerung: $n \in \mathbb{N}$

$$\chi \in A^n \leftrightarrow (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Definition einer Addition auf $\mathbb{R}^n$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : x + y = (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

- „komponentenweise“ Addition

- Es gilt:

  1. Assoziativität:

  $$\begin{aligned}(x+y)+z &= (x_1+y_1,...,x_n+y_n)+(z_1,..,z_n) = ((x_1+y_1)+z_1,...,(x_n+y_n)+z_n) \\ &= (x_1+(y_1+z_1),...,x_n+(y_n+z_n)) = x+(y+z)\end{aligned}$$

  2. Existenz des Nullelements: Sei $o = (0,...,0)$, dann $o + x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, d.h. o ist Nullelement.
  3. Existenz des Inversen: Sei $-x = (-x_1,...,-x_n)$ dann $x + (-x) = o$, d.h. (-x) ist das entgegengesetzte Element von x.
  4. Kommutativität:

  $$x+y = (x_1+y_1,...,x_n+y_n) = (y_1+x_1,...,y_n+x_n) = y+x$$

- Damit ist $(\mathbb{R}^n, +)$ eine abelsche Gruppe.
- Interpretation in A^2:

$$\begin{aligned}\chi \in A^2 &\leftrightarrow x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ Y \in A^2 &\leftrightarrow y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \\ \longrightarrow x+y &= (x_1+y_1, x_2+y_2)\end{aligned}$$

  - Nach Konstruktion gilt:
    1. $\diamond OX_1XX_2 \cong \diamond YH_1SH_2$, also $OY \parallel XS$ und $\overline{OY} = \overline{XS}$
    2. weiterhin $OX \parallel YS$ und $\overline{OX} = \overline{YS}$
  - Geometrische Konfiguration kann deutlicher gemacht werden durch die Verwendung von Pfeilen mit Anfangspunkt O und Endpunkt X.
  - $V_O^n = \{\overrightarrow{OX} | X \in A^n\}$: Menge der Ortsvektoren bzgl. des Punktes O. $\overrightarrow{OX}$ heißt Ortsvektor von X.
  - Parallelogrammregel auf V_O^2: Ergänzt man das von den Ortsvektoren $\overrightarrow{OX}$ und $\overrightarrow{OY}$ aufgespannte Dreieck zu einem Parallelogramm, so ist der von O ausgehende Diagonalpfeil der Ortsvektor des Punktes S, welcher der Summe $s = x + y$ zugeordnet ist.

Definition einer Addition auf V_O^2:

- $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$, wobei S nach Parallelogrammregel aus $\overrightarrow{OX}$ und $\overrightarrow{OY}$ zu konstruieren ist
- $(V_O^2, +)$ ist eine abelsche Gruppe

Definition einer Multiplikation auf $\mathbb{R}^n$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1,...,x_n) := (\lambda x_1,...,\lambda x_n)$$

- Es gilt $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

  1. $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$
  2. $(\lambda + \mu) \cdot x = (\lambda \cdot x) + (\mu \cdot x) = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

3. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
4. $1 \cdot x = x$

- Wegen $(-1) \cdot x = -x$ darf man Subtraktion einführen:

$$x - y := x + (-y)$$

- Interpretation in A^2:

$$\lambda \cdot x = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2) \leftrightarrow Y \in A^2$$

1. Fall $\lambda > 0$:
   - $\triangle OX_1X \sim \triangle OY_1Y$, denn:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\overline{XX_1}}{\overline{OX_1}} = \frac{\lambda x_2}{\lambda x_1} = \frac{\overline{YY_1}}{\overline{OY_1}}$$

   - Y liegt auf der Geraden OX mit $\overline{OY} = \lambda \cdot \overline{OX}$
2. Fall $\lambda < 0$: Y* liegt auf der Geraden OX

Definition Multiplikation mit einem Skalar auf V_O^2:

- Zu $\overrightarrow{OX}$ und λ sei das Vielfache $\lambda \cdot \overrightarrow{OX} := \overrightarrow{OY}$ jener Ortsvektor, für dessen Endpunkt Y gilt:
  1. Wenn $\lambda = 0$, dann $Y = 0$.
  2. Wenn $\lambda \neq 0$, dann liege Y auf der Geraden $\overrightarrow{OX}$, wobei im Fall $\lambda > 0$ X und Y auf derselben Seite von O und im Fall von $\lambda < 0$ X und Y auf verschiedenen Seiten von O liegen. In jedem Fall gilt: $\overline{OY} = |\lambda| \cdot \overline{OX}$.

Vektorraumdefinition:

- Sei K ein Körper. Ein K-Vektorraum (Vektorraum über K) ist ein Tripel (V,+,·) bestehend aus einer Menge V, einer Verknüpfung $+ : V \times V \to V$ (Addition) und einer Verknüpfung $\cdot : K \times V \to V$ (Skalarmultiplikation), sodass gilt:
  - (V1) (V,+) sei eine abelsche Gruppe
  - (V2) $\forall v, w \in V \, \forall \lambda, \mu \in K$:
    1. $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$
    2. $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v) = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
    3. $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
    4. $1 \cdot v = v$
- Bemerkung:
  - Das neutrale Element in der Gruppe (V,+) heißt Nullvektor.
  - Das inverse Element von $(V, \cdot)$ heißt Gegenvektor.

Satz 1:

1. Mit der definierten Addition und Skalarmultiplikation in $\mathbb{R}^n$ ist die Menge $\mathbb{R}^n$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

2. Mit der durch die Parallelogrammregel definierte Addition und der Skalarmultiplikation ist V_0^2 ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Bemerkung: Addition und Skalarmultiplikation kann direkt auf $V_O^3 := \{\overrightarrow{OX} | X, O \in \mathbb{R}^3\}$ übertragen werden. (V1) und (V2) können raumgeometrisch bestätigt werden.

2.1.2 Vektorraum aus freien Vektoren

- Anwendung zur Beschreibung gerichteter Größen in Physik und Technik, z.B. $\vec{v}, \vec{F}$

- Geordnetes Punktepaar (Pfeil) $(A, B) = \overrightarrow{AB} \in A^n$ hat Anfangspunkt A und Endpunkt B.

- $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ heißen parallelgleich ($\overrightarrow{AB} \sharp \overrightarrow{CD}$), falls es eine Parallelverschiebung τ gibt, sodass $\tau(A) = C$ und $\tau(B) = D$.

  - Es gilt:
    1. $\overrightarrow{AB} \sharp \overrightarrow{AB}$ (reflexiv)
    2. $\overrightarrow{AB} \sharp \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sharp \overrightarrow{AB}$ (symmetrisch)
    3. $\overrightarrow{AB} \sharp \overrightarrow{CD} \vee \overrightarrow{CD} \sharp \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sharp \overrightarrow{EF}$ (transitiv)
  - Wegen 1-3 ist $\sharp$ eine Äquivalenzrelation.
  - Zerlegung der Pfeilmenge in Äquivalenzklassen:

    $$[\overrightarrow{OV}] = \{\overrightarrow{AB} | \overrightarrow{AB} \sharp \overrightarrow{OV}; A, B, O, V \in A^n\}$$

    Bezeichnung: $\vec{v} = [\overrightarrow{OV}]$ (freier Vektor)

    $V^n := \{\vec{v} | \vec{v} = [\overrightarrow{OV}]; O, V \in A^n, O fest\}$ Menge der freien Vektoren

- Addition auf V^n:

  $$\vec{v} + \vec{u} := [\overrightarrow{OV} + \overrightarrow{OU}]$$

- Skalarmultiplikation auf V^n:

  $$\lambda \cdot \vec{v} := [\lambda \cdot \overrightarrow{OV}]$$

Satz 2:

- Die Addition und Skalarmultiplikation von freien Vektoren auf Addition und Skalarmultiplikation von Ortsvektoren erklärt. Dann ist V^n ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

- Beweis: Nachweis von (V1) und (V2) auf V^n durch Ausnutzung der Gültigkeit von (V1) und (V2) auf V_O^n

2.1.3 Geraden und Ebenen

- Darstellung von Geraden in 3 Modellen:
  1. A^n: zeichnerisch
  2. V^n: mit Hilfe von Ortsvektoren
  $$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$
  mit $\lambda \in \mathbb{R}$
  3. R^n: nach Wahl eines Koordinatensystems
  $$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} &\leftrightarrow x \in \mathbb{R}^n \\ \overrightarrow{OA} &\leftrightarrow a \in \mathbb{R}^n \\ \overrightarrow{OB} &\leftrightarrow b \in \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow x &= a + \lambda \cdot (b - a) \end{aligned}$$
  mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $a \neq b$
- In allen Modellen ist $A \neq B$ vorauszusetzen.
- Eine Teilmenge $g \subset \mathbb{R}^n$ heißt Gerade, wenn $a, v \in \mathbb{R}^n$ existieren mit $v \neq 0$:
  $$g = \{x \in \mathbb{R}^n | x = a + \lambda \cdot v, \lambda \in \mathbb{R}\}$$
  v... Richtungsvektor   a...Aufpunkt von g
- Parameterdarstellung (Kurzschreibweise):
  $$g : x = a + \lambda \cdot v, \lambda \in \mathbb{R}$$

Satz 3:

- Zwei verschiedene Punkte a, b $\in \mathbb{R}^n$ bestimmen genau eine Gerade g, die diese Punkte enthält, die sogenannte Verbindungsgerade dieser Punkte, nämlich:
  $$g : x = a + \lambda(b - a), \lambda \in \mathbb{R}$$
- Beweis: Mit $v := b - a$ ist $v \neq 0$ (da $a \neq b$) und damit:
  $$g : x = a + \lambda \cdot v$$
  eine Parameterdarstellung von g. Für $\lambda = 0$ folgt x=a, also $a \in g$. Für $\lambda = 1$ folgt $x = a + v = a + (b - a) = b$, also $b \in g$.
- Bemerkung: Anschauliche Sprechweise für $a \in g$ bei Interpretation in A^n: „Punkt A liegt in/auf der Geraden g.“ Oder: „Gerade g geht durch Punkt A“.
- Folgerung: Die Verbindungsgerade g verschiedener Punkte a und b hat auch die Parameterdarstellung
  $$g : x = \varrho \cdot a + \sigma \cdot b$$

mit $\varrho + \sigma = 1$ für $\varrho, \sigma \in \mathbb{R}$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2)

$$x = a + \lambda \cdot (b - a) = (1 - \lambda) \cdot a + \lambda \cdot b = \varrho \cdot a + \sigma \cdot b$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

$$x = \varrho \cdot a + \sigma \cdot b = (1 - \sigma) \cdot a + \sigma \cdot b = a + \sigma \cdot (b - a)$$

Teilmengen von g durch Einschränkung von λ:

- $\lambda = 0 : x = a$
- $\lambda = 1 : x = a + (b - a) = b$
- $0 \leq \lambda \leq 1$: Strecke von A nach B
- $1 \leq \lambda$: Halbgerade
- λ heißt affine Koordinate von X bzgl. des Koordinatensystems a mit a als Nullpunkt und b als Einheitspunkt

Teilungsverhältnis:

Seien $a, b, x \in \mathbb{R}^n$ mit $a \neq b \neq x$ drei Punkte einer Geraden g. Dann heiße $\tau \in \mathbb{R}$ mit

$$(x - a) = \tau \cdot (x - b)$$

das Teilungsverhältnis von $a, b, x \in g$. Kurz: τ=TV(a,b,X).

Interpretation in A^2:

- $(x - a) = \tau(x - b)$ mit $a, b, x \in \mathbb{R}^2 \leftrightarrow \overrightarrow{AX} = \tau\overrightarrow{BX}$
- Verhältnis der Streckenlängen $\overline{AX} : \overline{BX}$
- für $\tau > 0$: $\overrightarrow{AX}$ und $\overrightarrow{BX}$ gleichgerichtet, d.h. X liegt außerhalb der Strecke $\overline{AB}$
- für $\tau < 0$: $\overrightarrow{AX}$ und $\overrightarrow{BX}$ entgegengerichtet, d.h. X liegt innerhalb der Strecke $\overline{AB}$
- für $\tau = -1$: $\overline{AX} = \overline{BX}$ und X innerhalb der Strecke AB, also X Mittelpunkt der Strecke AB

$$x = \frac{a + b}{2}$$

Satz 4:

Der Mittelpunkt der Strecke AB ist $X : m = 0,5 \cdot (a + b)$ wobei A:a und B:b beschrieben wird bzgl. eines Koordinatensystems für $\mathbb{R}^n$.

Satz 5:

In einem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalstrecken gegenseitig.

Beweis:

- Mittelpunkt von DB: $M : m = \frac{d+b}{2}$
- Mittelpunkt von AC: $M' : m' = \frac{a+c}{2}$
- Nach Parallelogrammregel gilt:

$$c = (b-a) + (d-a) + a = b + d - a$$

Also:

$$m' = \frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2} = m$$

Parallelität:

Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ $(v, w \neq 0)$ bzw. zwei Geraden $g : x + \lambda \cdot v$ und $h : x = p + \lambda \cdot w$ heißen parallel ($g \parallel h$), wenn $y \in \mathbb{R}$ existiert mit $w = \mu \cdot v$ $(\mu \neq 0)$.

Satz 6:

1. Sei $g : x = a + \lambda \cdot v$ und $a' \in g$, dann ist $g : x = a' + \lambda \cdot v$ ebenfalls eine Parameterdarstellung von g.
2. Seien $g : x = a + \lambda \cdot v$ und $g' : x = a' + \lambda \cdot v'$ Geraden.

$$g = g' \Leftrightarrow (g \cap g' \neq \emptyset \wedge g \parallel g')$$

Beweis:

1. Es gilt:

$$a' \in g \Rightarrow \exists \lambda' \in \mathbb{R} : a' = a + \lambda' \cdot v \Rightarrow a = a' - \lambda' \cdot v$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} x \in g \Rightarrow x &= a + \lambda'' \cdot v \qquad (\lambda'' \in \mathbb{R}) \\ &= a' - \lambda' \cdot v + \lambda'' \cdot v \\ &= a' + (\lambda'' - \lambda') \cdot v \\ &= a' + \lambda \cdot v \end{aligned}$$

Äquivalent andere Beweisrichtung.

2. (a) Wenn $g = g' \Rightarrow g \cap g' \neq \emptyset$, denn:

$$a' \in g' = g \Rightarrow \exists \lambda' \in \mathbb{R} : a' = a + \lambda' \cdot v$$

... und $a' + v' \in g' = g$. Also:

$$\begin{aligned} \exists \lambda'' \in \mathbb{R} : a' + v' &= a + \lambda'' \cdot v \\ a' + v' - a' &= a + \lambda'' \cdot v - a' \\ v' &= a + \lambda'' \cdot v - a - \lambda' \cdot v \\ &= (\lambda'' - \lambda') \cdot v \end{aligned}$$

Es gilt $\lambda'' - \lambda' \neq 0$, denn sonst $v' = 0$. Also $g \parallel g'$.

(b) Sei $s \in g' \cap g \neq \emptyset$. Dann folgt aus 1. und der Voraussetzung $g \parallel g'$:

$$g : x = s + \lambda \cdot v \qquad g' : x = s + \lambda \cdot v' \qquad \text{mit}\, v' = \mu \cdot v$$

Entsprechend gilt für die Parameterdarstellungen:

$$\begin{aligned} x \in g \Rightarrow x = s + \lambda \cdot v &= s + \frac{\lambda}{\mu} \cdot v' \Rightarrow x \in g' \\ x \in g' \Rightarrow x = s + \lambda \cdot v' &= s + \lambda \cdot \mu \cdot v \Rightarrow x' \in g \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Jeder Punkt einer Geraden kann Aufpunkt der Geraden sein.
- Gleiche Geraden haben parallele Richtungsvektoren

Lineare Abhängigkeit:

- Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ heißen linear abhängig

  $$:\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (\lambda, \mu) \neq (0,0) \wedge \lambda \cdot v + \mu \cdot w = o$$

  v,w gestatten eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors.
- Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig, wenn sie nur die triviale Linearkombination des Nullvektors gestatten:

  $$\lambda \cdot v + \mu \cdot w = o \Rightarrow \lambda = \mu = 0$$

Ebene:

Eine Teilmenge $\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine Ebene

$$:\Leftrightarrow \varepsilon = \{x | x = a + \lambda \cdot v + \mu \cdot w; \lambda, \mu \in \mathbb{R}; v, w \text{linear unabhängig}\}$$

Teilmengen von ε durch Einschränkung der Parameter:

- $(\lambda, \mu) = (0,0) : A$ (Punkt)
- $(\lambda, \mu) = (1,0) : x = a + v$ (Punkt)
- $(\lambda, \mu) = (0,1) : x = a + w$ (Punkt)
- $(\lambda, \mu) = (\lambda, 0) : x = a + \lambda \cdot v$ (Gerade)
-
- $(\lambda, \mu) = (0, \mu) : x = a + \mu \cdot w$ (Gerade)
- $0 \leq \lambda \leq 1, 0 \leq \mu \leq 1 : x = a + \lambda \cdot v + \mu \cdot w$ (Parallelogramm)

Bemerkung: $\varepsilon : x = a + \lambda \cdot v + \mu \cdot w$ und $a' \in \varepsilon$, dann ist auch $x = a' + \lambda \cdot v + \mu \cdot w$ eine Parameterdarstellung von ε. $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

Satz 7:

- Drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkte $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ bestimmen genau eine Ebene ε, die diese Punkte enthält, nämlich:

$$\varepsilon : x = a + \lambda \cdot (b - a) + \mu \cdot (c - a) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

- Beweis:

$$\begin{aligned} \lambda = 0, \mu = 0 &\quad : \quad x = a \longrightarrow a \in \varepsilon \\ \lambda = 1, \mu = 0 &\quad : \quad x = b \longrightarrow b \in \varepsilon \\ \lambda = 0, \mu = 1 &\quad : \quad x = c \longrightarrow c \in \varepsilon \end{aligned}$$

  - Es liegt mit $v := b - a$ und $w := c - a$ die Form einer Parameterdarstellung vor. v,w sind keine Nullvektoren.
  - Zu zeigen: v,w sind linear unabhängig. Äquivalent zu zeigen: v,w linear abhängig $\Leftrightarrow a, b, c$ liegen auf einer Geraden:
    * Seien v,w linear abhängig $\Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (\lambda, \mu) \neq (0, 0) \wedge \lambda \cdot v + \mu \cdot w = o$

$$\lambda \cdot v + \mu \cdot w = \lambda \cdot (b - a) + \mu \cdot (c - a) = o$$

    * Ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $\mu \neq 0$

$$\frac{\lambda}{\mu} \cdot (b - a) + (c - a) = o \Rightarrow c = a - \frac{\lambda}{\mu} \cdot (b - a)$$

    * Wenn $\lambda = 0$, dann c=a $\Rightarrow a, b, c$ liegen auf einer Geraden.
    * Wenn $\lambda \neq 0$, dann $c = a + \lambda' \cdot (b - a) \Rightarrow$ c liegt auf Geraden durch a,b
  - Also sind v,w linear unabhängig.

2.2 Lineare Abhängigkeit, Basis und Dimension

2.2.1 Lineare Abhängigkeit

- Sei $V = (V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Sind $v_1, ..., v_m \in V$ so heißt jeder Vektor $v = \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_m \cdot v_m$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_m \in K$ eine Linearkombination der Vektoren $v_1, ..., v_m$. Offensichtlich $v \in V$.

- m Vektoren $v_1, ..., v_m$ heißen linear unabhängig $:\Leftrightarrow$ Sind $\lambda_1, ..., \lambda_m \in K$ und ist $(*) \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_m \cdot v_m = o \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$

- * heißt: Der Nullvektor ist eine Linearkombination der Vektoren $v_1, ..., v_m$. Diese heißt trivial, wenn $\lambda_1 = ... = \lambda_m = 0$ gilt. Ansonsten nichttrivial.

- Folglich: m Vektoren $v_1, ..., v_m$ heißen linear unabhängig, wenn sie nur die triviale Linearkombination des Nullvektors gestatten.

- m Vektoren $v_1, ..., v_m$ heißen linear abhängig, wenn sie nicht linear unabhängig sind. D.h. sind $\lambda_1, ..., \lambda_m \in K$, so gilt * mit $(\lambda_1, ..., \lambda_m) \neq (0, ..., 0)$. Sie gestatten eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors.

Satz 1:

- $v_1, ..., v_m \in V$ seien linear unabhängig $\Rightarrow v_1 \neq 0, ..., v_m \neq o$
- Beweis: indirekt: $v_1, ...v_m$ linear unabhängig und $v_1 = o$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_m \cdot v_m &= o \\ 1 \cdot v_1 + \lambda_m \cdot v_m &= o \end{aligned}$$

  $v_1, ..., v_m$ gestatten also eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors. Widerspruch!

- Folgerung: Ein einzelner Vektor $v \neq 0$ ist linear unabhängig.

Lineare Hülle:

- $v_1, ..., v_m \in V$:

$$\begin{aligned} Lin(v_1, ..., v_m) &= \{v | v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i ; \lambda_i \in K\} \\ &= K \cdot v_1 + ... + K \cdot v_m \end{aligned}$$

  heißt lineare Hülle der Vektoren $v_1, ..., v_m$.

- Teilmenge $M \subseteq V, M \neq \emptyset$

$$LinM = \{v | v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i ; \lambda_i \in K; v_i \in M, m \in \mathbb{N}\}$$

  heißt lineare Hülle von M. Es sei $Lin\,\emptyset = \emptyset$.

- Ein Vektor $v \in V$ heißt linear abhängig von $v_1, ..., v_m \in V$ bzw. von einer Teilmenge $M \subseteq V$:

$$\Leftrightarrow v \in Lin(v_1, ..., v_m) \,\text{bzw.}\, v \in LinM$$

- Bezeichnung: $Span(v_1, ..., v_m) =< v_1, ..., v_m >= Lin(v_1, ..., v_m)$
- Beispiele:
  1. $V_0^3, 0 \neq A \neq B \neq 0$:
     - $Lin(\overrightarrow{OA}) = \{\overrightarrow{OX} | \overrightarrow{OX} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}; \lambda \in \mathbb{R}\}$ (Menge der Ortsvektoren zu Punkten X auf der Gerade OA)
     - $Lin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \{\overrightarrow{OX} | \overrightarrow{OX} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{OA} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{OB}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ (Menge der Ortsvektoren zu Punkten X in der Ebene OAB)
  2. $\mathbb{R}^n$, $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, .., 0)$ (i=1,...,n)

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot e_1 + ... + \lambda_n \cdot e_n &= o \\ \lambda_1 \cdot (1, 0, ..., 0) + \lambda_2 \cdot (0, 1, ..., 0) + ... + \lambda_n \cdot (0, ..., 0, 1) &= o \\ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) &= o \\ \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n &= 0 \end{aligned}$$

– $e_1, ..., e_n$ sind linear unabhängig.

$$\begin{aligned} Lin(e_1, ..., e_n) &= \{x|x = x_1 \cdot e_1 + ... + x_n \cdot e_n; x_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x|x = (x_1, 0, ..., 0) + ... + (0, ..., 0, x_n); x_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x|x = (x_1, x_2, ..., x_n)\} \\ &= \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

– Jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ kann mit $\{e_1, ..., e_n\}$ als Linearkombination dargestellt werden. $\{e_1, ..., e_n\}$ heißt Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

3. Die Menge der Abbildungen $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Addition

$$(f, g) \mapsto f + g \,\text{mit}\, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

und Skalarmultiplikation

$$(\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f \,\text{mit}\, (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \dot{f}(x) \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

– Beweis: Wegen Bsp. 3 in 1.4 ist Abb$(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine abelsche Gruppe, also (V1) erfüllt. (V2) durch Nachrechnen zu bestätigen.
– Anwendung: Die reellen Polynome

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 2x^2 + 3x - 4 \\ p_2(x) &= x^2 + 1 \\ p_3(x) &= 5 \end{aligned}$$

sind aus $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(a) Beh.: p_1, p_2, p_3 sind linear unabhängig.

Beweis:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 + \lambda_3 \cdot p_3 &= 0 \qquad \lambda_i \in \mathbb{R} \\ \lambda_1(2x^2 + 3x - 4) + \lambda_2 \cdot (x^2 + 1) + \lambda_3 \cdot 5 &= 0 \\ x^2(2\lambda_1 + \lambda_2) + x \cdot 3\lambda_1 + (-4\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3) &= 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad 3\lambda_1 = 0 \qquad -4\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

p_1, p_2, p_3 sind linear unabhängig. (Es existiert nur die triviale Linearkombination des Nullpolynoms.)

(b) Lineare Hülle bildet Menge der Polynome vom Höchstgrad 2 $\subset Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} Lin\,(p_1, p_2, p_3) &= \{p|p = \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 + \lambda_3 \cdot p_3\} \\ &= \{p|p = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0; a_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$(Lin(p_1, p_2, p_3), +, \cdot)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, der in dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ enthalten ist.

2.2.2 Untervektorräume

- $(V, +, \cdot)$ sei ein K-Vektorraum. Teilmenge $W \subseteq V$ heißt Untervektorraum (Teilraum) von V, falls:
  - (UV1) $W \neq \emptyset$
  - (UV2) $\forall v, w \in W : v + w \in W$ (W ist abgeschlossen bzgl. der Addition.)
  - (UV3) $\forall \lambda \in K\, \forall v \in W : \lambda \cdot v \in W$ (W ist abgeschlossen bzgl. der Skalarmultiplikation)
- Bemerkung:
  - Addition und Skalarmultiplikation aus V werden auf W eingeschränkt.
  - Ein Untervektorraum ist ein (vollständiger) Vektorraum.
- Beispiele:
  1. In jedem K-Vektorraum sind $\{0\}$ und V triviale Untervektorräume. $\{0\}$ heißt Nullvektorraum.
  2. Geraden und Ebenen des $\mathbb{R}^n$, die den Nullpunkt enthalten, sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$.
  3. Die Menge $C(\mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
  4. Die Menge aller reellen Polynome vom Höchstgrad n ist ein Untervektorraum des $C(\mathbb{R})$.

Satz 1:

- $(V, +, \cdot)$ sei ein K-Vektorraum, $M \subseteq V$.
  1. Lin M ist ein Untervektorraum von V und $M \subseteq$ Lin M.
  2. Wenn U ein Untervektorraum von V mit $M \subseteq U$, dann Lin M $\subseteq U$. (Lin M ist kleinster Untervektorraum, der M enthält.)
  3. Wenn M ein Untervektorraum von V, dann Lin M = M.
  4. Wenn $M \subseteq U \subseteq V$, dann Lin M$\subseteq$ Lin U
- Beweis:
  1. (a) $M = \emptyset$. Dann $Lin\, M = Lin\, \emptyset = \{0\}$ ist Untervektorraum.

     (b) $M \neq \emptyset$. Dann existiert ein $m \in M$. Wegen $1 \cdot m = m : m \in Lin\, M$ (UV1). Also $M \subseteq Lin\, M$.

     $\forall u, v \in M \Rightarrow u, v \in Lin\, M$. Also

     $$u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot u_i \qquad v = \sum_{i=1}^{s} \mu_i \cdot v_i$$

     mit $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$, $u_i, v_i \in M$, $r, s \in \mathbb{N}$. Somit (UV2):

     $$u + v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot u_i + \sum_{i=1}^{s} \mu_i \cdot v_i \in Lin\, M$$

Außerdem (UV3):

$$\forall \lambda \in K \, \forall v \in M \lambda \cdot v = \lambda \sum_{i=1}^{s} \mu_i \cdot v_i \in Lin\, M \qquad \backslash\backslash$$

2. U sei Untervektorraum von V, $M \subseteq U$. $\forall v \in Lin\, M : v = \sum \lambda_i \cdot v_i$, weil für alle i gilt $v_i \in U$ folgt $v \in U$. Also $Lin\, M \subseteq U$. Nach a) $M \subseteq Lin\, M \Rightarrow M \subseteq Lin\, M \subseteq U$. \\
3. $M \subseteq Lin\, M$ nach a). Wenn M ein Untervektorraum, dann $Lin\, M \subseteq M$. Also Lin M = M.
4. $x \in Lin\, M$. Es gilt:

$$x = \sum \lambda_i \cdot v_i \qquad (v_i \in M)$$

und

$$x = \sum \lambda_i \cdot v_i \qquad (v_i \in U)$$

Also $x \in Lin\, U$. \\

- Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$.

$$\begin{aligned} M &= \{e_1, e_2\} \\ Lin\, M &= \{x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2, 0) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

ist Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

- Bemerkungen (s. Übung):
  - Durchschnitt zweier Untervektorräume von V ist wieder ein Untervektorraum von V.
  - Vereinigung zweier Untervektorräume von V ist i.A. kein Untervektorraum von V.

2.2.3 Basis

- Teilmenge $M \subseteq V$ heißt linear unabhängig, wenn $M = \emptyset$ oder je endlich viele verschiedene ihrer Vektoren linear unabhängig sind, d.h. $\forall m \in \mathbb{N}$: $v_1, ..., v_m \in M$ mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$: $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.
- Wenn $M \subseteq V$ nicht linear unabhängig, dann heißt M linear abhängig.
- Bemerkungen:
  - Lineare (Un)Abhängigkeit jetzt für beliebige Mengen erklärt.
  - $0 \in M \subseteq V \Rightarrow$ M linear abhängig.
  - M linear unabhängig $\Leftrightarrow$ Alle Linearkombinationen des Nullvektors o durch paarweise verschiedene Vektoren aus M sind trivial.

Lemma 1:

$M \subseteq V$ Teilmenge. M linear unabhängig $\Leftrightarrow \forall u \in M : u \notin Lin\,(M \backslash \{u\})$.

Beweis:

1. „⇒“

   - Wir zeigen $\exists u \in M : u \in Lin\,(M \backslash \{u\}) \Rightarrow$ M linear abhängig.
   - Angenommen $u \in M \cap Lin\,(M \backslash \{u\})$. Dann $\exists u_1, ..., u_m \in M \backslash \{u\}$: $u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot u_i$. (*)
   - Falls $u_i = u_j$ für $1 \leq i, j \leq m$, dann $\lambda_j \cdot u_j$ streichen, restliche Summanden neu nummerieren.
   - Wenn alle paarweise verschiedenen Vektoren in * ein einziges Mal aufgeführt sind, gilt $u_i \neq u_j$ für $i \neq j$.

   $$0 = (-1) \cdot u + \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot \lambda_i \qquad \text{nach } *$$

   D.h. es existiert eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors. Also M linear abhängig. \\

2. „⇐“

   - Wir zeigen: M linear abhängig $\Rightarrow \exists u \in M : u \in Lin\,(M \backslash \{u\})$.
   - Angenommen $o = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot u_i$ mit paarweise verschiedenen u_i und min. 1 $\lambda_i \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $\lambda_1 \neq 0$. Dann

   $$u_1 = \sum_{i=2}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \cdot u_i$$

   Also $u_1 \in Lin\,(M \backslash \{u\})$.

Lemma 2:

$M \subseteq V$, M linear unabhängig und $x \in V \backslash Lin\,M \Rightarrow M \cup \{x\}$ linear unabhängig.

Beweis:

- Es gilt:

  $$0 = \mu \cdot x + \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot \lambda_i$$

  mit paarweise verschiedenen u_i, $\lambda_i, \mu \in K$.

- Zu zeigen: $\lambda_i = \mu = 0$ für $1 \leq i \leq m$

  1. $\mu = 0$: Weil M linear unabhängig ist, folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$
  2. $\mu \neq 0$: Dann gilt:

     $$x = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\mu} \cdot u_i \qquad \in Lin\,M$$

     Widerspruch zu der Voraussetzung $x \notin Lin\,M$!

Erzeugendensystem & Basis:

- $M \subseteq V$ heißt Erzeugendensystem von V

$$:\Leftrightarrow Lin\, M = V$$

- $B \subseteq V$ heißt Basis $:\Leftrightarrow$ B ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.
- V heißt endlich erzeugt $:\Leftrightarrow$ $\exists$ endliche Teilmenge $M \subseteq V$ mit $Lin\, M = V$.
- Beispiele:
  1. Vgl. $B = \{e_1, ..., e_n\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^n$.
  2. Vgl. $B = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ ist Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums der Polynome vom Höchstgrad 2.

Satz 1: (Charakterisierung einer Basis)

Für eine Menge $B \subseteq V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. B ist eine Basis.
2. B ist ein minimales Erzeugendensystem von V.
3. B ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V

Beweis:

1. $1 \Rightarrow 2$
   - B ist eine Basis, also B linear unabhängig und $Lin\, B = V$.
   - Annahme: B' wäre Erzeugendensystem und $B' \subset B$. Weiter $u \in B \backslash B'$, dann $u \in B \wedge u \notin B'$. Daraus folgt:

   $$B' \backslash \{u\} = B' \subseteq B \backslash \{u\} \Rightarrow Lin\, B' \subseteq Lin\, (B \backslash \{u\})$$

   - Da b linear unabhängig ist, gilt außerdem $\forall u \in B : u \notin Lin\, (B \backslash \{u\})$, also $u \notin Lin\, B'$.
   - Widerspruch dazu, dass B' ein Erzeugendensystem ist.
2. $2 \Rightarrow 1$
   - B sei ein minimales Erzeugendensystem, d.h.
     (a) $Lin\, B = V$
     (b) $B' \subseteq B$ und $Lin\, B' = V \Rightarrow B = B'$
   - Noch zu zeigen: B linear unabhängig.
   - Angenommen B linear abhängig. Dann $\exists u \in B : u \in Lin\, (B \backslash \{u\})$ (Lemma 1).
   - Sei $B' = B \backslash \{u\}$, also $B' \subset B$. Dann $Lin\, B' \subseteq Lin\, B = V$.
   - Wir zeigen, dass auch $Lin\, B' \supset V$ gilt, denn dann Widerspruch zu 2. Also zu zeigen: $w \in V \Rightarrow w \in Lin\, B'$.

- Sei $w \in V$, dann $w \in Lin\, B$, d.h.

$$w = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot \lambda_i$$

mit $\lambda_i \in K, b_i \in B, m \in \mathbb{N}$.

- Falls $\forall i : b_i \neq u$, dann $\forall i : b_i \in B' = B \backslash \{u\}$ und $w \in Lin\, B'$.
- Falls $\exists j : b_j = u$, dann

$$w = \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i \cdot b_i + \lambda_j \cdot u + \sum_{i=j+1}^{m} \lambda_i \cdot b_i$$

Also $w \in Lin\, B'$.

- Also $Lin\, B' = V$, $B \neq B'$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

3. $1 \Rightarrow 3$

   - Zu zeigen: B maximal linear unabhängige Teilmenge von V:
     (a) B linear unabhängig.
     (b) $B'' \supsetneq B$ und B" linear unabhängig $\Rightarrow B'' = B$.
   - Sei $B'' \supsetneq B$ und B" linear unabhängig. Dann $Lin\, B'' \supsetneq Lin\, B = V$, also $Lin\, B'' = V$.
   - B" ist also Basis von V und damit nach 2. ein minimales Erzeugendensystem. Also $B'' = B$.

4. $3 \Rightarrow 1$

   - Zu zeigen: B ist Basis.
   - Sei B ein maximale linear unabhängige Teilmenge von V. Dann ist B ein Erzeugendensystem, denn angenommen $Lin\, B \neq V$:
     - Wähle $x \in V \backslash Lin\, B$. Nach Lemma 2 ist $B \cup \{x\}$ linear unabhängig.
     - Es sei $B'' = B \cup \{x\} \supset B$ und B" linear unabhängig (Lemma 2).
     - Widerspruch zur Maximalität von B
   - Also Lin B = V

Satz 2: (Darstellungssatz)

Jeder Vektor ist in eindeutiger Weise als Linearkombination von endlich vielen Vektoren einer Basis darstellbar.

Beweis:

- Sei B ein Erzeugendensystem.

$$\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i$$

mit $m \in \mathbb{N}, v_i \in B, \lambda_i \in K$.

- Angenommen es gibt $\lambda' \in K$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i \cdot v_i$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n \leq m$. Für $j \in \{1, ..., n\}$ gelte $\lambda'_j \neq \lambda_i$.

$$0 = v - v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda'_i) \cdot v_i + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i \cdot v_i$$

Es gilt $(\lambda_i - \lambda'_i) \neq 0$ für $i = j$.

- Es gibt also eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors für $v_1, ..., v_m$ im Widerspruch zu deren linearen Unabhängigkeit.

Satz 2: (Existenz einer Basis)

Ist V endlich erzeugt, so besitzt V eine Basis.

Beweis:

- $\exists$ endliche Teilmenge $B_m := \{v_1, ..., v_m\}$ und $Lin\, B_m = V$.
- 1) Falls B_m linear unabhängig ist, ist B_m eine Basis.
- 2) Falls B_m linear abhängig, dann $\exists u \in B_m : u \in Lin\,(B \backslash \{u\})$ nach Lemma 1. Dann setze $B_{m-1} = B \backslash \{u\}$, $u \in Lin\, B_{m-1}$.
- Wir zeigen: $Lin\, B_{m-1} \supseteq V$. Es sei $v \in V$. Dann

$$v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i$$

mit $v_i \in B_m, \lambda_i \in K, m \in \mathbb{N}$.

- Falls $u \neq v_i$ für alle i: $v_i \in B_{m-1}$, also $v \in Lin\, B_{m-1}$.
- Falls $u = v_j$ für $j \in \{1, 2, ..., n\}$:

$$v = \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i \cdot v_i + \lambda_j \cdot u + \sum_{j+1}^{m} \lambda_i \cdot v_i$$

Also $v \in Lin\, B_{m-1}$.

- Insgesamt: $v \in Lin\, B_{m-1}$. Also $V \subseteq Lin\, B_{m-1}$, $V = Lin\, B_{m-1}$.
- Wenn B_{m-1} linear unabhängig, dann Basis.
- Falls B_{m-1} linear abhängig, dann Wiederholung von Schritt 2 usw. Streiche r-mal bis B_{m-r} linear unabhängig ist $(0 \leq r \leq m - 1)$.
- Verfahren endet nach maximal m-1 Schritten mit
  1. $Lin\, B_{m-r} = V$ und B_{m-r} linear unabhängig

2. ...oder $B_1 = \{u\}$ ist linear abhängig, also $u = 0$. Dann $Lin\,\{0\} = V$. \\

Bemerkung:

1. $V = \{0\}$ hat keine Basis. Abhilfe: Definition: $V = \{0\}$ habe die Basis $\emptyset$ (denn $Lin\,\emptyset = \{0\}$).
2. Wieviele Elemente hat eine Basis?

Basislemma:

Existiert eine endliche Basis von V, dann ist jede Basis endlich.

Beweis:

- Sei B eine endliche Basis. Wäre B' als weitere Basis unendlich, dann $B' \supset B$. Widerspruch zur Maximalität einer Basis. \\

Austauschlemma:

- Sei $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V und $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$ für $k \in \{1, 2, ..., n\}$, dann ist $\{v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n\}$ wieder eine Basis von V.
- Beweis:
  - O.B.d.A. sei die Nummerierung so eingerichtet, dass k=1 gilt, also $\lambda_1 \neq 0$.
  - Zu zeigen: $\{w, v_2, ..., v_n\}$ ist Basis von V.

$$v_1 = \frac{w}{\lambda_1} + \sum_{i=2}^{n} -\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \cdot v_i$$

  - Nach dem Darstellungssatz gilt: $\forall v \in V$:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot v_i \\ &= \mu_1 \cdot v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i \cdot v_i \\ &= \mu_1 (\frac{w}{\lambda_1} + \sum_{i=2}^{n} -\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \cdot v_i) + \sum_{i=2}^{n} \mu_i \cdot v_i \\ &= \frac{\mu_1}{\lambda_1} \cdot w + \sum_{i=2}^{n} v_i (\mu_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \cdot \mu_1) \qquad \in Lin\,(w, v_2, ..., v_n) \end{aligned}$$

  - Also $\{w, v_2, ..., v_n\}$ Erzeugendensystem von V. Noch zu zeigen: $\{w, v_2, ..., v_n\}$ linear unabhängig.

- Sei $\mu \cdot w + \mu_2 \cdot v_2 + ... + \mu_n \cdot v_n = 0$ mit $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i$ ($\mu, \mu_k \in K$). Dann:

$$\begin{aligned} \mu \cdot (\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i) + \mu_2 \cdot v_2 + ... + \mu_n \cdot v_n &= 0 \\ \mu\lambda_1 v_1 + (\mu\lambda_1 + \mu_2) \cdot v_2 + ... + (\mu \cdot \lambda_n + \mu_n) \cdot v_n &= 0 \end{aligned}$$

- Da $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig, nur triviale Linearkombination möglich:

$$\lambda_1 \cdot \mu = 0 \wedge \mu_k + \mu \cdot \lambda_k = 0 \Rightarrow \mu = \mu_k = 0 \qquad (k = 2, 3, ..., n)$$

- Also $\{w, v_2, ..., v_n\}$ linear unabhängig und damit Basis.

- Beispiel:
  - $\{e_1, e_2, e_3\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^3$.

$$w = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3$$

  - Nach Austauschlemma: $\{w, e_2, e_3\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^3$

Austauschsatz von Steinitz: (1913)
Sei $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V und $C = \{w_1, ..., w_m\} \subseteq V$ linear unabhängig. Dann ist

1. $m \leq n$
2. Es gibt $i_1, ..., i_m \in \{1, ..., n\}$, sodass das Austauschen $v_1, ..., v_m$ gegen $w_1, ..., w_m$ wieder eine Basis von V ergibt.

Beweis:

- Nummeriert man so um, dass $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_m = m$, dann ist nach Behauptung $\{w_1, ..., w_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$ Basis von V.
- Beweis durch vollständige Induktion nach m
  - Induktionsanfang: m $= 1 \leq n$

$$w_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i \qquad (w_1 \neq 0)$$

    Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\lambda_1 \neq 0$. Nach Austauschlemma ist $\{w, v_2, ..., v_n\}$ eine Basis von V.
  - Induktionsvoraussetzung: Behauptung gelte für $\{w_1, ..., w_{m-1}\}$ (linear unabhängig), wobei $\{w_1, ..., w_{m-1}, v_m, ..., v_n\}$ eine Basis von V mit $m - 1 \leq n$.
  - Induktionsbeweis: Sei $\{w_1, ..., w_m\}$ linear unabhängig und $\lambda_i \in K$:

$$w_m = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \cdot w_i + \sum_{i=m}^n \lambda_i \cdot v_i$$

1. Wäre $\lambda_m, ..., \lambda_n = 0$ ergäbe sich $w \in Lin\,(w_1, ..., w_{m-1})$ also $\{w_1, ..., w_m\}$ linear abhängig. (Widerspruch!)
2. $\exists \lambda_i \neq 0$ mit $m \leq i \leq n$. Bei Umnummerierung kann $\lambda_m \neq 0$ erreicht werden. Austausch von w_m gegen v_m nach Austauschlemma, dann $\{w_1, ..., w_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$ Basis von V.

Folgerung 1:
Jede linear unabhängige Menge eines endlich erzeugten Vektorraums, insbesondere jede Basis, hat endlich viele Elemente.

Beweis:

- Nach Satz 3 existiert Basis B mit $|B| = n$.
- Angenommen, es gäbe eine Basis aus unendlich vielen Elementen, dann wäre das eine linear unabhängige Menge $C \subseteq V$. Also $C \subseteq C_\infty \subseteq V$.
- Dann muss gelten: $|C| \geq n + 1$. Nach Austauschsatz gilt $n + 1 = |C| \leq |B| = n$. (Widerspruch!)

Folgerung 2:
Je zwei Basen von V haben gleich viele Elemente.

Beweis: Mit Austauschsatz für 2 Basen B_1 und B_2:

- Wenn $B = B_1$ und $C = B_2$, dann $|B_2| \leq |B_1|$
- Wenn $B = B_2$ und $C = B_1$, dann $|B_1| \leq |B_2|$
- Also muss gelten: $B_1 = B_2$

Dimension:

- Die Anzahl $|B|$ der Elemente einer Basis B eines K-Vektorraums heißt Dimension (dim V) von V. Es sei
  - dim V = n, falls V eine Basis von n Elementen hat. V heißt endlichdimensional.
  - dim V = ∞, falls V keine Basis aus n Elementen hat. V heißt unendlichdimensional.
- Beispiele:
  1. $dim\,K^n = n$, weil $\{e_1, ..., e_n\}$ Basis von K^n
  2. $dim\,V = 3$ für den $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Höchstgrad 2.

Basisergänzungssatz:
Sei $M \subseteq E \subseteq V$, wobei M linear unabhängig und E ein Erzeugendensystem. Dann gibt es eine Basis B von V mit $M \subseteq B \subseteq E$. Insbesondere hat jeder Vektorraum eine Basis.

2.3 Analytische Geometrie im $\mathbb{R}^n$

2.3.1 Skalarprodukt, Längen- und Winkelmessung

Skalarprodukt:

- V sei ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Abbildung $< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt, wenn $\forall u, v, w \in V \forall \lambda \in \mathbb{R}$:
  1. $< u, v + w > = < u, v > + < u, w >$ (linear)
  2. $< u, \lambda \cdot v > = \lambda \cdot < u, v >$ (linear)
  3. $< u, v > = < v, u >$ (symmetrisch)
  4. $< u, u > \geq 0$ (positiv definiert)
- Ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt euklidischer Vektorraum.
- Wegen (3):

$$\begin{aligned} < u, v + w > &= < v + w, u > \\ < u, \lambda \cdot v > &= < \lambda \cdot v, u > \end{aligned}$$

- Das (natürliche/kanonische) Skalarprodukt von Vektoren $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ sei

$$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

  Die Forderungen an ein Skalarprodukt sind leicht nachzurechnen, also erfüllt.
- $\mathbb{R}^n$ ist euklidischer Vektorraum.

Norm:

- Es heißt $||x|| := \sqrt{< x, x >} = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ die Norm von $\mathbb{R}^n$. (Länge/Betrag von x)
- Jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $||x|| = 1$ heißt Einheitsvektor.
- Eigenschaften: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$:
  1. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  2. $||\alpha \cdot x|| = |\alpha| \cdot ||x||$
  3. $||x + y||^2 = ||x||^2 + 2 \cdot < x, y > + ||y||^2$

  Beweis: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq ||x + \lambda \cdot y||^2 \\ &= < x + \lambda \cdot y, x + \lambda \cdot y > \\ &= < x, x > + 2\lambda \cdot < x, y > + \lambda^2 < y, y > \qquad * \\ &= ||x||^2 + 2 \cdot < x, y > + ||y||^2 \qquad \text{für } \lambda = 1 \end{aligned}$$

4. $< x,y >^2 \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2$ (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) , wobei $< x,y >^2 = ||x||^2 \cdot ||y||^2 \Leftrightarrow$ x,y linear abhängig

   Beweis:

   (a) – Für y = 0: trivial nach 3)
       – Für $y \neq 0$: Setze $\lambda = \frac{-<x,y>}{<y,y>}$ in *. Es folgt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq < x,x > -2\frac{< x,y >}{< y,y >} \cdot < x,y > + \frac{< x,y >^2}{< y,y >^2} \cdot < y,y > \\ \Rightarrow 0 &\leq < x,x > \cdot < y,y > -2 \cdot < x,y >^2 + < x,y >^2 \\ \Rightarrow < x,y >^2 &\leq ||x||^2 \cdot ||y||^2 \end{aligned}$$

   (b) Gleichheitsfall:
       – „$\Rightarrow$“

$$0 = ||x + \lambda \cdot y|| \Rightarrow x + \lambda \cdot y = 0$$

       Also x,y linear abhängig.
       – „$\Leftarrow$“
       Wenn x,y linear abhängig:

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \cdot x + \beta \cdot y = 0 \wedge (\alpha, \beta) \neq (0,0)$$

       O.B.d.A. $\alpha \neq 0$. Also:

$$x = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot y := \varrho \cdot y$$

       Dann gilt:

$$\begin{aligned} < x,y >^2 &= < \lambda \cdot y, y >^2 = < \lambda \cdot y, y > \cdot < \lambda \cdot y, y > \\ &= \varrho^2 < y,y >^2 = < \varrho \cdot y, \varrho \cdot y > \cdot < y,y > \\ &= < x,x > \cdot < y,y > = ||x||^2 + ||y||^2 \end{aligned}$$

5. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Dreiecksungleichung für Normen)

   Beweis: Setze 4. in 3. ein:

$$\begin{aligned} ||x + y||^2 &= ||x|| + 2 < x,y > + ||y||^2 \\ &\leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 \\ &= (||x + y||^2) \\ \Rightarrow ||x + y|| &\leq ||x|| + ||y|| \end{aligned}$$

Abstand:

- Wenn $a, b \in \mathbb{R}^n$ als Punkte interpretiert werden, dann heißt $d(a,b) := ||b - a||$ ihr Abstand (oder Länge der Strecke zwischen a und b).
- Für n=2: $d(a,b) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$,
  für n=3: $d(a,b) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$, ...
- $(\mathbb{R}^n, d)$ ist ein metrischer Raum.

- Abschätzung (Dreiecksungleichung der Abstände):

$$\begin{aligned} ||b-a|| &= ||b-c+c-a|| \leq ||b-c|| + ||c-a|| \\ \Rightarrow d(a,b) &\leq d(a,c) + d(c,b) \end{aligned}$$

  Für n=2: In einem Dreieck ist die Länge einer Seite nicht größer als die Summe der beiden anderen Seiten.

Winkelmessung:

- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Für $\frac{<x,y>}{||x||\cdot||y||} =: \kappa$ gilt $-1 \leq \kappa \leq 1$. Das ist der Wertebereich der Cosinusfunktion über $[0,\pi]$.
- Es sei $\measuredangle(x,y) \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \measuredangle(x,y) \leq \pi$, der Winkel zwischen den Vektoren x und y, wenn

$$\cos\measuredangle(x,y) = \frac{<x,y>}{||x||\cdot||y||}$$

  gilt.
- Eigenschaften:
  1. $\measuredangle(x,y) = \measuredangle(y,x)$
  2. $\measuredangle(x,y) = \pi - \measuredangle(x,-y)$

     Beweis: Es sei $\varphi = \measuredangle(x,y)$, $\delta = \measuredangle(x,-y)$.

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{<x,y>}{||x||\cdot||y||} \\ \cos\delta &= \frac{<x,-y>}{||x||\cdot||-y||} = -\frac{<x,y}{||x||\cdot||y||} \\ \Rightarrow \cos\varphi &= -\cos\delta = \cos(\pi\pm\delta) \\ \Rightarrow \varphi &= \pi\pm\delta + 2k\pi \qquad k\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow \varphi &= \pi - \delta \,\mathrm{da}\, 0 \leq \varphi \leq \pi \end{aligned}$$

  3. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$: $\measuredangle(\alpha\cdot x,y) = \measuredangle(x,y)$
- $x,y \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ orthogonal (senkrecht) $:\Leftrightarrow \measuredangle(x,y) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow <x,y>=0$
- Cosinussatz im $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} <x-y,x-y> &= ||x||^2 - 2\cdot <x,y> + ||y||^2 \\ &= ||x||^2 - 2\cdot||x||\cdot||y||\cdot\cos\measuredangle(x,y) + ||y||^2 \\ \Rightarrow ||x-y||^2 &= ||x||^2 + ||y||^2 - 2\cdot||x||\cdot||y||\cdot\cos\measuredangle(x,y) \end{aligned}$$

  Für $\measuredangle(x,y) = \frac{\pi}{2}$ Satz des Pythagoras:

$$||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

Winkel zwischen Geraden:

- Gerade $g: x = a + \lambda\cdot v$ $(v\neq 0)$, Gerade $h: x = p + \mu\cdot w$ $(w \neq 0)$

- $\measuredangle(v,w) =: \sphericalangle(g,h)$ sei der orientiere Winkel zwischen den durch v und w orientieren Geraden. $(0 \leq \sphericalangle(g,h) \leq \pi)$

- $\measuredangle(g,h) := \min(\measuredangle(v,w), \pi - \measuredangle(v,w))$ sei der spitze Winkel zwischen den Geraden g und h. $(0 \leq \sphericalangle(g,h) \leq 0,5 \cdot \pi)$

$$\cos \measuredangle(g,h) = \frac{|< v,w >|}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

2.3.2 Geometrische Sätze in der Ebene

- Voraussetzung: $\mathbb{R}^2$ interpretiert als 2-dimensionaler Punktraum
- Hilfsmittel: Vierteldrehung

$$x = (x_1, x_2) \mapsto x^\perp = (-x_2, x_1)$$

dann:

$$\|x\| - \|x^\perp\| = 0 \qquad < x, x^\perp >= 0 \qquad (x^\perp)^{bot} = -(x_1, x_2) = -x$$

Weiter:

$$< x^\perp, y >=< (-x_2, x_1), y >= x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$$

Determinante:

- Sei

$$\det(x,y) := x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

die Determinante von x und y.

$$\det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

- Sei $y \neq 0$. Dann gilt: $\det(x,y) = 0 \Leftrightarrow$ x,y linear abhängig

Normalenvektor:

- Sei $g : x = a + \lambda \cdot v$ $(v \neq 0, \lambda \in \mathbb{R})$ eine Gerade, dann:

$$\begin{aligned} < v^\perp, x > &= < v^\perp, a + \lambda \cdot v > \\ &= \underbrace{< v^\perp, a >}_{=:\gamma \in \mathbb{R}} + \lambda \cdot \underbrace{< v^\perp, v >}_{0} \end{aligned}$$

- Sei $n := v^\perp = (n_1, n_2)$, dann $< n, x >= \gamma$. Also:

$$n_1 \cdot x_1 - n_2 \cdot x_2 - \gamma = 0$$

Gleichung von g mit n als Normalenvektor von g. Die Zahl $\gamma =< n, a >$ wird mit einem beliebigen Aufpunkt von g bestimmt.

- $\lambda \cdot < n, x >= \lambda \cdot \gamma$ ist auch Gleichung von g

Normale:

- Jede zu einer Geraden g orthogonale Gerade heißt eine Normale von g.
- Eigenschaften:

  1. Ist v ein Richtungsvektor von g, dann ist $v^\perp$ ein Richtungsvektor jeder Normalen von g.
  2. Zu einer Geraden $g : x = a + \lambda \cdot v$ gibt es genau eine Normale h, die einen gegebenen Punkt p enthält, nämlich $h : x = p + \mu \cdot v^\perp$ $(\mu \in \mathbb{R})$

Schnittpunkt zweier Geraden:

- Sei $g : x = a + \lambda \cdot v$ (bzw. $< n, x >= \gamma =< v^\perp, a >$) und $h : x = b + \mu \cdot w$ (bzw. $< m, x >= \delta =< w^\perp, b >$).
- Schnittpunkt S liegt auf g und h:

$$\begin{aligned} s &= a + \lambda_1 \cdot v = b + \mu_1 \cdot w \\ \Rightarrow < v^\perp, s > &= < v^\perp, a >= \gamma \\ < w^\perp, s > &= < w^\perp, a >= \delta \end{aligned}$$

- Ansatz: $s = \alpha \cdot v + \beta \cdot w$ (v,w linear unabhängig, also Basis). Dann:

$$\begin{aligned} < v^\perp, s > &= < v^\perp, \alpha \cdot v + \beta \cdot w >= \gamma = \beta \cdot < v^\perp, w > \\ < w^\perp, s > &= < w^\perp, \alpha \cdot v + \beta \cdot w >= \delta = \alpha \cdot < w^\perp, v > \\ \Rightarrow \beta &= \frac{\gamma}{< v^\perp, w >} \qquad \alpha = \frac{\delta}{< w^\perp, v >} \end{aligned}$$

- Nach Folgerung Determinante: $\det(v, w) = 0 \Leftrightarrow$ v,w linear abhängig, d.h. $\det(v, w) \neq 0 (=< v^\perp, w >) \;\Leftrightarrow$ v,w linear unabhängig.
- Leicht zu zeigen: $\det(w^\perp, v) \neq 0 \Leftrightarrow$ v,w linear unabhängig.
- Also:

$$\begin{aligned} s &= \frac{\delta}{< w^\perp, v >} \cdot v + \frac{\gamma}{< v^\perp, w >} \cdot w \\ &= \frac{< m, x >}{< m, v >} \cdot v + \frac{< n, x >}{< n, w >} \cdot w \end{aligned}$$

Abstand Punkt-Gerade:

- Sei f der Schnittpunkt mit $f = p + \lambda \cdot n$. Also:

$$\begin{aligned} f - p &= \lambda \cdot n \\ \Rightarrow \|f - p\| &= \|n\| \cdot |\lambda| \\ &= d(p, f) =: d(p, g) \end{aligned}$$

  1. Berechnung mit Hilfe der Schnittpunktsformel (b=p, w=n):

$$f = \frac{\delta}{< n^\perp, v >} \cdot v + \frac{\gamma}{< n, n >} \cdot n$$

  mit $\delta =< n^\perp, p >$ und $\gamma =< n, a >$. Also:

$$f = \frac{< v, p >}{< v, v >} \cdot v + \frac{< n, a >}{< n, n >} \cdot n$$

2. Es gilt auch: $f = a + \lambda \cdot v = p + \mu \cdot n$. Also:

$$
\begin{aligned}
0 &= (p-a) + \mu \cdot n - \lambda \cdot v \\
0 &= < p - a + \mu \cdot n - \lambda \cdot v > \\
0 &= < p-a, n > + \mu \cdot < n, n > \\
\Rightarrow \mu &= \frac{< p-a, n >}{< n, n >} \\
\Rightarrow f &= p - \frac{< p-a, n >}{< n, n >} \cdot n \\
f - p &= -\frac{< p-a, n >}{< n, n >} \cdot n \\
\Rightarrow \|f-p\| &= \frac{| < p-a, n > |}{< n, n >} \cdot \|n\| \\
&= \frac{| < p-a, n > |}{\|n\|} = d(p,f) =: d(p,g)
\end{aligned}
$$

Hessesche Normalform:

- Betrachtet man für g Gleichung 3: $< x-a, n >= 0$, so heißt

$$\frac{< x-a, n >}{\|n\|} = 0$$

  die Hessesche Normalform von g. Es ist $d(p,f) = |\frac{<p-a,n>}{\|n\|}|$.

- Beispiel: Es sei a=(2,1), n=(1,1) und p=(1,0).

$$
\begin{aligned}
< x-a, n > &= 0 \\
\Rightarrow x_1 - a_1 + x_2 - a_2 &= 0 \\
x_1 + x_2 - 3 &= 0
\end{aligned}
$$

  Anwendung der Hesseschen Normalform:

$$
\begin{aligned}
\|n\| &= \sqrt{2} \\
\Rightarrow \frac{x_1 + x_2 - 3}{\sqrt{2}} &= 0 \\
\Rightarrow d(p,f) &= |\frac{-2}{\sqrt{2}}| = \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

- Bemerkung: Eine Geradengleichung von g lautet:

$$< x-a, n >= 0$$

  Die Hessesche Normalform dieser Gleichung lautet

$$\frac{< x-a, n >}{\|n\|} = 0$$

  Die Abstand-Punkt-Geraden-Lösungsformel enthält die linke Seite der Hesseschen Normalform, wobei an Stelle von x der untersuchte Punkt p tritt.

Fläche eines Dreiecks:

- Es gilt
$$F = \frac{1}{2} \cdot \|b-a\| \cdot d(c,g)$$
mit $g :< n, x-a >= 0$ und $n = (b-a)^{\perp}$.

- Nach Lösungsformel:
$$\begin{aligned} d(c,g) &= \frac{|< n, c-a >|}{\|n\|} = \frac{|< (b-a)^{\perp}, c-a >|}{\|(b-a)^{\perp}\|} \\ &= \frac{|\det(b-a, c-a)|}{\|b-a\|} \end{aligned}$$
Also:
$$F = \frac{1}{2} \cdot \|b-a\| \cdot d(c,g) = \frac{1}{2} \cdot |\det(b-a, c-a)|$$

- Folgerungen:
  1. $F = 0 \Leftrightarrow$ a,b,c liegen auf einer Geraden $\Leftrightarrow \det(b-a, c-a) = 0$
  2. Die Gerade durch zwei verschiedene Punkte a,b hat die Gleichung:
  $$\det(b-a, x-a) = 0$$

Höhenschnittpunktsatz:

- In einem Dreieck schneiden sich dessen Höhen in einem Punkt.
- Beweis:
  - Es sei $\triangle abc$ mit $\det(b-a, c-a) \neq 0$. Dann:
  $$\begin{aligned} H_a : x &= a + \lambda \cdot (b-c)^{\perp} \\ H_b : x &= b + \lambda \cdot (c-a)^{\perp} \\ H_c :< b-a, x-c > &= 0 \end{aligned}$$
  - Es sei $h = H_a \cap H_b$, dann gilt:
  $$h = a + \lambda_1 \cdot (b-c)^{\perp} = b + \lambda_2 \cdot (c-a)^{\perp}$$
  mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
  - Hieraus folgt:
  $$\begin{aligned} < h, b-c > &= < a, b-c > \\ < h, c-a > &= < b, c-a > \\ \Rightarrow < h, b-c > + < h, c-a > &= < a, b-c > + < b, c-a > \\ < h, b-a > &= < a, b > - < a, c > + < b, c > - < b, a > \\ < h, b-a > &= < b-a, c > \\ \Rightarrow < b-a, h-c > &= 0 \end{aligned}$$
  Also $h \in H_c$. \\

- Behauptung:

$$h = \frac{1}{\det(a-c,b-c)} \cdot (< a, b-c > \cdot a^{\perp} + < b, c-a > \cdot b^{\perp} + < c, a-b > \cdot c^{\perp})$$

(Beweis siehe Übung 11)

Kreisgeometrie:

- Kreis $k(m,\rho) = \{x : \|x-m\| = \rho\}$ mit ρ... Radius und m...Mittelpunkt
- Kreisgleichung:

$$< x-m, x-m >= \rho^2$$

Schnittpunkt Gerade-Kreis:

- Es sei $g : x = a + \lambda \cdot v$ mit $\|v\| = 1$. Die Schnittpunkte ergeben sich aus der Bedingung:

$$\begin{aligned} < a+\lambda\cdot v-m, a+\lambda\cdot v-m > &= \rho^2 \\ \lambda^2 \cdot < v,v > +2\lambda \cdot < v, a-m > + < a-m, a-m > -\rho^2 &= 0 \\ \lambda_{1/2} &= -p \pm \sqrt{p^2-q} \end{aligned}$$

mit $p =< v, a-m >$ und $q = \|a-m\| - \rho^2$.

- Die Lösungen sind reell, falls $p^2 - q \geq 0$. Dann

$$\begin{aligned} s_i &= a + \lambda_i \cdot v \\ s_i - a &= \lambda_i \cdot v \\ \|s_i - a\| &= |\lambda_i| \end{aligned}$$

- Nach dem Wurzelsatz von Vieta: $q = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

$$\begin{aligned} |q| &= |\lambda_1| \cdot |\lambda_2| \\ &= d(s_1,a) \cdot d(s_2,a) \\ &= const. \text{ unabhängig von v} \end{aligned}$$

- Sehnen-bzw. Tangentensatz: Das Produkt der Abstände $d(s_i,a)$ zwischen einem festen Punkt a und den Schnittpunkten s_1 und s_2 einer Sehne bzw. Tangente durch a mit einem Kreis ist konstant.

Tangente:

- Eine Gerade heißt Tangente an den Kreis $k(m,\varrho)$, falls sie mit $k(m,\varrho)$ nur einen Punkt (Doppelpunkt) als Schnittpunkt hat.
- Sei $a \in k(m,\varrho)$, dann $\|a-m\|^2 = \varrho^2 \Rightarrow q = 0$. Dann $\lambda_1 = 0$, also $s_1 = a$, und $\lambda_2 = -2p$, also $s_2 = a - 2pv$.
- g ist genau dann eine Tangente in a an $k(m,\varrho)$, falls $s_1 = s_2 = a$, d.h. falls

$$0 = p =< v, a-m > \Leftrightarrow v \perp a-m \Leftrightarrow < x-a, a-m >= 0$$

(Gleichung der Kreistangente)

Umkreismittelpunkt: ... eines Dreiecks pqr

- Der Umkreismittelpunkt erfüllt die Bedingung:

$$\|m-p\|^2 = \|m-q\|^2 = \|m-r\|^2$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
<m-p, m-p> &= <m-q, m-q> && (2.1)\\
\Leftrightarrow <m-\underbrace{\tfrac{1}{2}(p+q)}_{a}, p-q> &= 0 && (2.2)\\
<m-q, m-q> &= <m-r, m-r> && (2.3)\\
\Leftrightarrow <m-\underbrace{\tfrac{1}{2}(q+r)}_{b}, q-r> &= 0 && (2.4)
\end{aligned}$$

- Dabei ist 2.2 die Gleichung der Mittelsenkrechten $M_{pq}(=g)$ zu p und q mit dem Richtungsvektor $v=(p-q)^{\perp}$. Gleichung 2.4 ist die Mittelsenkrechte $M_{qr}(=h*)$ zu q und r mit dem Richtungsvektor $w=(q-r)^{\perp}$.

- Schnittpunkt: $m = M_{pq} \cap M_{qr}$ mit Anwendung der Schnittformel:

$$m = \frac{1}{<v^{\perp}, w>} \cdot (-\lambda \cdot v + \gamma \cdot w)$$

mit $\gamma =< v^{\perp}, a >$ und $\delta =< w^{\perp}, b >$.

- Man erhält:

$$\begin{aligned}
\gamma &= <v^{\perp}, a> = \frac{1}{2} <p-q, p+q> = \frac{1}{2}(\|p\|^2 - \|q\|^2)\\
\delta &= <w^{\perp}, b> = \frac{1}{2} <q-r, q+r> = \frac{1}{2}(\|q\|^2 - \|r\|^2)\\
<v^{\perp}, w> &= <p-q, (q-r)^{\perp}> = \det(q-r, p-q)
\end{aligned}$$

Setzt man diese Ergebnisse ein, ergibt sich der Schnittpunkt:

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{2\cdot\det(q-r, p-q)}\left((\|r\|^2 - \|q\|^2)\cdot(p-q)^{\perp} + (\|p\|^2 - \|q\|^2)\cdot(q-r)^{\perp}\right)\\
&= \frac{1}{2\cdot\det(q-r, q-p)}\left((\|q\|^2 - \|r\|^2)\cdot p^{\perp} + (\|r\|^2 - \|p\|^2)\cdot q^{\perp} + (\|p\|^2 - \|q\|^2)\cdot r^{\perp}\right)
\end{aligned}$$

- Anwendung der Formel zur Berechnung des Schnittpunktes $m* = M_{qr} \cap M_{rp}$. $(p \to q, q \to r, r \to p)$

$$m* = \frac{1}{2\cdot\det(r-p, r-q)}\left((\|r\|^2 - \|p\|^2)\cdot q^{\perp} + (\|p\|^2 - \|q\|^2)\cdot r^{\perp} + (\|q\|^2 - \|r\|^2)\cdot p^{\perp}\right)$$

Man kann zeigen: $\det(r-p, r-q) = \det(q-r, q-p)$. (Übung 11). Es gilt also $m = m*$.

- Satz: Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks pqr schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.

- Bemerkung: Umkreisradius ist $\varrho = \|m-p\|$. Man kann zeigen:

$$\varrho = \frac{\|p-q\| \cdot \|q-r\| \cdot \|r-p\|}{2 \cdot \det(p-r, q-r)}$$

Satz von Euler:

In jedem Dreieck liegen Schwerpunkt s, Höhenschnittpunkt h und Mittelpunkt m des Umkreises auf einer Geraden (Euler-Gerade). Es gilt:

$$3 \cdot s = h + 2 \cdot m$$

2.3.3 Analytische Geometrie im $\mathbb{R}^3$

Vektorprodukt: (Kreuzprodukt, äußeres Produkt)

- Abbildung $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(a,b) \mapsto \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

- Eigenschaften:
  - (P1) Parallelitätskriterium

$$a \times b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \wedge b = 0 \\ \exists \varrho \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : a = \rho \cdot b \end{cases}$$

    Also: $a \times b = 0 \Leftrightarrow$ a,b linear abhängig.
  - (P2) $< a \times b, a >= 0 >$ $(a \times b \perp a)$ und $< a \times b, b >= 0$ $(a \times b \perp b)$

    Anwendung: $a \times b$ Richtungsvektor einer Geraden, die auf g (Richtungsvektor a) und h (Richtungsvektor b) senkrecht steht
  - (P3) $\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2 < a, b >^2$
  - (P4) $\|a \times b\| = A_{Pl}$, mit $A_{Pl} =$ Fläche des von a und b aufgespannten Paralellogramms OADB.

    Beweis: Sei h die Höhe des Parallelogramms.

$$\begin{aligned} h &= \|b\| \cdot \sin \measuredangle(a,b) \\ \Rightarrow A_{OAB} &= \frac{1}{2}\|a\| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\alpha \\ A_{Pl} &= 2 \cdot A_{OAB} = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\alpha \\ A_{Pl}^2 &= \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 \cdot \sin^2\alpha \\ &= \|a\| \cdot \|b\| \cdot (1 - \cos^2\alpha) \\ &= \|a \times b\|^2 \qquad \text{(P3)} \\ \Rightarrow A_{Pl} &= \|a \times b\| \end{aligned}$$

Gleichung einer Ebene ε:

- Parameterdarstellung:

$$\varepsilon : x = a + \lambda \cdot u + \mu \cdot v \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, u, v \in \mathbb{R}^3 (l.u.)$$

- Durch Umformung erhält man die Gleichung der Ebene ε mit $n = u \times v$:

$$\begin{aligned} x - a &= \lambda \cdot u + \mu \cdot v \\ < n, x - a > &= < n, \lambda \cdot u + \mu \cdot v > \\ &= \lambda \cdot < n, u > + \mu \cdot < n, v > \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lemma 1:

- Ein Normalenvektor von ε steht senkrecht zu jeder Geraden in ε.
- Beweis:
  Eine beliebige Gerade in ε hat einen Richtungsvektor $r = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Es ist $< n, r >= 0$:

$$< n, r >=< n, \lambda \cdot u + \mu \cdot v >= \lambda \cdot < n, u > + \mu \cdot < n, v >= 0$$

- Jede zu ε senkrechte Gerade heiße eine Ebenen-Normale (Lotgerade). Kurz: Normale von ε

Lemma 2:

Die Normale N_p von ε durch einen Punkt p ist eindeutig bestimmt:

$$N_p : x = p + \lambda \cdot n$$

Satz 1: (Fußpunktsatz)

- Die Normale N_p von ε durch p schneidet die Ebene in dem Fußpunkt

$$f = p - \frac{< n, p - a >}{< n, n} \cdot n$$

- Beweis:

$$\begin{aligned} \exists \lambda \in \mathbb{R} : f &= p + \lambda \cdot n \\ f \in \varepsilon :< n, f - a > &= 0 \\ \Rightarrow < n, p + \lambda \cdot n - a > &= 0 \\ \Rightarrow \lambda &= - \frac{< n, p - a >}{< n, n} \\ \Rightarrow f &= p + \lambda \cdot n = p - \frac{< n, p - a >}{< n, n} \cdot n \end{aligned}$$

- Abstand Punkt p von Ebene ε:

$$d(p, \varepsilon) = \inf(\|p - x\| | x \in \varepsilon)$$

Satz 2:

$$d(p,\varepsilon) = \|p-f\| \text{ mit f nach Satz 1}$$

Beweis:

- Zu zeigen: $\|p-x\| > \|p-f\|$ für alle $x \in \varepsilon \backslash \{f\}$.
- Es sei $\forall x \in \varepsilon : p-f = \lambda \cdot n$ und $< n, x-f >= 0$. Also: $< p-f, x-f >= 0$.
- Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \|p-x\|^2 &= \|p-f+f-x\|^2 =< p-f+f-x, p-f+f-x > \\ &= < p-f, p-f > +2 < p-f, f-x > + < f-x, f-x > \\ &= \|p-f\|^2 + \|f-x\|^2 \\ \Rightarrow \|p-x\| &> \|p-f\| \qquad (x \neq f) \end{aligned}$$

Hessesche Normalform:

$$< n, x-a >= 0 \Rightarrow \frac{< n, x-a >}{\|n\|} = 0$$

Satz 3:

Wenn ε nach HNF gegeben, dann

$$d(p,\varepsilon) = \frac{|< n, p-a >|}{\|n\|}$$

Beweis:

- Es gilt $d(p,\varepsilon) = \|p-f\|$, wobei speziell für n auch $n_0 = \frac{n}{\|n\|}$ verwendet werden kann.
- Damit:

$$\begin{aligned} f &= p - \frac{< n_0, p-a >}{< n_0, n_0} \cdot n_0 \\ p-f &= < n_o, p-a > \cdot n_0 \\ \|p-f\| &= |< n_0, p-a >| \cdot \|n_0\| \end{aligned}$$

Normalebene:

Ebene $\mu :< v, x-p >= 0$ heißt Normalebene von $g : x = a + \lambda \cdot v$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, die durch einen Punkt p verläuft. (v Normalenvektor von Ebene μ)

Satz 4:

- Eine Normalebene μ zu der Geraden g haben den Schnittpunkt

$$s = a + \frac{< v, p-a >}{< v, v >} \cdot v$$

und $\|p-s\| = \inf(\|p-x\| | x \in g)$.

- Beweis analog zu Satz 1/2
- Bemerkung:

  1. $d(p, g) := \inf(\|p-x\| | x \in g)$ Abstand des Punktes p zu einer Geraden g
  2. Man kann zeigen:

$$d(p, g) = \|p - s\| = \|p - a \times \frac{1}{\|v\|} \cdot v\|$$

3

Matrizen und lineare Gleichungssysteme

3.1 Matrizen und K-Vektorraum

3.1.1 Motivation

- m lineare Gleichungen für n unbekannte x_i bilden lineares Gleichungssystem.
- Bildung eines rechteckigen Zahlenschemas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Gleichungssystem: $A \cdot x = b$

3.1.2 Definitionen

Matrix:

- Es seien $m, n \in \mathbb{N}, a_{ij} \in K$, i=1,...,m, j=1,...,n.
- Das rechteckige Zahlenschema über K von m Zeilen und n Spalten, oder $m \times n$-Matrix oder Matrix vom Typ (Format) $m \times n$ über K. (i... Zeilenindex, j ... Spaltenindex)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} =: (a_{ij})_{m,n} =: A^{(m,n)} =: A$$

- Für m=1 und n=1 heißt $(a_{11}) =: a_{11}$
- Für m=1 oder n=1 heißt A ein Zeilen- bzw. Spaltenvektor.
- a_ij heißt Matrixelement der i-ten Zeile und j-ten Spalte.
- $Mat(m, n; K)$ bezeichnet die Menge aller $m \times n$ Matrizen über K. (Auch $K^{m \times n}, K^{(m,n)}$)
- Für m=n heißt A quadratisch. (n-reihig)

- $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $B = (b_{ij})_{p,q}$ sind gleich:
  1. m=p und n = q (A,B vom gleichen Typ)
  2. $\forall i, j : a_{ij} = b_{ij}$

Addition:

- Für alle $A, B \in K^{m\times n}$:

$$\begin{aligned} A + B &= (a_{ij}) + (b_{ij}) \\ &:= (a_{ij} + b_{ij}) \end{aligned}$$

- Matrixelemente an der gleichen Stelle werden addiert.

Multiplikation mit Skalar:

- Für alle $\lambda \in K, A \in K^{m\times n}$:

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot (a_{ij}) := (\lambda \cdot a_{ij})$$

- Jedes Matrixelement wird mit λ multipliziert.

3.1.3 K-Vektorraum der Matrizen gleichen Typs

Die Matrizen gleichen Typs (m,n) über einem Körper K bilden mit der Addition (a) und der Skalarmultiplikation (m) einen K-Vektorraum der Dimension $m \cdot n$.

Beweis:

- Zu (V1):
  1. (G1) $(A + B) + C = A + (B + C)$
  2. (G2) Neutrales Element ist die Nullmatrix 0 mit $0 = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 0$. A+0=0+A=A
  3. Zu $A = (a_{ij})$ existiert entgegengesetzte Matrix $(-1) \cdot A = (-a_{ij})$.
  $$(-1) \cdot A + A = A + (-1) \cdot A = 0$$
  4. (G4) Kommutativität
  $$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A$$
- Zu (V2): $\forall \lambda, \mu \in K, A, B \in K^{m\times n}$:
  1. $$\begin{aligned} \lambda \cdot (\mu \cdot A) &= \lambda \cdot ((\mu \cdot a_{ij})) = (\lambda \cdot (\mu \cdot a_{ij})) \\ &= ((\lambda \cdot \mu) \cdot a_{ij}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot (a_{ij}) \\ &= (\lambda \cdot \mu) \cdot A \end{aligned}$$
  2. $(\lambda + \mu) \cdot A = ... = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$
  3. $\lambda \cdot (A + B) = ... = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

4. $1 \cdot A = ... = A$

- Also ist $(K^{m\times n}, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum.

Bsp.: Suche nach einer Basis:

- Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, Linearkombination von A aus Basismatrizen (Erzeugendensystem)

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\3 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} + 2\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} + 4\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Basis des Vektorraums:

- Es sei $E_{ij} = (e_{kl}^{(i,j)})$ sei $m \times n$-Matrix mit

$$e_{kl}^{(i,j)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \wedge j = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  d.h. an der Stelle (i, j) steht 1, sonst 0.

- Unter Benutzung des Kroneckersymbols δ_{ij}:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  kann man schreiben:

$$e_{kl}^{(i,j)} = \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}$$

- Die Menge $M = \{E_{11}, ..., E_{1n}, E_{21}, ..., E_{2n}, ..., E_{m1}, ..., E_{mn}\}$ ist ein Erzeugendensystem von $K^{m\times n} = Lin\, M$.

$$\begin{aligned}A = (a_{ij}) &= a_{11} \cdot E_{11} + a_{12} \cdot E_{12} + ... + a_{1n} \cdot E_{1n} + ... + a_{m1} \cdot E_{m1} + ... + a_{mn} \cdot E_{mn}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot E_{ij} \qquad (*)\end{aligned}$$

  Weiterhin gilt: A=0, dann * Linearkombination der Nullmatrix. Es folgt: $a_{ij} = 0$ für alle i,j.

- Also ist M linear unabhängig, damit Basis, bestehend aus $m \cdot n$ Matrizen:

$$\dim K^{m\times n} = m \cdot n$$

3.2 Matrizenrechnung

3.2.1 Zeilen- und Spaltenvektoren, Transponieren

- Matrix in Spaltenschreibweise:

$$A = (a_{ij})_{m,n} = (a_1 a_2 ... a_n)$$

mit

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

j-ter Spaltenvektor von A.

- Matrix in Zeilenschreibweise:

$$A = (a_{ij})_{m,n} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix}$$

mit $a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ i-ter Zeilenvektor von A.

- Für jede Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ ist die transponierte Matrix A^T von A definiert

$$A^T = (\alpha_{ij}) \in K^{n \times m}$$

mit $\alpha_{ij} = a_{ji}$ für alle i,j. (Vertauschen von Zeilen- und Spaltenvektoren unter Beibehaltung der Reihenfolge)

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

- Es gilt:
  1. $\alpha_{ii} = a_{ii}$ (Gleichheit der sogenannten Hauptdiagonalelemente a_{ii} für eine Matrix und ihre transponierte Matrix)
  2. $$A = (a_1 a_2 \ldots a_n) \Leftrightarrow A^T = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}$$

     also $\Leftrightarrow \alpha^j = a_j^T$ für j=1,...,n
  3. $$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A^T = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = (a^{1T}, a^{2T}, \ldots, a^{mT})$$

     $$\Leftrightarrow \quad \alpha_i = a^{iT} \text{ für } i = 1, \ldots, m$$

- Eine $m \times n$-Matrix heißt
  - ... symmetrisch, falls $A^T = A$
  - schiefsymmetrisch, falls $A^T = -A$

3.2.2 Produkte von Matrizen

- Es seien $A \in K^{m\times n}, B \in K^{n\times p}$ (Spaltenanzahl ist gleich Zeilenanzahl von B, A und B heißen verkettet.)
- Produkt: $A \cdot B = C = (c_{ij})$ mit

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

  Es ist $C \in K^{m\times p}$

- Faustregel: i-te Zeile von A mal j-te Spalte von B
- $$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix}, B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \Rightarrow c_{ij} = a^i \cdot b_j$$

  denn a^i ist $1 \times n$-Matrix und b_j ist $n \times 1$-Matrix, deren Produkt

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = (a_{i1} \dots a_{1n}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

Natürliches Skalarprodukt:

- Es seien $x, y \in K^{n\times 1}$ mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

  Dann heißt

$$x^T \cdot y = (x_1 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

  das natürliche Skalarprodukt des K^n.

- Anwendungsbeispiele:
  1. Gleichung einer Ebene

$$< n, x >= d \Leftrightarrow n^T \cdot x = d \qquad \text{mit}\, n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2. Standardbasis des $\mathbb{R}^3$: $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3 = x^T \cdot e \qquad \text{mit } e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Satz 1:

Sind die folgenden Summen und Produkte erklärt, dann gilt:

- (R1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (Assoziativität)
- (R2) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (Distributivgesetz I)
- (R3) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (Distributivgesetz II)
- (R4) $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$ für alle $\alpha \in K$
- (R5) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Beweis: zu (R1)

- Es sei $A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{ij})_{n,s}, C = (c_{ij})_{s,r}$

$$\begin{aligned}
(A \cdot B) \cdot C &= \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right)_{m,s}}_{(d_{ik})_{m,s}} \cdot C = (d_{ik})_{m,s} \cdot (c_{ik})_{s,r} \\
&= \left(\sum_{l=1}^{s} d_{il} \cdot c_{lk} \right)_{m,r} \\
&= \left(\sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jl} \right) \cdot c_{lk} \right)_{m,r} \\
&= \left(\sum_{l=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jl} \cdot c_{lk} \right)_{m,r} = L \\
A \cdot (B \cdot C) &= (a_{ij})_{m,n} \cdot \underbrace{\left(\sum_{l=1}^{s} b_{il} \cdot c_{lk} \right)_{n,r}}_{f_{ik}}) = (a_{ij})_{m,n} \cdot (f_{ik})_{n,r} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot f_{jk} \right)_{m,r} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \sum_{l=1}^{s} b_{jl} \cdot c_{lk} \right)_{m,r} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{s} a_{ij} \cdot b_{jl} \cdot c_{lk} \right)_{m,r} = R \\
\Rightarrow L &= R
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -7 & 26 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3.2.3 Inverse Matrizen

- Matrizenmultiplikation ist für quadratische Matrizen erklärt (Produkt wieder quadratisch)

$$\begin{aligned}
\cdot : K^{n\times n} \times K^{n\times n} &\to K^{n\times n} \\
(A,B) &\mapsto A \cdot B
\end{aligned}$$

- $(K^{n\times n}, \cdot)$ ist eine Gruppe:

  1. (G1) Assoziativität: trivial (R1)
  2. (G2) Existenz eines neutralen Elements: $E \cdot A = A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A$$

Also $E = (\delta_{ik})$ ist Einselement (n-reihige Einheitsmatrix)

$$\begin{aligned}
E \cdot A &= (\delta_{ik}) \cdot (a_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} \cdot a_{kj} = (a_{ij}) = A \\
A \cdot E &= (a_{ij}) \cdot (\delta_{ik}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \delta_{jk} = (a_{ik}) = A
\end{aligned}$$

Bemerkung: E erfüllt $E \cdot A = A$ für alle A. Es kann eine Matrix geben, für die $M \cdot A = A$ und $M \neq E$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
M \cdot A &= A
\end{aligned}$$

Wenn $M \cdot A = A$ und $M \neq E$:

$$\underbrace{(M-E)}_{B\neq 0} \cdot A = M \cdot A - E \cdot A = A - A = 0$$

Eine Matrix heißt Nullteiler, wenn eine Matrix $B \neq 0$ existiert, sodass $B \cdot A = 0$ oder $A \cdot B = 0$ gilt. Alle Nullmatrizen sind Nullteiler.

  3. (G3) Existenz des Inversen: $X, Y, A, E \in K^{n\times n}$
     - X heißt Linksinverse von A, falls $\exists X : X \cdot A = E$

– Y heißt Rechtsinverse von A, falls $\exists Y : A \cdot Y = E$

Satz 2:

Wenn X bzw. Y als Links- bzw. Rechtsinverse von A existieren, dann ist $X = Y$. Man nennt $X = Y = A^{-1}$ die inverse Matrix von A.

Beweis:

$$X = X \cdot E = X \cdot (A \cdot Y) = (X \cdot A) \cdot Y = E \cdot Y = Y$$

Satz 3:

1. Wenn A^{-1} für A existiert, dann ist A^{-1} eindeutig bestimmt.
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(\lambda \cdot A)^{-1} = \lambda^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$ $(\lambda \neq 0)$

Beweis:

1. Annahme: $\widetilde{A}$ sei eine weitere inverse Matrix zu A mit $\widetilde{A} \neq A^{-1}$, d.h.
$$\widetilde{A} = \widetilde{A} \cdot E = \widetilde{A} \cdot (A \cdot A^{-1}) = (\widetilde{A} \cdot A) \cdot A^{-1} = E \cdot A^{-1} = A^{-1}$$
Widerspruch zur Annahme
2. Wegen $A \cdot A^{-1} = E$ und $A^{-1} \cdot A = E$ ist A die Links(Rechts)inverse von A^{-1}, d.h. $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. Bestätigung durch Nachrechnen:
$$(\frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}) \cdot (\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1} \cdot A = E$$

Existenz des Inversen:

$A \in K^{n \times n}$ heißt regulär, wenn ihre inverse Matrix A^{-1} existiert. Anderenfalls heiße A singulär.
Wegen Satz 2 und Definition ist (G3) für alle regulären n-reihigen Matrizen erfüllt.

Satz 4:

Die regulären n-reihigen Matrizen bilden mit der Matrizenmultiplikation eine (nicht-kommutative) Gruppe.

3.3 Rang einer Matrix

- Es sei $A \in K^{m \times n}$ mit
$$A = (a_1 a_2 \dots a_n) = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix}$$

- $\dim Lin \underbrace{\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}}_{\gamma} =: s$ heißt Spaltenrang von A.
- $\dim Lin \underbrace{\{a^1, a^2, \ldots, a^m\}}_{\xi} =: z$ heißt Zeilenrang von A.
- Lin {...} je Untervektorräume des $K^{m\times 1}$ bzw. $K^{1\times n}$
- s ist die Anzahl von Vektoren einer Basis von Lin $\{a_1, ..., a_n\}$, entsprechend für z
- s ist die Maximalanzahl von linear unabhängigen Spalten von A; z ist die Maximalanzahl von unabhängigen Zeilen von A ($s \leq n, z \leq m$)

Satz 1:

$$\forall A \in K^{n\times n} : s = z$$

Beweis:

- γ habe die Basis $\{b_1, ..., b_s\}$ mit $b_j^T = (b_{1j} b_{2j} \ldots b_{mj})$ für $j = 1, \ldots, s$.
- Nach Satz 2.3.2 (Darstellungssatz):

  $$\exists c_{jk} \in K : a_k = \sum_{j=1}^{s} c_{jk} \cdot b_j = \sum_{j=1}^{s} b_j \cdot c_{jk}$$

  Spaltenelement in der l-ten Zeile und k-ten Spalte:

  $$a_{lk} = \sum_{j=1}^{s} b_{lj} \cdot c_{jk} \qquad l = 1, \ldots, m \wedge k = 1, \ldots n$$

  Es folgt mit $B = (b_1, \ldots, b_s)_{m,s}$ und $C = (c_{jk})_{s,n}$:

  $$A = (a_{lk}) = B \cdot C$$

- Zeile $a' = (a_{l1}, a_{l2}, \ldots, a_{ln})$ von A betrachten (l=1,...,m)

  $$\begin{aligned} a' &= \left(\sum_{j=1}^{s} b_{lj} \cdot c_{j1}, \sum_{j=1}^{s} b_{lj} \cdot c_{j2}, \ldots, \sum_{j=1}^{s} b_{lj} \cdot c_{jn} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{s} b_{lj} \cdot (c_{j1}, c_{j2}, \ldots, c_{jn}) \\ &= \sum_{j=1}^{s} b_{lj} \cdot c^j \end{aligned}$$

  d.h. jede Zeile a' von A ist eine Linearkombination von s Zeilen von c^j von C.
  Es folgt: $a' \in Lin(\{c^1, c^2, \ldots, c^s\})$ und $\xi \leq Lin(\{c^1, c^2, \ldots, c^s\})$. Also $z = \dim \xi \leq \dim Lin(\{c^1, \ldots, c^s\}) \leq s$ nach Austauschsatz von Steinitz.

- Sei $M = A^T$. Die analoge Schlussweise ergibt: Zeilenrang von M $\leq$ Spaltenrang von M, d.h. Spaltenrang von A $\leq$ Zeilenrang von A, $s \leq z$

- Aus $z \leq s$ und $s \leq z$ folgt $s = z$

Rang:

- Es sei $A \in K^{m \times n}$. Die natürliche Zahl Rang A $:= \dim \gamma := \dim \xi$ heißt der Rang der Matrix.
- A heißt spaltenregulär $\Leftrightarrow$ Rang A = m.
- A heißt zeilenregulär $\Leftrightarrow$ Rang A = n.

Folgerungen:

1. Rang A = Rang A^T
2. Rang A = 0 $\Leftrightarrow$ A = 0
3. Rang A $\leq \min(m, n)$

Satz 2:

Sei $A \in K^{m \times n}$ mit Rang s, dann existiert $B \in K^{m \times s}$ und $C \in K^{s \times n}$, sodass $A = B \cdot C$, wobei B spalten- und C zeilenregulär ist.

Beweis: Definition und Satz 1

Bemerkung: In $A = B \cdot C$ ist B bzw. C nicht eindeutig bestimmt.

3.4 Invertieren und Rangberechnung mit dem Austauschverfahren

- $v_1, \ldots, v_n \in V$: beliebiger K-Vektorraum und $w_1, \ldots, w_m \in Lin(\{v_1, \ldots, v_n\})$: lineares System von m Gleichungen

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot v_j \qquad i = 1, \ldots, m$$

in Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$
$$W = A \cdot V$$

als Tableau

	v_1	v_2	$\ldots$	v_l	$\ldots$	v_n
w_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1l}	$\ldots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
w_i	a_{i1}	a_{i2}	$\ldots$	a_{il}	$\ldots$	a_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
w_j	a_{j1}	a_{j2}	$\ldots$	a_{jl}	$\ldots$	a_{jn}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
w_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{ml}	$\ldots$	a_{mn}

Lesevorschrift $w_j = a_{j1} \cdot v_1 + \ldots + a_{jl} \cdot v_l + \ldots + a_{jn} \cdot v_n$ $(j = 1, \ldots, m)$

- Das Austauschverfahren gibt an, wie ein Vektor w_j gegen einen Vektor v_l ausgetauscht werden kann (äquivalente Umformung), falls $a_{jl} \neq 0$:

$$v_l = \underbrace{-\frac{a_{j1}}{a_{jl}}}_{c_{j1}} \cdot v_1 \underbrace{-\frac{a_{j2}}{a_{jl}}}_{c_{j2}} \cdot v_2 - \ldots + \underbrace{\frac{1}{a_{jl}}}_{c_{jl}} \cdot w_j - \ldots \underbrace{-\frac{a_{jn}}{a_{jl}}}_{c_{jn}} \cdot v_n$$

- i.te Zeile im Tableau $(i \neq j)$:

$$\begin{aligned} w_i &= a_{i1} \cdot v_1 + \ldots + a_{il} \cdot v_l + \ldots + a_{in} \cdot v_n \\ &= \underbrace{(a_{i1} + a_{il} \cdot c_{j1})}_{c_{i1}} \cdot v_1 + \ldots + a_{il} \cdot c_{il} \cdot w_j + \ldots + \underbrace{(a_{in} + a_{il} \cdot c_{jn})}_{c_{in}} \cdot v_1 \end{aligned}$$

- Regel: Das Austauschverfahren von w_j gegen v_l ist bei $a_{ij} \neq 0$ möglich und liefert das obige lineare System.

$$\begin{array}{c|cccccccc} \text{A} & v_1 & \ldots & v_l & \ldots & v_k & \ldots & v_n \\ \hline w_1 & a_{11} & \ldots & a_{1l} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_i & a_{i1} & \ldots & a_{il} & \ldots & a_{ik} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_j & a_{j1} & \ldots & a_{jl} & \ldots & a_{jk} & \ldots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_m & a_{m1} & \ldots & a_{ml} & \ldots & a_{mk} & \ldots & a_{mn} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cccccccc} \text{B} & v_1 & \ldots & w_j & \ldots & v_k & \ldots & v_n \\ \hline w_1 & c_{11} & \ldots & c_{1l} & \ldots & c_{1k} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_i & c_{i1} & \ldots & c_{il} & \ldots & c_{ik} & \ldots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_l & c_{j1} & \ldots & c_{jl} & \ldots & c_{jk} & \ldots & c_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_m & c_{m1} & \ldots & c_{ml} & \ldots & c_{mk} & \ldots & c_{mn} \end{array}$$

- Bezeichnungen:

  1. Umformung von $A \Rightarrow B$ heißt ein Austauschschritt.
  2. $p = a_{jl} \neq 0$: Pivoltelement
  3. Die Zeile, in der p steht, heißt Pivotzeile (PZ).
  4. Die Spalte, in der p steht, heißt Pivotspalte (PS).
  5. Die Zeile bzw. Spalte in B, die aus der Pivotzeile bzw. -spalte hervorgeht, heißt Pivotneuzeile bzw. -spalte.

- Regeln für den Austauschschritt:

  - (A0) Wahl des Pivotelements: $p = a_{jl} \neq 0$
  - (A1) Berechnung neues Pivotelement:

$$c_{jl} = \frac{1}{p}$$

  - (A2) Berechnung Pivotneuzeile:

$$c_{jk} = -\frac{a_{jk}}{p} \qquad \text{für } k \neq l$$

– (A3) Berechnung Pivotneuspalte:

$$c_{il} = \frac{a_{il}}{p} \qquad \text{für } i \neq j$$

– (A4) $c_{ik} = a_{ik} + a_{il} \cdot c_{jk}$ für $k \neq l$ und $i \neq j$

Satz 1:

Wird das Austauschverfahren auf eine reguläre $n \times n$-Matrix angewendet, so können sämtliche Zeilen gegen Spalten ausgetauscht werden. Das letzte Tableau liefert (ggf. nach Umsortieren) die inverse Matrix.

Beweis:

- Sei $w = A \cdot v$ mit $A = (a_{ij})_{n,n}$. Es existiert A^{-1} nach Voraussetzung, deshalb

  $$A^{-1} \cdot w = A^{-1} \cdot A \cdot v = E \cdot v = v$$

  Es existiert $v = B \cdot w$ mit $B = A^{-1}$.

  $$\begin{array}{c|ccc} & v_1 & \dots & v_n \\ \hline w_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ w_n & & & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|ccc} & w_1 & \dots & w_n \\ \hline v_1 & & & \\ \vdots & & A^{-1} & \\ v_n & & & \end{array}$$

  Werden die Pivotelemente in beliebiger Reihenfolge gewählt, so muss man im End-Tableau die richtige Reihenfolge $v_1, \dots, v_n$ der Zeilen bzw. $w_1, \dots, w_n$ der Spalten durch Umsortieren herstellen.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline w_1 & 1 & 2 & 3 \\ w_2 & 1 & 0 & 2 \\ w_3 & 2 & -1 & 4 \\ \hline & * & -2 & -3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|ccc} & w_1 & v_2 & v_3 \\ \hline v_1 & 1 & -2 & -3 \\ w_2 & 1 & -2 & -1 \\ w_3 & 2 & -5 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & * \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|ccc} & w_1 & v_2 & w_2 \\ \hline v_1 & -2 & 4 & 3 \\ v_3 & 1 & -2 & -1 \\ w_3 & 0 & -1 & 2 \\ \hline & 0 & * & -2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c|ccc} & w_1 & w_3 & w_2 \\ \hline v_1 & -2 & -4 & 11 \\ v_3 & 1 & 2 & -5 \\ v_2 & 0 & -1 & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|ccc} & w_1 & w_2 & w_3 \\ \hline v_1 & -2 & 11 & -4 \\ v_2 & 0 & 2 & -1 \\ v_3 & 1 & -5 & 2 \end{array}$$

Bemerkung: Können nur $r < n$ Austauschschritte durchgeführt werden, so existiert die inverse Matrix nicht. Also A singulär.

Satz 2: (Rangbestimmung)

Wird das Austauschverfahren auf eine $m \times n$-Matrix A mit Rang A = r angewendet, so bricht es genau nach dem r-ten Austauschschritt ab.

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} = A = A \cdot E = A \cdot \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} \text{ mit } e^i = (\delta_{i1}\delta_{i2}\dots\delta_{in})$$

- $\Leftrightarrow$ als Tableau:

$$\begin{array}{c|ccc} & e_1 & \dots & e_n \\ \hline a^1 & & & \\ \vdots & & A & \\ a^n & & & \end{array}$$

- Wegen Rang A = r gibt es die max. Anzahl von r linear unabhängigen Vektoren aus $\{a^1, \dots, a^m\}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a^1, \dots, a^r$ linear unabhängig.
- Also sind $a^{r+1}, \dots, a^m$ Linearkombinationen aus $a^1, \dots, a^r$. Deshalb ergibt das Austauschverfahren nach r Austauschschritten:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} & a^1 & \dots & a^r & e^{r+1} & \dots & e^n \\ \hline e^1 & & & & & & \\ \vdots & & B & & & C & \\ e^r & & & & & & \\ \hline a^{r+1} & & & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & F & & \vdots & & \vdots \\ a^m & & & & 0 & \dots & 0 \end{array}$$

  Wegen der auftretenden Nullmatrix (wg. linearer Abhängigkeit) kann nicht weiter ausgetauscht werden.

3.5 Lineare Gleichungssysteme

3.5.1 Aufgabenstellung

- Gegeben: m lineare Gleichungen für n Unbekannte $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \\ \Leftrightarrow A \cdot x &= b \end{aligned}$$

mit $A = (a_{ij})_{m,n}$, $x^T = (x_1\, x_2 \ldots x_n)$, $b^T = (b_1 \ldots b_m)$ und $a_{ij}, b_j, x_i \in K$, $m, n \in \mathbb{N}$ fest.

- Gesucht: Alle K^n, die das Gleichungssystem erfüllen. Dabei
  1. Angaben über Existenz der Lösungen
  2. Angaben über Gesamtheit aller Lösungen
  3. Methoden zur praktischen Berechung aller Lösungen
- Definitionen:
  - $A \cdot x = b \neq 0$ heißt inhomogenes lineares Gleichungssystem.
  - $A \cdot x = 0$ heißt homogenes lineares Gleichungssystem.
  - Zu $A \cdot x = b$ existiert $A \cdot x = 0$ das zugehörige homogene Gleichungssystem.
  - b heißt die inhomogene Spalte des Gleichungssystems.
  - A heißt Koeffizientenmatrix und $(A|b)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix.

3.5.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

$$\begin{aligned}(a_1\, a_2 \ldots a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n \\ &= b\end{aligned}$$

Satz 1:

$A \cdot x = b$ ist lösbar gdw. die inhomogene Spalte b Element Lin $(a_1, \ldots, a_n)$, d.h. gdw. Rang A = Rang $(A|b)$.

Folgerung:

Ein homogenes Gleichungssystem ist stets lösbar. Man nennt $x = 0$ die triviale Lösung von $A \cdot x = 0$. x ist die Lösung von $A \cdot x = b \Leftrightarrow y = 0$ ist Lösung von $y = A \cdot x - b$ (2).
Ziel: Lösungen von (2) mit Austauschverfahren herstellen

1. Anfangstableau

$$\begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & \ldots & x_n & -1 \\ \hline y_1 & & & & b_1 \\ \vdots & & A & & \vdots \\ y_m & & & & b_m \end{array}$$

2. möglichst viele y gegen x austauschen:

	$y_1 \;\dots\; y_r$	$x_{r+1} \dots\; x_n$	-1
x_1 $\vdots$ x_r	B	C	d
y_{r+1} $\vdots$ y_m	F	G=0	h

- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit entsteht Endtableau, wobei G=0 ist, da sonst weiter ausgetauscht werden könnte. r ist die Anzahl der möglichen Austauschschritte, Rang A = r.
- Vereinbarung:
  - Für r=n treten C und G nicht auf.
  - Für r=m treten F,G, und h nicht auf.

Satz 2:

1. Gleichungssystem lösbar $\Leftrightarrow$ $h = 0$ oder r=m
2. Gleichungssystem lösbar mit $r < n$, dann lautet eine allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix} - d$$

mit $t_1, \dots, t_{n-r} \in K$ beliebig.

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix}$$

d.h. zusammengefasst:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & C & \\ & & \\ & & \\ 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d \\ \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Gleichungssystem lösbar mit r=n, dann gibt es eindeutige Lösung $x = -d$

Als Spezialfall betrachten wir b=0, d.h. das zugehörige homogene Gleichungssystem und damit $d = 0$. Aus Satz 2 folgt: Ein homogenes Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ hat im Fall $r < n$ eine allgemeine Lösung

$$x_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & C & \\ & & \\ & & \\ 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix} = (c_1 \dots c_{n-r}) \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix} \text{ mit } c_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{ri} \\ \delta_{1i} \\ \vdots \\ \delta_{n-r,i} \end{pmatrix}$$

d.h. jede Lösung ist eine Linearkombination aus $c_1, \dots, c_{n-r} \in K^n$

$$x_h = t_1 \cdot c_1 + \dots + t_{n-r} \cdot c_{n-r} \qquad (6)$$

Satz 3:

Die Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ mit $A = (a_{ik})_{m,n}$ und Rang A =r bildet einen $(n-r)$-dimensionalen Untervektorraum des K^n, in dem $n-r$ linear unabhängige Fundamentallösungen $c_1, \dots, c_{n-r}$ nach (6) eine Basis bilden.

Beweis:

- Aus (6) folgt: $x_h \in Lin(c_1, \dots, c_{n-r})$
- Noch zu zeigen: $c_1, \dots, c_{n-r}$ Basis (Erzeugendensystem: klar) bleibt lineare Unahängigkeit zu zeigen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot c_1 + \dots \alpha_{n-r} \cdot c_{n-r} &= 0 \\ \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{n-r} \cdot \begin{pmatrix} c_{1,n-r} \\ \vdots \\ c_{r,n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \alpha_1 = 0 \dots \alpha_{n-r} &= 0 \end{aligned}$$

Also nur triviale Linearkombination möglich.

Alle Lösungen von Satz 2.2, die sogenannte allgemeine Lösung eines inhomogenen linearen Gleichungssystems, lauten:

$$x = \underbrace{t_1 \cdot c_1 + \dots + t_{n-r} \cdot c_{n-r}}_{x_h} - \underbrace{\begin{pmatrix} d \\ \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_s}$$

Satz 4:

Die allgemeine Lösung eines lösbaren inhomogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ besteht aus allen Summen der Form $x = x_h + x_s$, wobei x_s eine spezielle Lösung von $A \cdot x = b$ und x_h die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ ist.

Beispiele:

1.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Tableau:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & -1 \\ \hline y_1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ y_2 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ \hline & * & -1 & 0 & -5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & y_1 & x_2 & x_3 & -1 \\ \hline x_1 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ y_2 & -2 & 3 & 1 & 8 \\ \hline & 2 & -3 & * & -8 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & y_1 & x_2 & y_2 & -1 \\ \hline x_1 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ x_3 & 2 & -3 & 1 & -8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cc|c|c} & y_1 & y_2 & x_2 & -1 \\ \hline x_1 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ x_3 & 2 & 1 & -3 & -8 \end{array}$$

kein weiterer Austauschschritt möglich (Rang 2), $r = m < n$, also Gleichungssystem lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot t_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation: Schnittgerade zweier Ebenen

2.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Tableau:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -1 \\ \hline y_1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ y_2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ y_3 & 2 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ \hline & * & -1 & -2 & -3 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & x_2 & x_3 & x_4 & -1 \\ \hline x_1 & -1 & -2 & -3 & -1 \\ y_2 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ y_3 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ \hline & * & -3 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & x_3 & x_4 & -1 \\ \hline x_1 & 1 & -1 & -1 \\ x_2 & -3 & -2 & 0 \\ \hline y_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

keine weiteren Austauschschritte möglich (r=2), $r < m < n$. Lösbar, da $h = 0$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basisvektoren der Lösungsmenge des zugehörigen Systems: (Fundamentallösungen)

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Tableau:

$$\begin{array}{c|cc|c} & x_1 & x_2 & -1 \\ \hline y_1 & 3 & 1 & 1 \\ y_2 & 1 & -1 & 2 \\ y_3 & 2 & 2 & -1 \\ \hline & * & 1 & -2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|c|c} & x_2 & -1 \\ \hline y_1 & 4 & -5 \\ x_1 & 1 & -2 \\ y_3 & 4 & -5 \\ \hline & * & \frac{5}{4} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|c} & -1 \\ \hline x_2 & \frac{5}{4} \\ x_1 & -\frac{3}{4} \\ \hline y_3 & 0 \end{array}$$

Also $r = 2$ und $h = 0$. Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation: Schnittpunkt von 3 Geraden in der Ebene

4

Lineare Abbildungen

4.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften

- Vektorräume V,W über dem gleichen Körper K
- Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt eine lineare Abbildung (Homomorphismus), falls $\forall v, v' \forall \lambda \in K$:
  1. $f(v + v') = f(v) + f(v')$ (additiv)
  2. $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$ (homogen)
- Bemerkung: für $\lambda = 0$ in 2.:

  $$f(0_v) = 0 \cdot f(v) = 0_w$$

  $0_v \ldots$ Nullvevktor in V $\quad 0_w \ldots$ Nullvektor in W
- Bild(f) := $\{w \in W | \exists v \in W : f(v) = w\}$ (Bild von f)
- Kern(f) := $\{v \in V | f(v) = 0_w\}$ (Kern von f)

Lemma 1:

1. Bild von f ist Untervektorraum von W
2. Kern von f ist Untervektorraum von V

Beweis:

1. (a) $Bild(f) \neq \emptyset$, denn $0_w \in Bild(f)$, da es $0_v \in V$ gibt mit $f(0_v) = 0_w$.
   (b) Abgeschlossenheit der Addition: Es seien $w, w' \in Bild(f)$.

   $$w + w' = f(v) + f(v') = f(v + v')$$

   Also $w + w' \in Bild(f)$
   (c) Abgeschlossenheit bzgl. der Skalarmultiplikation: Es sei $w \in Bild(f), \lambda \in K$.

   $$\lambda \cdot w = \lambda \cdot f(v) = f(\lambda \cdot v)$$

   Also $\lambda \cdot w \in Bild(f)$.
2. (a) $Kern(f) \neq \emptyset$, denn $0_v \in Kern(f)$

(b) Abgeschlossenheit bzgl. Addition: $\forall v, v' \in Kern(f)$:

$$f(v + v') = f(v) + f(v') = 0_w + 0_w = 0_w$$

Also $v + v' \in Kern(f)$

(c) Abgeschlossenheit bzgl. der Skalarmultiplikation: $\forall v \in Kern(f), \lambda \in K$:

$$f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v) = \lambda \cdot 0_w = 0_w$$

Also $\lambda \cdot v \in Kern(f)$

Beispiele:

1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto y = A \cdot x$ mit $A = (a_{ij})_{m,n} \neq 0$.

   Additivität:
   $$f(x + x') = A \cdot (x + x') = A \cdot x + A \cdot x'$$

   Homogenität:
   $$f(\lambda \cdot x) = A \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \cdot A \cdot x = \lambda \cdot f(x)$$

   Zahlenbeispiel: m=n=2
   $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{\nvDash}, x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot x$$

   $$\begin{aligned} x_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto f(x_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\ x_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto f(x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ x_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto f(x_3) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Lineare Abbildung heißt zentrische Affinität.

   Allgemeiner: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : y = A \cdot x$ mit $A \neq 0$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Sei Gerade $g : x = a + \lambda \cdot v$, $v \neq 0$. Dann gilt:

   $$f(g) : y = A \cdot (a + \lambda \cdot v) = \underbrace{A \cdot a}_{a*} + \lambda \cdot \underbrace{v \cdot A}_{v*}$$

   Wenn $v* \neq 0$, dann f(g) wieder eine Gerade. Dann ist f sogar teilverhältnistreu, denn:

   - $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ legen Punkte x_1, x_2, x_3 auf g fest.
   - Teilverhältnis sei τ:

   $$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= \tau \cdot (x_2 - x_3) \\ \lambda_1 - \lambda_3 &= \tau \cdot (\lambda_2 - \lambda_3) \\ \tau &= \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} \end{aligned}$$

- Auf f(g) sei $\tau*$ das Teilverhätnis:

$$\begin{aligned} x_1 * - x_2 * &= \tau * \cdot (x_2 * - x_3 *) \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= \tau * \cdot (\lambda_2 - \lambda_3) \\ \tau * &= \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} \end{aligned}$$

  Also $\tau = \tau*$

2. Nullabbildung: $f(v) = 0_w$ für alle $v \in V$
3. Die identische Abbildung $id_v : V \to V : id(v) = v$ für alle $v \in V$ ist linear.
4. Eine lineare injektive Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bildet Geraden auf Geraden ab:

$$f(g) : y = a * + \lambda \cdot v * \text{ mit } v* = A \cdot v$$

   $v* \neq 0$, falls $Kern(f) = \{0_v\}$.

Definitionen:

- $Hom_K(V, W) = \{f | f : V \to W \text{ linear}\}$ ist die Menge aller linearen Abbildungen von V in W. $f \in Hom_K(V, W)$ heißt
  - ... Monomorphismus :⇔ f injektiv
  - ... Epimorphismus :⇔ f surjektiv
  - ... Isomorphismus :⇔ f bijektiv
  - ... Endomorphismus :⇔ V = W
  - ... Automorphismus :⇔ V=W und f bijektiv
- K-Vektorräume heißen isomorph :⇔ ∃ Isomorphismus

Lemma 2:

$f : V \to W$ linear, dann gilt:

$$f \text{ injektiv } \Leftrightarrow Kern(f) = \{0_v\}$$

Beweis:

1. „⇒“
   - Angenommen f injektiv, d.h. $\forall v, v' \in V : f(v) = f(v') \Rightarrow v = v'$ und $v \neq 0_v \in Kern(f)$. Dann

$$f(0_v) = 0_w \qquad f(v) = 0_w \Rightarrow f(0_v) = f(v)$$

     Widerspruch zur Injektivität, falls $0_v \neq v$.
   - Also $v = 0_v$ im Widerspruch zur Annahme, dass $v \neq 0_v$.
   - Damit $Kern(f) = \{0_v\}$

2. „$\Leftarrow$“

   - $Kern(f) = \{0_v\}$. Beliebige $v, v' \in V$ mit $f(v) = f(v')$.

$$\begin{aligned} f(v) - f(v') &= 0_w \\ f(v - v') &= 0_w = f(0_v) \\ \Rightarrow v - v' &= 0_v \\ \Rightarrow v &= v' \end{aligned}$$

   Also f injektiv.

Lemma 3:

$Hom_K(V, W)$ ist ein K-Vektorraum.

Beweis:

- Sei $Abb(V, W) = \{f | f : V \to W\}$ mit Addition $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und Skalarmultiplikation $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.
- Wegen 1.4 Beispiel 3 ist Abb(V,W) mit Addition eine abelsche Gruppe und damit Vektorraum-Axiom (V1) erfüllt.
- Die Vektorraumaxiome (V2) lassen sich leicht nachrechnen. Also Abb(V,W) ein K-Vektorraum.
- Es bleibt zu zeigen: Abgeschlossenheit bzgl. der Addition und Skalarmultiplikation in $Hom_K(V, W)$

  1. Additivität der Addition:

$$\begin{aligned} (f + g)(v + v') &= f(v + v') + g(v + v') = f(v) + f(v') + g(v) + g(v') \\ &= (f + g)(v) + (f + g)(v') \end{aligned}$$

  2. Additivität bei Skalarmultiplikation:

$$(\lambda \cdot f)(v + v') = \lambda \cdot f(v + v') = \lambda \cdot f(v) + \lambda \cdot f(v') = (\lambda \cdot f)(v) + (\lambda \cdot f)(v')$$

  3. Homogenität der Addition:

$$(f + g)(\lambda \cdot v) = f(\lambda \cdot v) + g(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (f(v) + g(v)) = \lambda \cdot (f + g)(v)$$

  4. Homogenität der Skalarmultiplikation:

$$(\lambda \cdot f)(\mu \cdot v) = \lambda \cdot f(\mu \cdot v) = \mu \cdot \lambda \cdot f(v) = \mu \cdot (\lambda \cdot f)(v)$$

Lemma 4:

Es sei $f \in Hom_K(V, W), v_i \in V, \lambda_i \in K$ $(i = 1, \ldots, s)$. Dann gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot f(v_i)$$

Beweis: durch Induktion

- Induktionsanfang: s=2

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2) &= f(\lambda_1 \cdot v_1) + f(\lambda_2 \cdot v_2) \\ &= \lambda_1 \cdot f(v_1) + \lambda_2 \cdot f(v_2) \end{aligned}$$

- Induktionsschritt: $k \to k+1$

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \cdot v_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot v_i\right) + f(\lambda_{k+1} \cdot v_{k+1}) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot v_i\right) + \lambda_{k+1} \cdot f(v_{k+1}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot f(v_i)\right) + \lambda_{k+1} \cdot f(v_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \cdot f(v_i) \end{aligned}$$

Satz 1: Festlegung einer linearen Abbildung durch die Bilder einer Basis

Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V. Für beliebige Vektoren $w_1, \ldots, w_n \in W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dabei gilt:

$$Lin(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = Bild(f)$$

Beweis:

1. Existenz von f

   - Ist $\{v_1, \ldots, v_r\}$ mit $r \leq n$ mit $f(v_i) = w_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Wir ergänzen $\{v_1, \ldots, v_r\}$ zu einer Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ und wählen $w_{r+1} = \ldots = w_n = 0$.
   - Sei $v \in V$, dann $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i$ mit eindeutig bestimmten λ_i (Darstellungssatz). Sei

     $$f(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot w_i$$

     Behauptung: f linear

     (a) $\forall v, v' \in V$

     $$\begin{aligned} v + v' &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda_i') \cdot v_i \\ f(v + v') &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda_i') \cdot f(v_i) \\ f(v) + f(v') &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(v_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \cdot f(v_i) \\ &= f(v + v') \end{aligned}$$

(b) $\forall v \in V, \lambda \in K$:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot v &= \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i \\ \Rightarrow f(\lambda \cdot v) &= \lambda \cdot f(v) \end{aligned}$$

2. Eindeutigkeit:

   - Behauptung: Sei $\{v_1, \dots, v_s\}$ ein Erzeugendensystem von V, dann gibt es für beliebige Vektoren $w_1, \dots, w_s \in W$ höchstens eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$.
   - Beweis: Seien $f, g : V \to W$ linear mit $f(v_i) = w_i = g(v_i)$. Da $\{v_1, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem ist $\forall v \in V \, \exists \lambda_i \in K : v = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot v_i$. Somit gilt mit Lemma 4:

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot f(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot g(v_i) \\ &= g\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot v_i\right) = g(v) \end{aligned}$$

3. (a) Wenn $w \in Bild(f)$, dann existiert $v \in V$ mit $f(v) = w$. Wegen $f(v) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot v_i$ mit s=n gilt:

$$w = f(v) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot f(v_i) \in Lin(f(v_1), \dots, f(v_n))$$

   Also $Bild(f) \subseteq Lin(f(v_1), \dots, f(v_n))$.

   (b) $w \in Lin(f(v_1), \dots, f(v_n))$, dann:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(v_i) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i\right) = f(v) \end{aligned}$$

   Es existiert also ein $v \in V$ mit $f(v) = w$. Also $w \in Bild(f)$. Somit $Lin(f(v_1), \dots, f(v_n)) \subseteq Bild(f)$

Satz 2: Charakterisierung einer lin. Abbildung durch die Bilder von Basisvektoren

Sei $f \in Hom_K(V, W)$ mit $w_i = f(v_i)$ für $i = 1, \dots, n$, wobei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V.

1. $\{w_1, \dots, w_n\}$ linear unabhängig $\Leftrightarrow$ f injektiv (Monomorphismus)
2. $\{w_1, \dots, w_n\}$ Erzeugendensystem $\Leftrightarrow$ f surjektiv (Epimorphismus)

3. $\{w_1, \ldots, w_n\}$ Basis $\Leftrightarrow$ f bijektiv (Isomorphismus)

Beweis:

1. „$\Rightarrow$“

   - $\{w_1, \ldots, w_n\}$ seien linear unabhängig und f(v)=f(v') für beliebige $v, v' \in V$. Es sei

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i \qquad v' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \cdot v_i$$

   Dann gilt:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \cdot v_i\right) \\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i\right) - f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \cdot v_i\right) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(v_i) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \cdot f(v_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_i') \cdot \underbrace{f(v_i)}_{w_i} &= 0 \end{aligned}$$

   Da $\{w_1, \ldots, w_n\}$ linear unabhängig: nur triviale Linearkombination des Nullvektors möglich.

$$\lambda_i - \lambda_i' = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_i = \lambda_i'$$

   Also $v = v'$

   „$\Leftarrow$“: Übung

2. „$\Rightarrow$“

   - $\{w_1, \ldots, w_n\}$ Erzeugendensystem von W, also $\forall w \in W : w \in Lin(w_1, \ldots, w_n)$:

$$w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot w_i$$

   (nicht notwendig eindeutig).

   - Sei $v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot v_i$, dann:

$$f(v) = f(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot v_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot f(v_i) = w$$

   d.h. v ist Urbild von W, also f surjektiv.

   „$\Leftarrow$“: Übung

3. Klar mit 1. und 2.

Folgerung 1:

Wenn die Bilder $w_1, \ldots, w_n$ einer Basis von V linear unabhängig sind (bzw. ein Erzeugendensystem bilden) bei einer linearen Abbildung f, dann sind die Bilder jeder Basis von V linear unabhängig (bzw. bilden ein Erzeugendensystem).

Folgerung 2:

Wenn dim V = dim W = n, dann gibt es zu jeder Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V und jeder Basis $w_1, \ldots, w_n$ von W genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ (i=1,...,n), wobei f ein Isomorphismus.

Folgerung 3:

Je zwei Basen eines Vektorraums V können durch genau eine lineare Abbildung ineinander überführt werden (Folgerung 2 mit V=W). Diese lineare Abbildung ist ein Automorphismus, der hier Basis-Transformation heißt.

Folgerung 4: Fundamentalsatz für endlich-dimensionale K-Vektorräume

Je zwei K-Vektorräume der gleichen Dimension sind isomorph.

Beweis:

- dim V = dim W = n, also $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V, $\{w_1, \ldots, w_n\}$ Basis von W
- Mit Folgerung 2: $\exists$ Isomorphismus $f : V \to W$, d.h. v und w sind isomorph.

Folgerung 5: Charakterisierung aller endlich-dimensionalen K-Vektorräume

Sei V ein K-Vektorraum mit dim V = n. Dann ist V isomorph zu K^n ($V \cong K^n$).

Satz 3: (Dimensionsformel)

$f \in Hom_K(V, W)$, dim V=n. Dann:

$$\dim V = \dim Bild(f) + \dim Kern(f)$$

Beweis:

- dim V=n, $Kern(f) \subseteq V$. Also $\dim Kern(f) = d \leq n$.
- Sei $\{v_1, \ldots, v_d\}$ Basis von Kern(f). Nach Basisergänzungssatz: $\{v_1, \ldots, v_d\}$ wird ergänzt zu $\{v_1, \ldots, v_d, \ldots, v_n\}$ als Basis von V.
- Es gilt:

$$\begin{aligned} f(v_i) &= 0 \qquad \text{für } i = 1, \ldots, d \\ f(v_i) &= w_i \qquad \text{für } i = d+1, \ldots, n \end{aligned}$$

- Wenn $w \in Bild(f)$, dann existiert $v \in V$ mit f(v)=w.

$$\begin{aligned} w &= f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot w_i = \sum_{i=d+1}^{n} \lambda_i \cdot w_i \end{aligned}$$

Also $w \in Lin(w_{d+1}, \ldots, w_n)$.

- Wir zeigen, dass $w_{d+1}, \ldots, w_n$ linear unabhängig sind, also Basis des Bildes von f:
  - Es sei

$$\begin{aligned} \sum_{i=d+1}^{n} \mu_i \cdot w_i &= \sum_{i=d+1}^{n} \mu_i \cdot f(v_i) = 0 \\ &= f\underbrace{\left(\sum_{i=d+1}^{n} \mu_i \cdot v_i\right)}_{\in Kern(f)} = 0 \end{aligned}$$

  - Kern(f) hat die Basis $\{v_1, \ldots, v_d\}$. Darstellungssatz:

$$\begin{aligned} \sum_{i=d+1}^{n} \mu_i \cdot v_i &= \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \cdot v_i \\ \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \cdot v_i + \sum_{i=d+1}^{n} -\mu_i \cdot v_i &= 0 \end{aligned}$$

  Wegen der linearen Unabhängigkeit: $\lambda_i = \mu_i = 0$.

- Also $\dim V = \dim Kern(f) + \dim Bild(f)$

4.2 Darstellungen linearer Abbildungen durch Matrizen

- Voraussetzungen: V,W K-Vektorräume, $f : V \to W$ $(f \in Hom_K(V, W))$, dim V = n, dim W = m
- Es sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V, $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ Basis von W.

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

- ${}_BA_C = (a_{ij})_{m,n}$ mit Koeffizienten a_{ij} heißt Darstellungsmatrix von f bzgl. B und C.
- Bemerkung: Die Koeffizienten des Bildes des j-ten Basisvektors stehen in der j-ten Spalte der Darstellungsmatrix.

Satz 4: (Darstellungssatz)

Durch die oben gegebene Formel wird eine Darstellungsmatrix zu $f \in Hom_K(V, W)$ definiert. Umgekehrt gehört zu einer Matrix $(a_{ij}) \in K^{m \times n}$ bei festen Basen B und C genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$, die durch die obige Formel definiert wird.

Beweis:

- Es seien B, C und $(a_{ij})_{m,n}$ gegeben, dann f durch Formel definiert. Wegen Satz 1 ist damit f für alle $v \in V$ bestimmt.

Beispiele:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (3x - 2y, x + y)$

   (a) Wähle $B = C = \{(1, 0), (0, 1)\}$ (also $v_1 = w_1$,$v_2 = w_2$).

   $$\begin{aligned} f(v_1) &= f((1,0)) = (3,1) = a_{11} \cdot v_1 + a_{21} \cdot v_2 \\ \Rightarrow a_{11} &= 3 \qquad a_{21} = 1 \\ f(v_2) &= f((0,1)) = (-2,1) = a_{12} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 \\ \Rightarrow a_{12} &= -2 \qquad a_{22} = 1 \end{aligned}$$

   Darstellungsmatrix:
   $$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Wähle $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ und $C = \{(3, 1), (-2, 1)\}$

   $$\begin{aligned} f(v_1) &= (3,1) = a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2 \\ \Rightarrow a_{11} &= 1 \qquad a_{21} = 0 \\ f(v_2) &= (-2,1) = a_{12} \cdot w_1 + a_{22} \cdot w_2 \\ \Rightarrow a_{12} &= 0 \qquad a_{22} = 1 \end{aligned}$$

   Darstellungsmatrix:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $f : V \to W$ sei Identität id auf V, d.h. $f(v) = id(v) = v$. Dann gilt bzgl. der Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$:

   $$id(v_j) = 0v_1 + \ldots + 0v_{j-1} + v_j + 0v_{j+1} + \ldots + v_n$$

   Darstellungsmatrix:

   $$_BA_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = E_n$$

3. (a) Die Koordinatenvektordarstellung

$$\kappa_B : V \to K^n : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i \mapsto x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ als Basis des K-Vektorraums V ist ein Isomorphismus.
Wie lautet die Darstellungsmatrix, wenn $C = \{e_1, \dots, e_n\}$ als Basis des K^n gewählt wird?

$$\begin{aligned} v_j &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{j-1} + v_j + 0 \cdot v_{j+1} + \dots + 0 \cdot v_n \\ \kappa_B(v_j) &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T = e_j \\ {}_B A_C &= E_n \end{aligned}$$

(b) Der Basisisomorphismus $i_B = \kappa_B^{-1}$

$$x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto i_B(x) = v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i$$

Es gilt: $i_B(e_j) = v_j$ für $j = 1, \dots, n$. Für $v \in V$ beliebig:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j \;\Rightarrow\; \kappa_B(v) = x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \\ f(v) &= f(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot f(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \lambda_j \right)}_{=: y_i} \cdot w_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot w_i \end{aligned}$$

Dabei gilt:

$$\kappa_C(f(v)) = \kappa_C(w) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y \in K^m$$

Zur Erklärung:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \lambda_j}_{A \cdot x} = \underbrace{y_i}_{y} \qquad (12)$$

Satz 5:

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix $A =_B A_C$. Falls $w = f(v)$ und $\kappa_B(v) = x$, $\kappa_C(w) = y$, dann gilt $y = A \cdot x$.

4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Drehung um den Nullpunkt durch den Winkel α. Basis $B = \{e_1, e_2\}$

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= a_{11} \cdot e_1 + a_{21} \cdot e_2 \\
&= \cos\alpha \cdot e_1 + \sin\alpha \cdot e_2 \\
f(e_2) &= -\sin\alpha \cdot e_1 + \cos\alpha \cdot e_2 \\
{}_B A_B &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wegen (12) gilt für beliebigen Vektor $x = (\lambda_1, \lambda_2)^T \in \mathbb{R}^2$ und $y = \kappa_B(f(x))$:

$$\begin{aligned}
y &= {}_B A_B \cdot x \\
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot \cos\alpha - \lambda_2 \cdot \sin\alpha \\ \lambda_1 \cdot \sin\alpha - \lambda_2 \cdot \cos\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Satz 6:

Sei A eine Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $f : V \to W$, dann gilt:

$$\dim Bild(f) = Rang\, A$$

Bemerkung: Dabei ist Rang A unabhängig von Basen für eine Darstellungsmatrix A von f und heißt deshalb auch Rang f.

Beweis:

- Es sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V, $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ Basis von W, $A =_B A_C$ Darstellungsmatrix von f.
- Es ist $f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot w_i$ und $A = (a_1 \ldots a_n)$ mit $a_j = (a_{1j} \ldots a_{mj})$.
- $U = Lin(a_1, \ldots, a_n)$ ist Untervektorraum von K^m und $W' = Lin(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ ist Untervektorraum von W.
- Die Abbildung $i_C : U \to W'$ mit $i_C(e_j) = f(v_j)$ für $j = 1, \ldots, n$ ist der Basisisomorphismus (linear und bijektiv) bzgl. C. Also $U \cong W'$ und nach Satz 2 gilt $\dim U = \dim W'$.
- W' = Bild(f) nach Satz 1. Also nach Rang-Definition: $Rang A = \dim U = \dim W' = \dim\, Bild(f)$.

Satz 7: (Charakterisierung von Isomorphismen)

Sei A Darstellungsmatrix von $f \in Hom_K(V, W)$ mit $\dim V = \dim W = n$. Dann gilt: f Isomorphismus $\Leftrightarrow$ Rang A = n.

4.3 Komposition linearer Abbildungen

$$\left.\begin{cases} V \\ W \\ Z \end{cases}\right. \text{K-Vektorraum mit Basis} \begin{cases} B = \{v_1, \ldots, v_n\} \\ C = \{w_1, \ldots, w_m\} \\ D = \{z_1, \ldots, z_s\} \end{cases}$$

Es seien $f : V \to W, g : W \to Z$ lineare Abbildungen, ${}_BA_C$ Darstellungsmatrix von f bzgl. Basen B und C, ${}_CA_D$ Darstellungsmatrix von g bzgl. Basen C und D.

Satz 8:

Die Komposition $g \circ f : V \to Z$ von f und g ist

1. eine lineare Abbildung
2. besitzt die Darstellungsmatrix ${}_CB_D \cdot_B A_C$ bzgl. der Basen B und D.

Beweis:

1. • Additivität

$$\begin{aligned} (g \circ f)(u+v) &= g(f(u+v)) = g(f(v) + f(u)) \\ &= g(f(u)) + g(f(v)) = (g \circ f)(u) + (g \circ f)(v) \end{aligned}$$

• Homogenität:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\lambda \cdot u) &= g(f(\lambda \cdot u)) = g(\lambda \cdot f(u)) \\ &= \lambda \cdot g(f(u)) = \lambda \cdot (g \circ f)(u) \end{aligned}$$

2. • Wegen (9) ist

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i \qquad g(w_i) = \sum_{k=1}^{s} b_{ki} \cdot z_k$$

mit $(a_{ij}) =_B A_C$ und $(b_{ki}) =_C B_D$.

• Ansatz: $(g \circ f)(v_j) = \sum_{k=1}^{s} c_{kj} \cdot z_k$ mit (c_{kj}) gesucht.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(v_j) &= g(f(v_j)) = g\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot g(w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^{s} b_{ki} \cdot z_k\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{s} a_{ij} \cdot b_{ki} \cdot z_k \\ &= \sum_{k=1}^{s} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} \cdot a_{ij}\right)}_{=:c_{kj}} \cdot z_k \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt: $(c_{kj}) =_C B_D \cdot_B A_C$.

Beispiel:

1.
   - $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: Drehung um 0 durch α mit Darstellungsmatrix A (Bsp.4)
   - $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: Drehung um 0 durch β mit Darstellungsmatrix B.
   - Darstellungsmatrix der Drehung um 0 durch $\alpha + \beta$:

$$\begin{aligned} g \circ f \leftrightarrow B \cdot A &= \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta & -\sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta \\ \cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta & -\sin\alpha\cdot\sin\beta + \cos\alpha\cdot\cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.4 Basistransformation

- Sind $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $B' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$ Basen von V, dann gibt es eindeutig bestimmte $s_{ki} \in K$ mit

$$v_i' = \sum_{k=1}^{n} s_{ki} \cdot v_k \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

  $S = (s_{ki}) \in K^{n\times n}$ heißt Übergangsmatrix von B nach B'.

- Wir betrachten den Automorphismus $id : V \to V : v \mapsto id(v) = v$ und fragen nach seiner Darstellungsmatrix ${}_BA_{B'}$.

$$\begin{aligned} v_j \mapsto id(v_j) = v_j &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot v_i' \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij} \cdot s_{ki} \cdot v_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} s_{ki} \cdot a_{ij} \cdot v_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} \cdot v_k \end{aligned}$$

  Es gilt: $S \cdot_B A_{B'} = E_n$. Also $S =_B A_{B'}$ bzw. $S^{-1} =_B A_{B'}$.

- Bemerkungen:
  1. Da id ein Automorphismus ist, gilt nach Satz 7 Rang ${}_BA_{B'} = n$, was auch durch die Existenz von ${}_BA_{B'}^{-1}$ bestätigt wird.
  2. $S =_{B'} A_B$ ist die Darstellungsmatrix von id bzgl. B' und B.

Satz 9: (Transformation der Darstellungsmatrix bei Basistransformation)

- Sei $f : V \to W \in Hom_K(V, W)$, B,B' Basen in V, C,C' Basen in W, ${}_BA_C$ Darstellungsmatrix von f bzgl. der Basen B und C, ${}_{B'}A_{C'}$ Darstellungsmatrix von f bzgl. der Basen B' und C'. Dann gibt es invertierbare Matrizen T und S, sodass
$$T^{-1} \cdot_B A_C \cdot S =_{B'} A_{C'} \qquad (16)$$
- Sonderfall $f : V \to V$ (Endomorphismus): Man wählt $V = W$ und $B = C$, $B' = C'$. Dann $S^{-1} \cdot_B A_B \cdot S =_{B'} A_{B'}$ mit der Übergangsmatrix S von B nach B'.

Beweis: siehe Mitschriften (Diagramm)

Lemma:

$f : V^{(n)} \to W^{(m)} \in Hom_K(V, W)$ mit Rang f=r. Dann gibt es Basen P und Q von V und W mit
$${}_PA_Q = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis:

- $\{w_1, \dots, w_r\}$ Basis von Bild(f) wegen dim Bild(f)=Rang f = r. Es sei $Q = \{w_1, \dots, w_r, \dots, w_m\}$ Basis von W (Basisergänzungssatz). Es gilt:
$$\begin{aligned} \dim V &= \dim Kern(f) + \dim Bild(f) \\ n &= r + \dim Kern(f) \end{aligned}$$
- Es sei $P = \{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_k\}$ mit r+k=n (k=dim Kern(f)) mit $u_1, \dots, u_k \in Kern(f)$.
- Dann $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, \dots, r$:
$$\begin{aligned} f(v_i) &= w_i = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot w_k \qquad (i = 1, \dots, r) \\ &= 0 \cdot w_1 + \dots + 0 \cdot w_{k-1} + w_k + 0 \cdot w_{k+1} + \dots + 0 \cdot w_n \\ f(u_i) &= 0 \qquad (i = 1, \dots, k) \end{aligned}$$

  Bzgl. P und Q ist die Darstellungsmatrix:
$${}_PA_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Definition:

Matrizen A und A' heißen äquivalent bzw. ähnlich, wenn invertierbare Matrizen T und S existieren, sodass $T^{-1} \cdot A \cdot S = A'$ bzw. $S^{-1} \cdot A \cdot S = A'$.

Satz 10:

Seien $A, A' \in K^{m \times n}$. Dann sind äquivalente Aussagen:

1. A und A' sind äquivalent.
2. A und A' beschreiben bzgl. geeigneter Basen dieselbe lineare Abbildung
3. Rang A = Rang A'

Beweis:

1. „a) $\Leftrightarrow$ b)"
   - Es gibt invertierbare Matrizen T und S, sodass $A' = T^{-1} \cdot A \cdot S$. Interpretiere $A =_B A_C$ (f) als Darstellungsmatrix von $f : V \to W$; T als Übergangsmatrix von C nach C', S als Übergangsmatrix von B nach B'. Dann sagt (16): $A' =_{B'} A_{C'}$ und beschreibt ebenfalls f.
   - Umgekehrt: Wenn f durch (16) beschrieben, dann existieren T und S nach Satz 9. Also A und A' äquivalent.
2. „b) $\Rightarrow$ c)": Klar wegen Satz 6.
3. „c) $\Rightarrow$ b)":
   - Wegen des Darstellungssatzes:

     $$\begin{aligned} A &= {}_BA_C \leftrightarrow f : V \to W \text{ mit Basen B und C} \\ A' &= {}_{B'}A_{C'} \leftrightarrow f : V \to W \text{ mit Basen B' und C'} \end{aligned}$$

   - Rang A = Rang A' nach Voraussetzung, dann Rang f = Rang f' =: r. Mit Lemma gibt es P und Q (Basen) mit

     $${}_PA_Q = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

     als Darstellungsmatrix von f.
   - Es gibt ebenso P' und Q' mit

     $${}_{P'}A_{Q'} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

     als Darstellungsmatrix von f'.
   - Bzgl. geeigneter Basen sind die Darstellungsmatrizen von f und f' gleich, also f=f'.

Anwendung der Basistransformation in der Theorie der lin. GLS:

$$\begin{aligned} {}_{B'}A_{C'} &= T^{-1} \cdot_B A_C \cdot S \\ y &= {}_B A_C \cdot x \qquad \text{mit}\, \kappa_B(v) = x \qquad \kappa_C(w) = y \\ x &= S \cdot x' \qquad y = T \cdot y' \end{aligned}$$

Bekanntlich:

$$Kern(f) = \{v \in V : f(v) = 0_w\}$$

Anwendung der Koordinatenvektorabbildung für $A \in K^{m \times n}$:

$$KernA := \{x \in K^n : A \cdot x = 0\}$$

Kern A ist die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems, dessen Koeffizientenmatrix A eine Darstellungsmatrix einer lineare Abbildung f ist.

$$Kernf = \{v \in V : v = i_B(X), x \in KernA\}$$

Es gilt für $A' \in K^{m \times n}$:

$$KernA' = \{x' \in K^n : A' \cdot x' = 0\}$$

Sei B'=P und C'=Q, die nach (18) existierenden Basen, mit

$$A' =_{B'} A_{C'} =_P A_Q = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $r = n - k = Rangf$. Dann ist $A' = T^{-1} \cdot_B A_C \cdot S$, wobei S als Übergangsmatrix von B nach B' und T als Übergangsmatrix von C nach C'. Es gilt:

$$\begin{aligned} x' \in Kern(A') &\Leftrightarrow A' \cdot x' = 0 = T^{-1} \cdot A \cdot S \cdot x \\ &\Leftrightarrow T^{-1} \cdot A \cdot x = 0 \\ &\Leftrightarrow A \cdot x = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in Kern(A) \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} A' \cdot x' = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix} \qquad (t_i \in K \text{beliebig}) \\ &\Leftrightarrow x = S \cdot x' = (s_1 \ldots s_n) \cdot x' = t_1 \cdot s_{r+1} + \ldots + t_{n-r} \cdot s_n \\ &\Leftrightarrow x \in Lin(s_{r+1}, \ldots, s_n) \end{aligned}$$

Satz 11:

Wenn $A \in K^{m\times n}$ und Rang A=r, dann gibt es invertierbare Matrizen S und T, sodass

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot S$$

und die letzten (n-r) Spalten von S bilden eine Basis von Kern A.

Wie berechnet man T und S? $\longrightarrow$ Normalformproblem (s. später)

Beispiele:

1. Basistransformation im $\mathbb{R}^3$ mit $B' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ Basis des $\mathbb{R}^3$ und $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ als Basis des $\mathbb{R}^3$. Welche Darstellung hat u bzgl. B'?

$$\begin{aligned} u &= 4 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2 + 11 \cdot e_3 \\ v_1' &= 2 \cdot e_1 - 2 \cdot e_2 - e_3 \\ v_2' &= 4 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 - 4 \cdot e_3 \\ v_3' &= e_1 + 2 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3 \end{aligned}$$

Übergangsmatrix von B nach B'

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$x' = S^{-1} \cdot x = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ -13 \\ 26 \end{pmatrix}$$

mit

$$S^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -1 \\ 3 & \frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

Anwendung des Basisisomorphismus:

$$u = i_B(x') = \frac{27}{7} \cdot v_1' - \frac{13}{7} \cdot v_2' + \frac{26}{7} \cdot v_3'$$

2. lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei festgelegt durch

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \cdot e_i \qquad (j = 1, 2, 3)$$

mit

$$A =_B A_B = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sei gegeben. Es ist Rang A=2 (da $a_1 + a_2 = a_3$). Für $A' =_{B'} A_{B'} = S^{-1} \cdot A \cdot S$ mit S als Übergangsmatrix von B nach B' (siehe 6.) gilt:

$$A' = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 24 & 14 & -19 \\ -\frac{67}{7} & -7 & 12 \\ \frac{11}{3} & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Es kann der Kern von A $= \{x \in \mathbb{R}^3 : A \cdot x = 0\}$ berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c_1 ist einziger Fundamentallösungsvektor der Basis von Kern A, da dim $Kern(f) = 3 - 2 = 1$.

$$KernA = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \lambda \cdot c_1, \lambda \in \mathbb{R}$$

3. $\mathbb{P}_2$: reeller Vektorraum der Polynome vom Höchstgrad 2 über [0,1] ($\longrightarrow$ 2.2.1, Beispiel 4)

   Behauptung: $v_1 = (1-t)^2, v_2 = 2 \cdot (1-t) \cdot t, v_3 = t^2$ ist als $\{v_1, v_2, v_3\} = B$ ist Basis des $\mathbb{P}_2$. (Bernstein-Polynom-Basis)

   Beweis: Wir zeigen die Existenz einer Basistransformation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Zu zeigen: S invertierbar (Rang S =3).

5 Determinanten

5.1 Einführung

- Lösung linearer Gleichungssysteme als Funktion der Koeffizienten
- Entscheidung über Rang von $A^{n \times n} < n$ durch Nullabfrage

2-reihige Determinanten:

- Rechenvorschrift (2.3.2):

$$< x^{\perp}, y >= x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$$

- Sei $A \in K^{2 \times 2}$. Die Zahl

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

  heißt die 2-reihige Determinante der 2-reihigen Matrix A.

- Geometrische Deutung: $\mathbb{R}^2$, $a = (a_1 a_2)^T, b = (b_1 b_2)^T$.

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 = 0,5 \cdot b_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 \\ F_3 &= F_4 = 0,5 \cdot a_1 \cdot a_2 \\ \Rightarrow F &= (a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2) - 2F_1 - 2F_3 \\ &= a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{aligned}$$

  F ist der Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms.

- Eigenschaften:
  1. $\det A = 0 \Leftrightarrow$ a, b linear abhängig
  2. $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ a, b linear unabhängig $\Leftrightarrow$ Rang A = 2
  3. $\det A = F > 0$, wenn $0 < \varphi < \pi$
  4. $\det A = F < 0$, wenn $-\pi < \varphi < 0$

3-reihige Determinanten:

- Es sei $a = (a_1 a_2 a_3)^T, b = (b_1 b_2 b_3)^T, c = (c_1 c_2 c_3)^T$.

- In 2.3.3 wurde das Vektorprodukt definiert:

$$\begin{aligned} a \times b &= \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} \\ \|a \times b\| &= F_{Pl} \end{aligned}$$

- Das Skalarprodukt von $a \times b$ ist

$$\begin{aligned} V_S &= < a \times b, c > \\ &= (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot c_1 + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) \cdot c_2 + (a_1 \cdot b_2 - a_1 \cdot b_1) \cdot c_3 \end{aligned}$$

  das Spatprodukt.

- a,b,c spannen einen Spat (Parallelepiped) auf mit dem vorzeichenfähigen Volumen V_S.

  Beweis:

  - $F = \|a \times b\|$ sei die Grundfläche des Spates. Nach der Volumenformel für Prismen mit der Höhe h gilt:

    $$V_2 = F \cdot h$$

    Die Höhe h lässt sich über die Abstandsformel nach Hesse (2.3.7) berechnen, wobei ε durch 0 von a und b aufgespannt wird (Normalenvektor n):

    $$\begin{aligned} h &= d(c, \varepsilon) \\ n &= a \times b \\ \Rightarrow h &= \frac{< n, c - 0 >}{\|n\|} \\ \Rightarrow V_S &= \frac{\|a \times b\|}{\|n\|} \cdot < a \times b, c > = < a \times b, c > \end{aligned}$$

- Definition: Die Zahl $\det A$ ist definiert:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = < a \times b, c >$$

  und heißt 3-reihige Determinante der 3-reihigen Matrix A.

- Eigenschaften:

  1. $\det A = 0 \Leftrightarrow$ a, b, c linear abhängig
  2. $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ a, b, c linear unabhängig $\Leftrightarrow$ Rang A = 3
  3. $\det A = V_S > 0$, wenn a,b,c ein Rechtsdreibein bilden
  4. $\det A = V_S < 0$, wenn a,b,c ein Linkssystem bilden
  5. $\det(a, b, c) = < a \times b, c > = < c, \times a, b > = \det(c, a, b)$

- Berechnungsschema s. Mitschriften

Rekursive Definition der Determinante einer n-reihigen Matrix $A^{n\times n}$:

1. Für n=1 sei $\det A := a_{11}$.
2. Für $n \geq 2$ sei
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det A_{i1}$$
wobei A_{i1} die (n-1)-reihige Matrix bezeichnet (Streichungsmatrix), die aus A durch Entfernen der ersten Spalte und i.ten Zeile entsteht.

Bemerkung:

- Wendet man die Formel rekursiv auf $\det A_{i1}$ an, so ergibt sich zum Schluss die Leibnizsche Determinantenformel :
$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{1,\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\pi(n)}$$
wobei S_n die Gruppe der Permutationen der Menge $\{1, \ldots, n\}$, d.h. die Gruppe der bijektiven Abbildungen dieser Menge auf sich.
- Ist $\pi : (1, 2, \ldots, n) \mapsto (k_1, \ldots, k_n)$ eine Permutation, so heißt die Anzahl der Elemente k_j mit $j < i$ und $k_j > k_i$ der Fehlstand $\varepsilon(k_i)$.
- Die Summe der Fehlstände aller Elemente von π heißt der Fehlstand von π:
$$f(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(k_i)$$
Beispiel:
$$\pi : (1, 2, 3, 4, 5) \mapsto (4, 5, 3, 1, 2)$$
$$\varepsilon(1) = 3 \ \varepsilon(2) = 3 \ \varepsilon(3) = 2 \ \varepsilon(4) = 0 \ \varepsilon(5) = 0 \ f(\pi) = 8$$
Damit definiert man:
$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(\pi) &= \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \text{falls } f(\pi) \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases} \\ &= (-1)^{f(\pi)} \end{aligned}$$

Satz 1:

Für eine obere Dreiecksmatrix gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Folgerung:

$$\det E_n = 1$$

5.2 Eigenschaften von Determinanten

Satz 2:

Die Abbildung det ist linear in jeder Zeile a^j von $A = (a^1 \dots a^n)^T$ mit $j = 1, \dots, n$, d.h.

- Homogenität:

$$\forall \lambda \in K : \det \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a^j \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^j \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$$

- Addititivät: Für beliebiges festes j: Ist $a^j = r^j + s^j$ mit $r^j, s^j \in K^{1\times n}$, so gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ r^j + s^j \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ r^j \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ s^j \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$$

Beweis: Vollständige Induktion

- Induktionsanfang: n=1

$$\begin{aligned} \det(\lambda \cdot a_{11}) &= \lambda \cdot a_{11} = \lambda \cdot \det(a_{11}) \\ \det(r+s) &= r + s = \det(r) + \det(s) \end{aligned}$$

- Induktionsvoraussetzung: Behauptung gelte für n=m-1
- Induktionsschritt: n=m
  1. Homogenität:

$$B = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a^j \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} \qquad b_{ik} = \begin{cases} a_{ik} & i \neq j \\ \lambda \cdot a_{ik} & i = j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \cdot b_{i1} \cdot \det Bi1 \\ \det B_{i1} &= \lambda \cdot A_{i1} \, (i \neq j) \\ \det B_{j1} &= \det A_{j1} \\ \Rightarrow \det B &= \sum_{i=1 (i \neq j)}^{m} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \lambda \cdot \det A_{i1} + b_{j1} \cdot \det B_{j1} \cdot (-1)^{j+1} \\ &= \lambda \cdot \det A \end{aligned}$$

2. Additivität:

$$B = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ r^j + s^j \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} \qquad \text{mit } b_{ik} = \begin{cases} a_{ik} & i \neq j \\ r_{jk} + s_{jk} & i = j \end{cases}$$

$$R = \begin{pmatrix} r^1 \\ \vdots \\ r^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ r^j \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} \qquad \text{mit } r_{ik} = \begin{cases} a_{ik} & i \neq j \\ r_{jk} & i = j \end{cases}$$

$$S = \begin{pmatrix} s^1 \\ \vdots \\ s^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ s^j \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} \qquad \text{mit } s_{ik} = \begin{cases} a_{ik} & i \neq j \\ s_{jk} & i = j \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\det B &= \left(\sum_{i=1 (i \neq j)}^{m} (-1)^{i+1} b_{i1} \cdot \det B_{i1} \right) + (-1)^{j+1} \cdot b_{j1} \cdot B_{j1} \\
\det B_{i1} &= \det R_{i1} + \det S_{i1} \\
\det B_{j1} &= \det A_{j1} = \det R_{j1} = \det S_{j1} \\
\Rightarrow \det B &= \left(\sum_{i=1 (i \neq j)}^{m} (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot (\det R_{i1} + \det S_{i1}) \right) \\
&\quad + (-1)^{j+1} \cdot (r_{j1} + s_{j1}) \cdot \det A_{j1} \\
&= \det R + \det S
\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1+2 & 3+1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lemma 1:

B entstehe aus $A \in K^{n \times n}$ $(n \geq 2)$, indem zwei benachbarte Zeilen vertauscht werden. Dann gilt:

$$\det B = -\det A$$

Lemma 2:

B entstehe aus $A \in K^{n \times n}$ $(n \geq 2)$, indem zwei Zeilen vertauscht werden. Dann gilt:

$$\det B = -\det A$$

Das heißt det ist alterniernd.

Beweis:

- Die Zeilen a^r und a^s sollen vertauscht werden, o.B.d.A. $r < s$. Um a^r nach a^s zu bringen, sind (s-r) Nachbarschaftstausche durchzuführen.
- Dann steht a^s an der Stelle s-1. Deshalb sind s-r-1 benachbarte Zeilen zu tauschen, um a^s in die r-te Zeile zu bringen.
- Gesamtzahl der Vertauschungen ist $(s-r)+(s-r-1) = 2(s-r)-1$, also ungerade Anzahl. Nach Lemma 1 alterniert Vorzeichen bei jedem Tausch. Also $\det B = -\det A$.

Folgerung 1:

A besitze zwei gleiche Zeilen. Dann $\det A = 0$.

Beweis:

- Für A gibt es i,j $(i \neq j)$ mit $a^i = a^j$. B entstehe durch Vertauschen von a^j und a^i. Dann $\det B = -\det A = \det A$.

Satz 3:

1. $\det A^T = \det A$
2. $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$
3. A invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
4. Rang $A < n \Leftrightarrow \det A = 0$

Folgerung:

Mit Satz 1: Für jede untere Dreiecksmatrix gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ & a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Folgerung:

1. $\det(B \cdot A) = \det(A \cdot B)$
2. $\det(A^k) = (\det A)^k \ (k \in \mathbb{N})$
3. $1 = \det(A \cdot A^{-1}) = (\det A) \cdot (\det A^{-1}) \Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
4. $\det(S^{-1} \cdot A \cdot S) = \det A$ für invertierbare $A \in K^{n \times n}$

Definition: elementare Zeilen- und Spaltenumformungen einer Matrix $A \in K^{n \times n}$

- Typ 1: Vertauschen zweier Zeilen (Spalten)
- Typ 2: Multiplikation einer Zeile (Spalte) mit $\lambda \in K \backslash \{0\}$
- Typ 3: Addition des Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte)

Satz 4:

Die Matrix B entstehe aus Matrix A durch eine elementare Zeilen- oder Spaltenumformung vom Typ i. Dann gilt:

- i=1: $\det B = -\det A$
- i=2: $\det B = \lambda \cdot \det A$
- i=3: $\det B = \det A$

Beweis:

- i=1,2: Klar für Zeilen. Für Spalten wegen $\det A = \det A^T$ (Satz 3).
- i=3: Es gilt:

$$\begin{aligned} \det B &= \det \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^i \\ \vdots \\ a^j + \lambda \cdot a^i \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^i \\ \vdots \\ a^j \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} + \lambda \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^i \\ \vdots \\ a^i \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}}_{0 \text{(Folgerung 1)}} \\ &= \det A \end{aligned}$$

5.3 Entwicklungssätze und inverse Matrix

Es sei $A \in K^{n \times n}$, $A = (a_{ij})_{n,n} = (a_1 \dots a_n), n \geq 2$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ Standardbasis des $\mathbb{K}^n$

Definition:

Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ heißt

$$a_{ij}^* := \det(a_1 \dots a_{i-1}\, e_j\, a_{i+1} \dots a_n)$$

der Cofaktor (Adjunkte) von a_{ij}. Wir betrachten die Teilmatrizen:

$$a_{ij}^* = \det \begin{pmatrix} P & 0 & Q \\ & \vdots & \\ \dots & 1 & \dots \\ & \vdots & \\ R & 0 & S \end{pmatrix}$$

Wir vertauschen die i-te Spalte mit der Vorgängerspalte, das sind (i-1) Nachbarschaftstausche:

$$a_{ij}^* = (-1)^{i-1} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & P & Q \\ \vdots & & \\ 1 & \dots & \dots \\ \vdots & & \\ 0 & R & S \end{pmatrix}$$

Vertauschen der j-ten Zeile mit der Vorgängerzeile:

$$\begin{aligned} a_{ij}^* &= (-1)^{i-1} \cdot (-1)^{j-1} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots \\ 0 & P & Q \\ \vdots & & \\ 0 & R & S \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{i+j} \det A_{ji} \end{aligned}$$

a_{ij}^* ist mit geeignetem Vorzeichen die Determinante der Streichungsmatrix A_{ji}.

Satz 5: (Entwicklung nach der k-ten Spalte)

Es sei $A \in K^{n \times n}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot a_{jk}^* = \delta_{ij} \cdot \det A$$

Beispiel: Entwicklung nach 3ter Spalte mit $i = j$

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{4} a_{k3} \cdot a_{3k}^* \\ &= a_{13} \cdot a_{31}^* + a_{23} \cdot a_{32}^* + \underbrace{a_{33}}_{0} \cdot a_{33}^* + \underbrace{a_{43}}_{0} \cdot a_{34}^* \\ a_{31}^* &= (-1)^{3+1} \cdot \det A_{13} = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = -20 \\ a_{32}^* &= (-1)^{3+2} \cdot \det A_{23} = ... = 40 \\ \Rightarrow \det A &= 4 \cdot (-20) + 40 = -40 \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\cdot a^*_{jk} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\cdot \det(a_1\ldots a_{j-1}\, e_k\, a_{j+1}\ldots a_n)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \det(a_1\ldots a_{j-1}\, a_{ki}\cdot e_k\, a_{j+1}\ldots a_n)\\ &= \det(a_1\ldots a_{j-1} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\cdot e_k\, a_{j+1}\ldots a_n)\\ &= \det(a_1\ldots a_{j-1}\, a_i\, a_{j+1}\ldots a_n)\\ &= \delta_{ij}\cdot \det A\end{aligned}$$

Definition:

Für $A \in K^{n\times n}$ heißt die aus den Cofaktoren $A* = (a^*_{ij})$ die adjungierte Matrix.

Lemma:

$$(A^T)^* = (A^*)^T$$

Beweis:

- Es sei $B = (b_{ij}) = A^T = (a_{ji})$. Streichungsmatrix B_{ij} entsteht aus B durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte:

$$\begin{aligned}B_{ij} &= (A_{ji})^T\\ \det(A^T) &= \det A\\ \Rightarrow \det B_{ij} &= \det A_{ji}\end{aligned}$$

  Cofaktoren von B:

$$\begin{aligned}b^*_{ij} &= (-1)^{i+j}\cdot \det B_{ji}\\ &= (-1)^{i+j}\cdot \det A_{ij} = a^*_{ij}\\ \Rightarrow B* &= (b^*_{ij}) = (a_{ji}*) = (A^*)^T\end{aligned}$$

Satz 6:

1. $A\cdot A^* = (\det A)\cdot E_n = A^*\cdot A$
2. Wenn A invertierbar ist, dann $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot A^*$

Satz 7:

Vektoren $a_1,\ldots,a_n$ sind linear abhängig $\Leftrightarrow$

1. Gleichungssystem $x_1\cdot a_1 + \ldots + a_n\cdot x_n = 0$ hat eine nichttriviale Lösung $x = (x_1\ldots x_n)\in K^n$
2. $\det(a_1\ldots a_n) = 0$

Beweis:

- $a_1, \ldots, a_n$ linear abhängig $\Leftrightarrow A := (a_1 \ldots a_n)$ hat Rang $r < n$. Dann hat $A \cdot x = 0$ (n-r) Fundamentallösungen nach Satz 3 (3.5), also wenigstens ein Lösungsvektor $\neq 0$.
- Nach Satz 3d (5.2): Rang $A < n \Leftrightarrow \det A = 0$

Cramersche Regel:

Ein lineares Gleichungssystem $A \cdot x = b$ $(b \neq 0)$ mit $A \in K^{n \times n}$, Rang A = n, hat die Lösung:

$$x_i = \frac{1}{\det A} \cdot \det(a_1 \ldots a_{i-1}\; b\; a_{i+1} \ldots a_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Beweis:

- $A \cdot x = b \Leftrightarrow x_1 \cdot a_1 + \ldots a_n \cdot x_n = b$. b ist also Linearkombination der Spalten von A. Wir bilden:

$$\begin{aligned} \det(a_1 \ldots a_{i-1}\; b\; a_{i+1} \ldots a_n) &= \det(a_1 \ldots a_{i-1} \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot a_k\; a_{i+1} \ldots a_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \det(a_1 \ldots a_{i-1}\; a_k\; a_{i+1} \ldots a_n) \\ &= x_i \cdot \det(a_1 \ldots a_n) = x_i \cdot \det A \end{aligned}$$

Bemerkung: Cramersche Regel gibt die Lösung ohne Berechnung der inversen Matrix an.

6

Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit von Endomorphismen

6.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

- Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix $A =_B A_C$ bzgl. der Basen B und C. Es gilt V=W, da f Endomorphismus, $A =_B A_B$.
- Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, wenn es eine Basis von V gibt, sodass Darstellungsmatrix von f eine Diagonalmatrix ist.
- $\lambda \in K$ heißt ein Eigenwert von f, falls $v \in V$ existiert $(v \neq 0)$ mit $f(v) = \lambda \cdot v$.
- Ein Vektor $v \in V$ heißt Eigenvektor zu einem Eigenwert $\lambda \in K$, falls $f(v) = \lambda \cdot v$ mit $v \neq 0$.
- $\lambda \in K$ heißt Eigenwert einer Matrix A, falls λ ein Eigenwert eines Endomorphismus ist bzgl. dieser dann A die zugehörige Darstellungsmatrix.
  Kurz: Die Eigenwerte einer Matrix sind die Eigenwerte des zugehörigen Endomorphismus.
- Bemerkungen:
  1. $id(v) = v$ für alle $v \in V$. Also Eigenwert $\lambda = 1$.
  2. Wenn ein $v \in V$ mit $v \neq 0$ existiert und $f(v) = 0 = \lambda \cdot v$, dann hat f den Eigenwert 0. Ist also v ein Eigenvektor zum Eigenwert 0, dann $v \in Kern(f)$.
  3. v sei ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Sei $r := \mu \cdot v$ $(\mu \neq 0)$. Dann gilt:

     $$\begin{aligned} f(r) &= f(\mu \cdot v) = \mu \cdot f(v) = \mu(\lambda \cdot v) \\ &= (\mu \cdot \lambda) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v) = \lambda \cdot r \end{aligned}$$

     Also λ Eigenwert von Eigenvektor r.

4. Zu jedem Eigenvektor r gehört genau ein Eigenwert, denn sind $\lambda_1 \neq \lambda_2$ zwei verschiedene Eigenwerte zu einem Eigenvektor. Dann:

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda_1 \cdot v = \lambda_2 \cdot v \\ \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot v &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \lambda_2 \end{aligned}$$

Satz 1:

Ein Endomorphismus ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis von V aus Eigenvektoren gibt.

Beweis:

1. „$\Leftarrow$"

   - Es sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis aus Eigenvektoren von $f : V \to V$. Nach Definition:

     $$f(v_j) = \lambda_j \cdot v_j \qquad (j = 1, \dots, n)$$

     Also Darstellungsmatrix

     $$_BA_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2. „$\Rightarrow$"

   - Es sei f diagonalisierbar. Dann existiert Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, sodass

     $$_BA_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

     Also $f(v_j) = \lambda \cdot v_j$ für $j = 1, \dots, n$, also v_j Eigenvektor zum Eigenwert λ_j $(v_j \neq 0)$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \{e_1, e_2\} \\ f(e_1) &= e_1 \Rightarrow \lambda = 1 \\ f(e_2) &= 0 \Rightarrow \lambda = 0 \\ f(v) &= f(x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2) = x_1 \cdot e_1 \end{aligned}$$

Lemma 1:

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Beweis:

- Induktionsanfang: Ein Eigenvektor ist linear unabhängig, da $\neq 0$.

- Induktionsvoraussetzung:
  - Eigenvektoren $v_1, \dots, v_{r-1}$ zu Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ sind linear unabhängig.
- Induktionsschritt:
  - Wir betrachten Eigenvektoren $v_1, \dots, v_r$ zu Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ und $f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$ für $i = 1, \dots, r$.
  - Angenommen $v_1, \dots, v_r$ sind linear abhängig. Dann gilt:

$$v_r = \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i \cdot v_i$$

und es gibt $j \in \{1, \dots, r-1\}$ mit $\mu_j \neq 0$. Also:

$$f(v_r) = \lambda_r \cdot v_r = \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i \cdot \lambda_r \cdot v_i$$

Es gilt aber auch:

$$\begin{aligned} f(v_r) &= \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i \cdot f(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i \cdot \lambda_i \cdot v_i \end{aligned}$$

Also:

$$f(v_r) - f(v_r) = \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i \cdot (\lambda_i - \lambda_r) \cdot v_i = 0$$

Wegen Induktionsvoraussetzung: $v_1, \dots, v_{r-1}$ linear unabhängig, also nur triviale Linearkombination des Nullvektors möglich.

$$\mu_i \cdot (\lambda_i - \lambda_r) = 0$$

wobei $\mu_j \neq 0$. Dann:

$$\lambda_i - \lambda_r = 0 \Rightarrow \lambda_r = \lambda_i$$

Widerspruch!

Seien $v_1, \dots, v_n$ ($n = \dim V$) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten, dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig. Sie sind Basis von V.

Satz 2:

Hat ein Endomorphismus von V n verschiedene Eigenwerte, dann ist er diagonalisierbar.

Definition: (Eigenraum)

Sei $\lambda \in K$ Eigenwert eines Endomorphismus. Dann heißt

$$U_\lambda = \{v \in V; f(v) = v\}$$

der Eigenraum von f zum Eigenwert λ.
Bemerkung: In U_λ ist $v = 0$ zugelassen (kein Eigenvektor!)

Lemma 2:

1. U_λ ist ein Untervektorraum von V.
2. λ Eigenwert von f $\Leftrightarrow U_\lambda \neq \{0\}$
3. $U_\lambda = Kern(f - \lambda\,\mathrm{id})$
4. $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte von f mit zugehörigen Unterräumen $U_1, \ldots, U_m$ und $B_j = \{v_{j1}, \ldots, v_{jd_j}\}$ eine Basis von U_j mit $d_j = \dim U_j$ für $j = 1, \ldots, m$. Dann sind die Vektoren $v_{11}, \ldots, v_{1d_1}, \ldots, v_{md_m}$ linear unabhängig und es gilt:

$$\begin{aligned} d_1 + \ldots + d_m &\leq n \\ U_1 \oplus \ldots \oplus U_m &\subseteq V^n \end{aligned}$$

wobei das Gleichheitszeichen gilt $\Leftrightarrow$ f diagonalisierbar.

Beweis:

1.
   - $U_\lambda \neq \emptyset$, da $0 \in U_\lambda$
   - Abgeschlossenheit bzgl. Addition und Skalarmultiplikation: $\forall v, w \in U_\lambda\, \forall \alpha, \beta \in K$:

$$\begin{aligned} f(\alpha \cdot v + \beta \cdot w) &= \alpha \cdot f(v) + \beta \cdot f(w) \\ &= \alpha \cdot \lambda \cdot v + \beta \cdot \lambda \cdot w \\ &= \lambda \cdot (\alpha \cdot v + \beta \cdot w) \end{aligned}$$

2. Klar wegen Definition.
3. $U_\lambda = \{v \in V; f(v) = \lambda \cdot v\}$, also $f(v) - \lambda \cdot v = 0$ für alle $v \in U_j$.

$$\begin{aligned} f(v) - \lambda \cdot v &= 0 \\ f(v) - \lambda \cdot \mathrm{id}(v) &= 0 \\ (f - \lambda\,\mathrm{id})(v) &= 0 \end{aligned}$$

   Also $v \in Kern(f - \lambda\,\mathrm{id})$.

4.
   - Sei

$$\mu_j \cdot v_j := \sum_{k=1}^{d_j} \mu_{jk} \cdot v_{jk} \qquad \in U_j$$

   für $j = 1, \ldots, m$ mit beliebigen $\mu_j \in K$.

(a) Für alle j: $v_j \neq 0$

   – Sei $\mu_1 \cdot v_1 + \mu_m \cdot v_m = 0$. Wegen $v_j \in U_j$ ist v_j ein Eigenvektor von f. Da $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ paarweise verschieden sind, sind $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig. Also $\mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$.

$$\sum_{k=1}^{d_j} \mu_{jk} \cdot v_{jk} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

   $v_{j1}, \ldots, v_{jd_j}$ sind linear unabhängig nach Voraussetzung (Basis von U_j). Betrachte $\mu_j = 1$, also alle Vektoren $v_{11}, \ldots, v_{md_m}$ linear unabhängig.

(b) – Es sei $v_s = 0$ für $s \in \{1, \ldots, m\}$

$$\begin{aligned} \mu_s \cdot v_s &= \sum_{k=1}^{d_s} \mu_{sk} \cdot v_{sk} = 0 \\ \Rightarrow \mu_{sk} &= 0 \qquad (k = 1, \ldots, d_s) \end{aligned}$$

   – Sei

$$\sum_{j=1, j=\neq s}^{d_j} \mu_j \cdot v_j = 0$$

   mit $v_j \in U_j$. Die λ_j mit $j \neq s$ sind paarweise verschieden. Also v_j mit $j \neq s$ linear unabhängig. Somit $\mu_j = 0$ für $j = 1, \ldots, m; j \neq s$.

   – Es sind damit sämtliche $\mu_{jk} = 0$, also $v_{11}, \ldots, v_{md_m}$ linear unabhängig.

- Es gibt $n* = d_1 + \ldots + d_m$ linear unabhängige Vektoren, also $n* \leq n$. Falls $n* = n$, dann bilden die Eigenvektoren $v_{11}, \ldots, v_{md_m}$ eine Basis. Umgekehrt: Wenn Basis aus Eigenvektoren besteht, dann besteht sie aus Basiseigenvektoren. Jeder dieser Eigenvektoren gehört zu genau einem Eigenwert λ_j, damit zu genau einem U_j. Weil $d_j = \dim U_j$ folgt: d_j dieser Basisvektoren liegen in U_j. Also $d_1 + \ldots + d_m = n$.
- $U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ ist eine direkte Summe, denn $U_i \cap U_j = \{0\}$ für $i \neq j$. (Wäre $v \neq 0 \in U_i \cap U_j$, dann $f(v) = \lambda_1 \cdot v = \lambda_j \cdot v$, also $\lambda_i = \lambda_j$.)

Satz 3: (Diagonalisierbarkeitskriterium)

Endomorphismus f mit paarweise verschiedenen Eigenwerten λ_j $(j = 1, \ldots, n)$ ist diagonalisierbar

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} \dim U_j = n$$

Bemerkung: Diagonalisierbarkeit prüfen:

1. Bestimme alle Eigenwerte λ_j
2. Bestimmte alle $\dim U_j = d_j$
3. Kriterium prüfen

6.2 Charakteristisches Polynom

- Ziel: Berechnung der Eigenwerte
- Sei A Darstellungsmatrix von f bzgl. Basis B ($f: V \to V$ Endomorphismus). Dann gilt:
$$y = A \cdot x$$
mit $f(v) = w, x = \kappa_B(v), y = \kappa_C(w)$.
- Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ: $f(v) = \lambda \cdot v = w$. Also:
$$\begin{aligned} y = A \cdot x &= \lambda \cdot x \\ \Rightarrow A \cdot x - \lambda \cdot x &= 0 \\ (A - \lambda \cdot E) \cdot x &= 0 \end{aligned}$$
- Eigenvektor $v \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow$ homogenes lineares Gleichungssystem hat nichttriviale Lösung ($\det(A - \lambda \cdot E) = 0$)
- $\chi_A = \det(A - \lambda \cdot E)$ heißt das charakteristische Polynom von f bzw. von $A \in K^{n \times n}$.
$$\chi_A = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{21} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$
Polynom vom Grad n in der Variable $\lambda \in K$ mit Koeffizienten aus K
- $\chi_A = 0$ heißt die charakteristische Gleichung von f bzw. von A.
- Beispiele:
  1. f Nullabbildung: $f(v)0$ für alle $v \in V$, also A Nullmatrix
  $$\begin{aligned} \det(A - \lambda \cdot E) &= \begin{vmatrix} -\lambda & & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & -\lambda & \end{vmatrix} = (-\lambda)^n \\ \Rightarrow \lambda &= 0 \end{aligned}$$
  2. Identische Abbildung $f(v) = \mathrm{id}(v) = v$ für alle $v \in V$, A Einheitsmatrix
  $$\begin{aligned} \det(A - \lambda \cdot E) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^n \\ \Rightarrow \lambda &= 1 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\det(A - \lambda \cdot E) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & -4 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \lambda \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda - 26
\end{aligned}$$

Satz 1:

Die charakteristischen Polynome von Darstellungsmatrizen desselben Endomorphismus sind gleich.

Beweis:

- Seien A, A' Darstellungsmatrizen bzgl. B bzw. B'. Nach 4.4:

  $$A' = S^{-1} \cdot A \cdot S$$

  mit S als Übergangsmatrix von B nach B'.

- Somit gilt:

  $$\begin{aligned}
  \chi_{A'} &= \det(A' - \lambda \cdot E) = \det(S^{-1} \cdot A \cdot S - \lambda \cdot E) \\
  &= \det(S^{-1} \cdot A \cdot S - \lambda \cdot S^{-1} \cdot E \cdot S) \\
  &= \det(S^{-1} \cdot (A - \lambda \cdot E) \cdot S) \\
  &= \det(S^{-1}) \cdot \det(A - \lambda \cdot E) \cdot \det(S)
  \end{aligned}$$

  $$\det(S^{-1}) \cdot \det(S) \cdot \det(A - \lambda \cdot E)$$

  $$\begin{aligned}
  &= \det(S \cdot S^{-1}) \cdot \det(A - \lambda \cdot E) \\
  &= \det(A - \lambda \cdot E)
  \end{aligned}$$

Satz 2: (Koeffizienten von chi_A)

Endomorphismus $f : V \to V$ mit $n = \dim V$ und Darstellungsmatrix $A \in K^{n \times n}$.
Dann:

$$\chi_A = \alpha_n \cdot \lambda^n + \ldots + \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_0$$

ist Polynom n-ten Grades und es gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= (-1)^n \\
\alpha_{n-1} &= (-1)^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \\
\alpha_0 &= \det A
\end{aligned}$$

Beweis:

- Es sei $A = (a_1 \dots a_n)$ und $E = (e_1 \dots e_n)$. Dann gilt wegen der Multilinearität der Determinante:

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \det(A - \lambda \cdot E) = \det(a_1 - \lambda \cdot e_1 \dots a_n - \lambda \cdot e_n) \\
&= \det(a_1 a_2 - \lambda \cdot e_2 \dots a_n - \lambda \cdot e_n) + (-\lambda) \cdot \det\det(e_1 a_2 - \lambda \cdot e_2 \dots a_n - \lambda \cdot e_n) + (-\lambda) \\
&= \dots \\
&= (-\lambda^n) \cdot \det(e_1 \dots e_n) + (-\lambda)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \dots + (-\lambda)^0 \cdot \det(a_1 \dots a_n)
\end{aligned}$$

Bemerkung:

- Nach Satz 1 sind die Koeffizienten α_k invariant bei Basistransformation.
- $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ heißt Spur von A.

Satz 3:

$\lambda \in K$ Eigenwert von f bzw. von Darstellungsmatrix A $\Leftrightarrow$ λ ist Nullstelle von $\chi_A(\lambda) = 0$.

Beispiel:

1.

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \\
\chi_A &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 5 & 7-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \cdot (7-\lambda) - 15 \\
&= \lambda^2 - 9\lambda - 1
\end{aligned}$$

Berechnung der Koeffizienten auch nach Satz 2 möglich

Für $\chi_A = 0$:

$$\lambda_{1/2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{4,5^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot (9 \pm \sqrt{85})$$

Aus 1.5 bekannt: komplexes Polynom n-ten Grades ($c_k, z \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$)

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot z^k$$

Definition:

z_j heißt α_j-fache Nullstelle (Nullstelle der Vielfachheit α_j), falls $(z - z_j)^{\alpha_j}$ ein Teiler von P(z) ist, d.h. es gibt Polynom Q(z) vom Höchstgrad $(n - \alpha_j)$, sodass $P(z) = (z - z_j)^{\alpha_j} \cdot Q(z)$.

Lemma 1:

Sei z_0 eine Nullstelle von

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot z^k$$

dann ist $P_n(z)$ durch $(z - z_0)$ teilbar, d.h. es existiert $P_{n-1}(z)$ mit $P_n(z) = (z - z_0) \cdot P_{n-1}(z)$

Beweis:

- Durchführung einer Division durch $(z - z_1)$ mit $z_1 \in \mathbb{C}$ beliebig.

$$\begin{aligned} P_n(z) : (z - z_1) &= c_n \cdot z^{n-1} + b_{n-2} \cdot z^{n-2} + \ldots + b_0 + \frac{r}{z - z_1} \\ r &= c_0 + z_1 \cdot b_0 \\ \Rightarrow \frac{P_n(z)}{z - z_1} &= P_{n-1}(z) + \frac{r}{z - z_1} \end{aligned}$$

  Dabei gilt:

$$P_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cdot z^k$$

  mit $b_{n-1} := c_n$.

- Wenn $z_1 = z_0$ eine Nullstelle von $P_n(z)$:

$$\begin{aligned} 0 &= P_n(z) = P_{n-1}(z_0) \cdot (z_0 - z_0) + r \\ \Rightarrow r &= 0 \end{aligned}$$

Bemerkung:

- Der Divisionsrest r ist der Funktionswert $P_n z_1$ an der Stelle z_1:

$$P_n(z_1) = (z_1 - z_1) \cdot P_{n-1}(z_1) + r \Rightarrow P_n(z_1) = r$$

Fundamentalsatz der Algebra:

Sei $P_n(z)$ Polynom n-ten Grades über $\mathbb{C}$.

1. $P_n(z) = 0$ hat genau n Lösungen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, falls diese entsprechend ihrer Vielfachheit aufgezählt werden.
2. $P_n(z)$ zerfällt in ein Produkt aus Linearfaktoren

$$P_n(z) = a_n \cdot (z - z_1)^{\alpha_1} \cdots (z - z_N)^{\alpha_N}$$

   mit $N \leq n$ und $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = n$.

Wiederholung:

- Nach 1.5: $z^2 + pz + q = 0$ hat die Lösungen

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \cdot e^{\imath \cdot \frac{\varphi}{2}}$$

  wobei $r = |\frac{p^2}{4} - q|$, $\varphi = Arg(\frac{p^2}{4} - q)$.

- Falls $p, q \in \mathbb{R}$:

1. Für $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$:

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

2. Für $\frac{p^2}{4} - q < 0$:

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \imath \cdot \sqrt{-\frac{p^2}{4} + q}$$

- Wenn P(z) reelles Polynom und $z_0 \notin \mathbb{R}$ Nullstelle von P(z), dann auch $\overline{z_0}$ Nullstelle.

$$\begin{aligned} z_0 &= \alpha + \imath \cdot \beta \qquad \overline{z_0} = \alpha - \imath \cdot \beta \\ (z - z_0) \cdot (z - \overline{z_0}) &= z^2 \underbrace{-(z_0 + \overline{z_0})}_{p} \cdot z + \underbrace{z_0 \cdot \overline{z_0}}_{q} \\ p &= -2\alpha \qquad q = \alpha^2 + \beta^2 \\ \Rightarrow \frac{p^2}{4} - q &= -\beta^2 < 0 \end{aligned}$$

Jede echte komplexe Nullstelle führt auf einen Faktor $z^2 + pz + q$ mit $\frac{p^2}{4} - q < 0$ (irreduzibler Faktor)

Folgerung 1:

Ein reelles Polynom $P(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot z^k$ mit $c_k \in \mathbb{R}$ n-ten Grades ($c_n \neq 0$) zerfällt in ein Produkt aus Polynomen 1. Grades (Linearfaktoren) und Polynomen 2. Grades (irreduzible Faktoren):

$$P(z) = c_n \prod_{j=1}^{l} (z - z_j) \prod_{k=1}^{m} (z^2 + p_k \cdot z + q_k)$$

mit $l + 2m = n$ und

$$\triangle_k := \frac{p_k^2}{4} - q_k < 0$$

Folgerung 2:

Ein reelles Polynom ungeraden Grades besitzt eine reelle Nullstelle.

Beweis:

$$\begin{aligned} l + 2m = n &= 2k - 1 \qquad (k \in \mathbb{N}, k > m, k, m \geq 0) \\ \Rightarrow l &= 2 \cdot (k - m) - 1 \end{aligned}$$

Satz 4:

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$, $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Dann gilt:

1. f besitzt einen Eigenwert, falls n ungerade ist.
2. f besitzt höchstens n Eigenwerte

3. Falls V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist, dann besitzt f genau n Eigenwerte.

Definitionen:

1. Eigenwert λ_i von A habe die algebraische Vielfachheit α_i, wenn λ_i eine α_i-fache Nullstelle von $\chi_A(\lambda) = 0$ ist.
2. Es heiße $\gamma_i = \dim U_i$ die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes λ_i von A, wobei U_i den Eigenraum von λ_i bezeichnet.

Satz 5:

Für jeden Eigenwert λ_i von A gilt:

$$1 \leq \gamma_i \leq \alpha_i$$

Beweis:

- $U_i\{v \in V; f(v) = \lambda_i \cdot v\} \neq \{0\}$, $\kappa(v) = x \in$ Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $(A - \lambda \cdot E) \cdot x = 0$. Also

$$\gamma_i = \dim U_i = n - \underbrace{Rang(A - \lambda_i \cdot E)}_{<n} \geq 1$$

U_i hat Basis aus Fundamentallösungen $v_1, \ldots, v_{\gamma_i}$ mit $x_k = \kappa(v_k)$.

Die Vektoren $v_1, \ldots, v_{\gamma_i}$ können zu einer Basis des gesamten Vektorraums V mit $\dim V = n$ ergänzt werden. Dann ist

$$f(v_k) = \lambda_i \cdot v_k \qquad (k = 1, \ldots, \gamma_i)$$

Also hat Abbildungsmatrix A von f die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 & \vdots & \\ & \ddots & & \vdots & B \\ 0 & & \lambda_i & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & & \vdots & D \end{pmatrix}$$

mit beliebigen Teilmatrizen B und D.

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(A - \lambda \cdot E) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda_i - \lambda & & 0 & \vdots & \\ & \ddots & & \vdots & B \\ 0 & & \lambda_i - \lambda & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & & \vdots & D \end{vmatrix} \\ &= (\lambda_i - \lambda)^{\gamma_i} \cdot \underbrace{\det D}_{P_{n-\gamma_i}} \end{aligned}$$

λ_i hat die algebraische Vielfachheit $\alpha_i = \gamma_i$, falls $P_{n-\gamma_i}(\lambda_i) \neq 0$. Da $P_{n-\gamma_i}(\lambda_i) = 0$ nicht ausgeschlossen werden kann: $\gamma_i \leq \alpha_i$.

6.3 Diagonalisierbarkeit

Nach Satz 5.1: f diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ f hat Basis aus Eigenvektoren.

Satz 1: (Diagonalisierbarkeitskriterium)

Ein Endomorphismus f ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$

1. χ_f zerfällt über K vollständig in Linearfaktoren.
2. Für jeden Eigenwert λ_i von f ist die algebraische und die geometrische Vielfachheit gleich.

Beweis:

1. „$\Rightarrow$“
   - Es sei f diagonalisierbar, dann hat f eine Diagonalmatrix als Abbildungsmatrix. Es ist
     $$A \cdot e_k = a_{kk} \cdot e_k$$
     für natürliche Basisvektoren e_k $(k = 1, \dots, n)$.
     Diese sind n Eigenvektoren zu den n Eigenwerten a_{kk} - nicht notwendig paarweise verschieden. $\beta_1, \dots, \beta_r$ seien paarweise verschieden, wobei β_j in A d_j mal auftrete.
     $$A = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \beta_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & \beta_r \end{pmatrix}$$
     mit $\sum_{i=1}^{r} d_j = n$.
     $$\begin{aligned} \chi_A &= \det(A - \lambda \cdot E) \\ &= \prod_{j=1}^{r} (\beta_j - \lambda)^{d_j} \qquad (1) \end{aligned}$$
     Produkt aus Linearfaktoren (vollständig) mit $\alpha_j = d_j$. Es gehören α_j Eigenvektoren zum Eigenwert zum Eigenwert β_j für $j = 1, \dots, r$.
     $$\dim U_j = \alpha_j = \gamma_j$$
2. „$\Leftarrow$“
   - Es gelte (1) mit $\alpha_j = \gamma_j = d_j$. Zu jedem Eigenwert β_j gehören d_j linear unabhängige Eigenvektoren, weil $d_j = \dim U_j$ vorausgesetzt war. Da
     $$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j = n = \sum_{j=1}^{r} d_j$$
     folgt mit Lemma 2d (5.1), dass es n linear unabhängige Eigenvektoren gibt, die dort eine Basis bilden. Nach Satz 1 (5.1): f diagonalisierbar.

Bemerkung:

- χ_f zerfällt über K in Linearfaktoren ist analog (11) definiert. Dort gilt $K = \mathbb{C}$.
- Algebra: Wenn K algebraisch abgeschlossen ist, dann zerfällt jedes Polynom über K. $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen, $\mathbb{R}$ nicht.

Überprüfung der Diagonalisierbarkeit

Endomorphismus $f : V \to V$ hat bzgl. einer beliebigen Basis eine Abbildungsmatrix A.

1. $\chi_A = \det(A - \lambda \cdot E)$ berechnen.
2. χ_A möglichst in Linearfaktoren zerlegen, d.h. alle Nullstellen (Eigenwerte) von χ_A ermitteln.
3. Eigenräume zu den Eigenwerten bestimmen (homogene lineare Gleichungssysteme lösen, Dimension der Lösungsmannigfaltigkeiten bestimmen) Dann Satz 1 anwenden.

Beispiel:

1. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

   (a) 1. Schritt:

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(A - \lambda \cdot E) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 \end{aligned}$$

   (b) 2. Schritt:
   Scharfes Hingucken: $\lambda_1 = 2$ ist Nullstelle. Polynomdivision:

$$\begin{aligned} \chi_A &= (\lambda - 2) \cdot Q(\lambda) \\ &= (\lambda - 2) \cdot (-\lambda^2 + 4) = -(\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda + 2) \end{aligned}$$

   λ_1 ist 2fache Nullstelle, $\lambda_2 = -2$ einfache Nullstelle ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$).

   (c) 3.Schritt:
   Eigenraum zu λ_1:

$$\begin{aligned} (A - 2E) \cdot x &= 0 \\ \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x &= 0 \end{aligned}$$

   Da $(2, -3, -1)^T$ und $(1, 1, 1)^T$ linear unabhängig sind, also Rang $(A - 2E) = 2$, folgt:

$$\dim U_1 = 3 - 2 = 1 \neq \alpha_1$$

   Damit A nicht diagonalisierbar.

2. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}}_{{}_BA_B} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

${}_BA_B$ ist Darstellungsmatrix von f bzgl. Basis $B = \{e_1, e_2, e_3\}$.

(a) 1. Schritt:

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -3 & -2-\lambda & 3 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 \end{aligned}$$

(b) 2. Schritt:
Offensichtlich: $\lambda_1 = 1$ ist Nullstelle von $\chi_A = 0$. Polynomdivision:

$$\begin{aligned} (-\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1) : (\lambda - 1) &= -\lambda^2 + 1 = (1 - \lambda) \cdot (1 + \lambda) \\ \Rightarrow \chi_A &= -(\lambda - 1)^2 \cdot (1 + \lambda) \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 1$ ist also zweifache Nullstelle, $\lambda_2 = -1$ einfache Nullstelle ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$).

(c) 3. Schritt:
Eigenraum zu λ_1:

$$\begin{aligned} (A - E) \cdot x &= 0 \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot x &= 0 \end{aligned}$$

Offensichtlich: Rang(A-E)=1. Damit:

$$\dim U_1 = 3 - 1 = 2 = \alpha_1$$

Zwei Lösungen können abgelesen werden:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b_1 und b_2 bilden Basis von U_1.

Eigenraum zu λ_2:

$$\begin{aligned} (A + E) \cdot x &= 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot x &= 0 \end{aligned}$$

ablesbare Lösung:

$$b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da 1.Zeile + 2.Zeile = 3.Zeile ist Rang(A+E)=2, also $\dim U_2 = 1 = \alpha_2$. Also f diagonalisierbar mit Basis $B' = \{b_1, b_2, b_3\}$ aus Eigenvektoren.

Nach Satz 1, 6.1:

$$_{B'}A_{B'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Übergangsmatrix von B nach B':

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $_{B'}A_{B'} = S^{-1} \cdot {}_B A_B \cdot S$.

7 Anwendungen von Matrizen, Determinanten, Eigenwerten

7.1 Orthogonalprojektion

- Sei U ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ mit Skalarprodukt $< .,. >$. Die Abbildung $\omega : \mathbb{R}^n \to U, x \mapsto x'$ mit
$$\forall y \in U : < x - x', y >= 0$$
heißt Orthogonalprojektion von $\mathbb{R}^n$ auf U.
- Bemerkungen:
  - $x - x'$ ist orthogonal zu beliebigem $y \in U$.
  - ω ist linear.
  - Veranschaulichung im $\mathbb{R}^3$:

Lemma 1:

Sei $\omega : \mathbb{R}^n \to U$ eine Orthogonalprojektion und $\{u_1, \ldots, u_m\}$ eine Basis von U mit $m < n$. Dann:
$$\omega(x) = x' \Leftrightarrow < x - x', u_i >= 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

Beweis:

1. „$\Rightarrow$“
   - Es sei $\omega(x) = x'$, dann gilt:
   $$< x - x', y >= 0$$
   für alle $y \in U$, also auch für Basisvektoren.
2. „$\Leftarrow$“
   - Es gilt:
   $$\begin{aligned} < x - x', u_i > &= 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \\ \Rightarrow < x - x', \lambda_i \cdot u_i > &= 0 \\ \Rightarrow < x - x', \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \cdot u_i > &= 0 \\ < x - x', y > &= 0 \end{aligned}$$

für alle $y \in U$.

Berechnung des Bildes x' von x:

Ansatz:

$$x' = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot u_j$$

nach Darstellungssatz. Also:

$$\begin{aligned} < x - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot u_j, u_i > &= 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \\ < \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot u_j, u_i > &= < x, u_i > \\ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j < u_j, u_i > &= < x, u_i > \end{aligned}$$

Lineares inhomogenes Gleichungssystem mit m Gleichungen und m Unbekannten α_j.

$$\begin{pmatrix} < u_1, u_1 > & \ldots & < u_1, u_m > \\ \vdots & & \vdots \\ < u_m, u_1 > & \ldots & < u_m, u_m > \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < x, u_1 > \\ \vdots \\ < x, u_m > \end{pmatrix}$$

$G = (< u_i, u_j >)$ heißt Gramersche Matrix für beliebige Vektoren $u_1, \ldots, u_m$. G ist symmetrisch.

Lemma 2:

Vektoren $u_1, \ldots, u_m$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ Rang$(G(u_1, \ldots, u_m)) = m$

Beweis: Übung

Damit folgt für Orthogonalprojektion: G hat vollen Rang, also gibt es genau eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < x, u_1 > \\ \vdots \\ < x, u_m > \end{pmatrix} \cdot G^{-1}$$

Satz 1:

$\omega : \mathbb{R}^n \to U, x \mapsto \omega(x) = x'$ sei Orthogonalprojektion.

1. Bzgl. einer Basis $u_1, \ldots, u_m$ von U gilt:

   $$x' = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot u_j$$

   mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $\alpha_j \in \mathbb{R}$.

2. Für alle $y \in U$ gilt:
$$\|x - x'\| \leq \|x - y\|$$
d.h. $\|x - x'\| = \min(\|x - y\|, y \in U)$.

Beweis:

1. Siehe oben.
2. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|x - y\|^2 &= \|x - x' + x' - y\|^2 \\
&= < (x - x') + (x' - y), (x - x') + (x' - y) > \\
&= \|x - x'\| + 2 \cdot \underbrace{< x - x', x' - y >}_{0} + \|x' - y\|^2 \\
\Rightarrow \|x - x'\|^2 &= \|x - y\|^2 - \underbrace{\|x' - y\|^2}_{\geq 0} \\
\|x - x'\| &\leq \|x - y\|^2
\end{aligned}$$

(„=“ für $x' = y$)

Beispiele:

1. Orthogonalprojektion des $\mathbb{R}^3$ auf eine Ebene U
$$U = \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2 = Lin(u_1, u_2)$$
mit $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ linear unabhängig. Dann gilt:
$$\begin{aligned}
x' &= \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 \\
\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} &= G^{-1} \cdot \begin{pmatrix} < x, u_1 > \\ < x, u_2 > \end{pmatrix} \\
G &= \begin{pmatrix} < u_1, u_1 > & < u_1, u_2 > \\ < u_2, u_1 > & < u_2, u_2 > \end{pmatrix}
\end{aligned}$$
Es sei
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
Dann:
$$\begin{aligned}
G &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow G = G^{-1} = E \\
\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} &= E \cdot \begin{pmatrix} < x, u_1 > \\ < x, u_2 > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad &: \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$
(Grundrissabbildung)

Bemerkung: G wird eine Diagonalmatrix, falls u_i paarweise senkrecht zueinander gewählt werden. Dann G^{-1} einfach zu berechnen.

2. Ausgleichsgerade: Messungen bei einem physikalischen Versuch ergeben Messwerte x_i zum Zeitpunkt t_i

t_i	0	1	2	3
x_i	0	1	1	4

Nach theoretischen Modellansatz soll $f(t) = m \cdot t + n$ (affin-lineare Funktion) gelten. Bestmögliche Koeffizienten m,n gesucht.

Lösung:

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \; x' = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ U &= Lin(u_1, u_2) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} < u_1, u_1 > &= 14 \; < u_1, u_2 >= 6 \; < u_2, u_2 >= 4 \\ < x, u_1 > &= 15 \; < x, u_2 >= 6 \\ \Rightarrow G &= \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \det G = 20 \end{aligned}$$

Es ist das lineare Gleichungssystem

$$G \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < x, u_1 > \\ < x, u_2 > \end{pmatrix}$$

zu lösen, z.B. mit Cramerscher Regel.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\det G} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 15 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 14 & 15 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow f(t) &= \frac{6}{5} \cdot t - \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Bemerkung:

$$\begin{aligned} \|x - x'\|^2 &= \min_{y \in U} \|x - y\|^2 = \min_{y \in U} < x - y, x - y > \\ &= \min_{y \in U} \sum_{i=1}^{4} (x_i - y_i)^2 \\ &= \min_{y \in U} \sum_{i=1}^{4} \triangle_i^2 \end{aligned}$$

wobei

$$y = m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

und $\triangle_i = x_i - y_i$.

Methode der Orthogonalprojektion liefert eine Ausgleichsgerade $f(t) = m \cdot t + n$, die die Summe der Koordinatendifferenz-Quadrate $\triangle_i^2$ zwischen den Messwerten und der Ausgleichsgeraden minimiert. (Gaußsche Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme)

7.2 Orthogonalität

Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $< .,. >$

1. $x, y \in V$ heißen orthogonal $(x \perp y) :\Leftrightarrow < x, y >= 0$
2. U, W seien Untervektorräume von V, U heißt orthogonal zu W $(U \perp W)$
$$:\Leftrightarrow \forall u \in U, \forall w \in W :< u, w >= 0$$
3. W sei Untervektorraum von V, dann
$$W^\perp := \{v \in V | \forall w \in W :< v, w >= 0\}$$
orthogonales Komplement .
4. Menge $\{v_1, \ldots\}$ von Vektoren heißt orthogonal, falls $< v_i, v_j >= 0$ für alle i,j mit $i \neq j$.
5. Menge $\{v_1, \ldots\}$ von Vektoren heißen orthonormal , falls sie orthogonal sind und $\forall i :< v_i, v_i >= 1$
6. Menge $\{v_1, \ldots\}$ von Vektoren heißt eine Orthonormalbasis, wenn sie orthonormal und eine Basis von V ist.

Bemerkung:
$$\{v_1, v_2, \ldots\} \,\text{orthonormal}\, \Leftrightarrow \forall i, j :< v_i, v_j >= \delta_{ij}$$

Beispiele:

1. Es sei $W := Lin\, v$ mit $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. Dann:
$$W^\perp = \{x \in \mathbb{R}^2 | \forall y \in W :< x, y >= 0\} = Linv^\perp$$
Das orthogonale Komplement ist die zu W senkrechte Gerade durch 0.
2. Es sei $W := Lin(v, w)$ mit $v, w \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig.
$$\begin{aligned} W^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^3 | \forall y \in W :< x, y >= 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 | \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} :< x, \alpha \cdot v + \beta \cdot w = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 | \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \cdot < x, v > + \beta \cdot < x, w >= 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 | < x, v >= 0 \wedge < x, w >= 0\} \end{aligned}$$
2 lineare Gleichungen für 3 Unbekannte, also eindimensionale Lösungsmannigfaltigkeit:
$$x = \lambda \cdot n = \lambda \cdot v \times w \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$
Also: $W^\perp = Lin(v \times w)$. (Normalengerade zu W)

Lemma 1:

Sei W ein Untervektorraum von V.

1. $W^\perp$ ist ein Untervektorraum von V.
2. $W^\perp \cap W = \{0\}$

Beweis:

1. $W^\perp \neq \emptyset$, da $0 \in W^\perp$. Abgeschlossenheit bzgl. der Addition:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in W^\perp : \forall w \in W :< x, w > &= 0 \wedge < y, w >= 0 \\ \Rightarrow < x + y, w > &= 0 \end{aligned}$$

   Abgeschlossenheit bzgl. der Skalarmultiplikation:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in W^\perp : \forall w \in W, \alpha \in K :< \alpha \cdot x, w > &= 0 \\ \alpha \cdot < x, w >= 0 \end{aligned}$$

2. indirekt: Sei $z \in W^\perp \cap W$ mit $z \neq 0$. Dann:

$$\begin{aligned} \forall y \in W :< z, y > &= 0 \\ < z, z > &= 0 \\ \Rightarrow z &= 0 \end{aligned}$$

Lemma 2:

$\{v_1, \ldots\} \subset V$ orthogonal und $v_i \neq 0$ für alle i, dann

1. $\{\lambda_1 \cdot v_1, \ldots\}$ orthonormal, wenn $\lambda_i = \frac{1}{\|v_i\|}$ für alle i
2. $\{v_1, \ldots\}$ linear unabhängig.

Beweis:

1. Es gilt:

$$\begin{aligned} < \lambda_i \cdot v_i, \lambda_j \cdot v_j > &= \lambda_i \cdot \lambda_j < v_i, v_j > \\ &= \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \lambda_i^2 \cdot \|v_i\|^2 = 1 & i = j \end{cases} \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

2. Linearkombination des Nullvektors für beliebige $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot v_i &= 0 \\ < \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot v_i, v_j > &= < 0, v_j > \\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot < v_i, v_j > &= 0 \\ \alpha_j \cdot \underbrace{< v_j, v_j >}_{\neq 0} &= 0 \\ \Rightarrow \alpha_j &= 0 \, \forall j \end{aligned}$$

Lemma 3:

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Orthonormalbasis von V. Für beliebige $v \in V$ gilt:

$$v = \sum_{i=1}^{n} < v, v_i > \cdot v_i$$

Beweis:

- Darstellung eines Vektors bzgl. einer Basis:

  $$v = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot v_i$$

  mit eindeutig bestimmten $\xi_i \in \mathbb{R}$. Es gilt:

  $$\begin{aligned} < v, v_j > &= < \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot v_i, v_j > \\ &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i < v_i, v_j > \\ &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \delta_{ij} = \xi_j \end{aligned}$$

Bemerkung:

- Bzgl. Orthonormalbasis B ist die Koordinatenvektorabbildung einfach:

  $$\kappa_B(v) = x = \begin{pmatrix} < v, v_1 > \\ \vdots \\ < v, v_n > \end{pmatrix}$$

Satz 1: (Schmidtsches Orthonormierungsverfahren)

Zu je $m \leq n$ linear unabhängigen Vektoren $a_1, \dots, a_m$ eines euklidischen Vektorraums V mit $n = \dim V$ gibt es eine orthonormale Menge $v_1, \dots, v_k$, sodass $Lin(v_1, \dots, v_k) = Lin(a_1, \dots, a_k)$ für $k = 1, \dots, m$.

Folgerung: Für m=n: Jeder endlich-dimensionale Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis.

Beweis:

- Beweis durch Konstruktion der orthonormalen Menge $\{v_1, \dots, v_m\}$ nach dem Orthonormierungsverfahren von E. Schmidt

  1. Schritt:

     Normieren von a_1 liefert $v_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1$ und $Lin(v_1) = Lin(a_1)$.

2. Schritt:

   Bestimme $v_2' \in Lin(v_1, a_2)$ mit $< v_1, v_2' >= 0$. Ansatz:

$$v_2' = a_2 + \alpha_1 \cdot v_1$$

   mit

$$\begin{aligned} 0 &= < v_1, v_2' >=< a_2, v_1 > +\alpha_1 \cdot < v_1, v_1 > \\ \Rightarrow \alpha_1 &= - < a_2, v_1 > \\ \Rightarrow v_2' &= a_2 - < a_2, v_1 > \cdot v_1 \end{aligned}$$

   $v_2' \neq 0$, da Linearkombination aus linear unabhängigen Vektoren a_1, v_1. Normieren von v_2' liefert:

$$v_2 = \frac{1}{\|v_2\|} \cdot v_2'$$

   und $Lin(v_1, v_2) = Lin(a_1, a_2)$.

3. Schritt:

   Bestimme $v_3' \in Lin(v_1, v_2, a_3)$ mit $< v_3', v_1 >= 0$ und $< v_3', v_2 >= 0$

- Herleitung einer allgemeinen Formel:
  - Sei $\{v_1, \ldots, v_k\}$ orthonormal $(k < m)$ und $Lin(v_1, \ldots, v_k) = Lin(a_1, \ldots, a_k)$. Bestimme v_{k+1}' mit

$$v_{k+1}' = a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot v_i$$

    mit

$$\begin{aligned} 0 &= < v_{k+1}', v_j > \qquad j = 1, \ldots, k \\ &= < a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot v_i, v_j > \\ &= < a_{k+1}, v_j > + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot < v_i, v_j > \\ &= < a_{k+1}, v_j > + a_j \\ \Rightarrow a_j &= - < a_{k+1}, v_j > \\ \Rightarrow v_{k+1}' &= a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} < a_{k+1}, v_i > \cdot v_i \end{aligned}$$

    $v_{k+1}' \neq 0$, da nichttriviale Linearkombination aus linear unabhängigen Vektoren

$$v_{k+1} = \frac{1}{\|v_{k+1}'\|} \cdot v_{k+1}'$$

    Dann $\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$ orthonormal und $Lin(v_1, \ldots, v_{k+1}) = Lin(a_1, \ldots, a_{k+1})$.

Satz 2:

Sei W ein Untervektorraum eines endlich-dimensionalen Vektorraums V. Dann:

1. $V = W + W^{\perp} = \{v \in V | v = w + w^{\perp} \text{ mit } w \in W, w^{\perp} \in W^{\perp}\}$
2. $W \perp W^{\perp}$
3. $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$

Bemerkung:

- Nach Lemma 1: $W^{\perp}$ Untervektorraum von V. Nach a) ist V die Summe zweier Untervektorräume. Wegen b) heißt die Summe $W + W^{\perp}$ orthogonal.

Beweis:

- Es gibt eine Orthogonalbasis $\{w_1, \ldots, w_m\}$ für W. Basisergänzungssatz liefert Basis für V $\{w_1, \ldots, w_m, a_{m+1}, \ldots, a_n\}$. Mit Satz 1: Orthonormalbasis $\{w_1, \ldots, w_m, \ldots, w_n\}$ von V. Für beliebige $v \in V$:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot w_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \xi_i \cdot w_i}_{\in Lin(w_1,\ldots,w_m)=W} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^{n} \xi_i \cdot w_i}_{\in Lin(w_{m+1},\ldots,w_n)=W^{\perp}}$$

Basistransformation mit Orthonormalbasis:

Nach 4.4: Seien $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $B' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ Basen von V. Dann

$$v'_i = \sum_{k=1}^{n} s_{ki} \cdot v_k$$

mit $S = (s_{ki})$ regülär (Übergangsmatrix von B nach B'). Wenn B und B' Orthonormalbasen, dann:

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= < v'_i, v'_j > \\
&= < \sum_{k=1}^{n} s_{ki} \cdot v_k, \sum_{l=1}^{n} s_{lj} \cdot v_l > \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} s_{ki} \cdot s_{lj} \cdot < v_k, v_l > \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} s_{ki} \cdot s_{lj} \cdot \delta_{kl}
\end{aligned}$$

Nach 3.2.2:

$$\begin{aligned}
S^T \cdot S &= (s_{ij})^T \cdot (s_{ij}) \\
&= (\sigma_{ij}) \cdot (s_{ij}) \qquad \sigma_{ij} := s_{ji} \\
&= (p_{ij})
\end{aligned}$$

mit

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ij} \cdot s_{kj} = \sum_{k=1}^{n} s_{ki}^2$$

Damit:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} s_{kl} \cdot s_{kj} \\ \Rightarrow S^T \cdot S &= (\delta_{ij}) = E \\ \Rightarrow S^T &= S^{-1} \end{aligned}$$

Mit $S = (s_1 \dots s_n)$ folgt:

$$S^T \cdot S = (s_i^T \cdot s_j) = E$$

d.h. $s_i^T \cdot s_j = \delta_{ij}$. Bzgl. des natürlichen Skalarprodukts im $\mathbb{R}^n$ sind verschiedene Spalten von S orthogonal und jede Spalte ist normiert.

Definition:

Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt orthogonal, wenn $S^T = S^{-1}$ gilt (auch orthonormal genannt).

Satz 3:

Wird bzgl. einer Basistransformation eine Orthonormalbasis in eine Orthonormalbasis überführt, so ist die Übergangsmatrix orthogonal.

Bemerkung:

1. Wegen

   $$S^T \cdot S = E = S \cdot S^{-1} = S \cdot S^T$$

   gilt:

   $$\begin{aligned} S \cdot S^T = E &= \begin{pmatrix} s^1 \\ \vdots \\ s^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s^{1^T} & \dots s^{n^T} \end{pmatrix} \\ &= (\delta_{ij}) = (s^i \cdot s^{j^T}) \end{aligned}$$

   Die Zeilen von S sind normiert und paarweise verschiedene Zeilen sind orthogonal.

2. Die Zeilen (Spalten) einer orthogonalen Matrix S bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$.

Beispiel:

1. Die Matrix
$$S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
ist orthogonal für $\varphi \in \mathbb{R}$. Durch
$$\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto x' = S \cdot x$$
ist lineare Abbildung (Drehung um x_3-Achse des Koordinatensystems um Winkel φ) beschrieben.

Definition:

$$\begin{aligned} O(n) &= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | A^{-1} = A^T\} \\ SO(n) &= \{A \in O(n) | \det A = 1\} \end{aligned}$$

Satz 4:

O(n) und SO(n) bilden bzgl. der Matrizenmultiplikation je eine Gruppe - die orthogonale Gruppe bzw. spezielle orthogonale Gruppe.

Beweis:

- Nach 3.2 Satz 4: Die regulären Matrizen bilden bzgl. der Matrizenmultiplikation eine (nicht-kommutative) Gruppe. O(n) ist Teilmenge der Gruppe der regulären Matrizen, $SO(n) \subset O(n)$.
- Es genügt zu zeigen, dass O(n) eine Untergruppe der Gruppe der regulären Matrizen ist und SO(n) eine Untergruppe von O(n).
- Untergruppenkriterium für U:
  1. $e \in U$
  2. $a, b \in U \Rightarrow a \cdot b \in U$
  3. $a \in U \Rightarrow a^{-1} \in U$
- O(n) Untergruppe:
  1. $E \in O(n)$, denn $E^{-1} = E = E^T$.
  2. $\forall A, B \in O(n)$:
  $$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T$$
  3. Zu zeigen: $(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^T$ für alle $A \in O(n)$:
  $$\begin{aligned} A^{-1} &= A^T \\ (A^{-1})^T &= (A^T)^T = A = (A^{-1})^{-1} \end{aligned}$$
- SO(n) Untergruppe:
  1. $E \in SO(n)$, da $\det E = 1$ und $E \in O(n)$
  2. $\forall A, B \in SO(n)$: $A \cdot B \in O(n)$ nach Teil 1. Außerdem
  $$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 1$$
  3. $\forall A \in SO(n)$: $A^{-1} \in O(n)$ nach Teil 1. Und:
  $$\det(A^{-1}) = \det(A^T) = \det A = 1$$

7.3 Orthogonale Endomorphismen

Definition:

Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $< .,. >$, $f : V \to V$ Endomorphismus. f heißt orthogonal

$$:\Leftrightarrow \forall v, w \in V :< f(v), f(w) >=< v, w >$$

Lemma 1:

f orthogonal $\Rightarrow$

1. $\|f(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$
2. Wenn λ Eigenwert von f, dann $|\lambda| = 1$.
3. $\forall v, w \in V :< v, w >= 0 \Leftrightarrow < f(v), f(w) >= 0$.
4. f injektiv
5. Ist $\dim V < \infty$, dann ist f ein Automorphismus und f^{-1} ist orthogonal.

Beweis:

1. Nach Definition:
$$\forall v, w \in V :< f(v), f(w) >=< v, w >$$
Für v=w:
$$< f(v), f(v) >=< v, v > \Rightarrow \|f(v)\|^2 = \|v\|^2$$
2. $f(v) = \lambda \cdot v$ mit $v \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$. Mit 1.:
$$\begin{aligned} \|v\| &= \|f(v)\| = \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \\ |\lambda| &= 1 \end{aligned}$$
3. Klar mit Definition.
4. f injektiv $\Leftrightarrow$ Kern f = $\{0\}$ nach 4.1 Lemma 2. Angenommen $v_1, v_2 \in Kern(f)$ mit $v_1 \neq v_2$. Dann:
$$\begin{aligned} f(v_1) &= 0 = f(v_2) \\ \Rightarrow \|f(v_1)\| &= 0 = \|f(v_2)\| \\ \Rightarrow \|v_1\| &= 0 = \|v_2\| \\ \Rightarrow v_1 &= v_2 = 0 \end{aligned}$$
Widerspruch zur Annahme $v_1 \neq v_2$
5. Wenn $\dim V < \infty$, dann existiert Orthonormalbasis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V mit $n := \dim V$. Definition:
$$< f(v_i), f(v_j) >=< v_i, v_j >= \delta_{ij}$$

Also $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ Orthonormalbasis von V, damit f surjektiv. f nach d) injektiv, also bijektiv. Es existiert f^{-1} mit $f^{-1}(w_1) = v_1$ mit $f(v_1) = w_1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} < f^{-1}(w_1), f^{-1}(w_2) > &= < v_1, v_2 >=< f(v_1), f(v_2) > \\ &= < w_1, w_2 > \end{aligned}$$

Bemerkung: Lemma 1a) kann auch umgekehrt werden.

Satz 1:

Ist f ein Endomorphismus eines euklidischen Vektorraumes mit der Eigenschaft

$$\forall v \in V : \|f(v)\| = \|v\|$$

(dann heißt f isometrisch), dann ist f orthogonal.

Beweis: Übung

Lemma 2:

Sei V ein euklidischer Vektorraum mit $< .,. >$ und Orthonormalbasis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ mit $n := \dim V$. Dann gilt:

$$< v, w >= x^T \cdot y$$

wobei $x = \kappa_B(v)$ und $y = \kappa_B(w)$ die Koordinatenvektoren v und w bzgl. B.

Beweis:

- Es gilt:

$$< v, w >=< \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot v_j >$$

mit $x_i =< v, v_i >$ und $y_i =< w, v_i >$. Damit:

$$\begin{aligned} < v, w > &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j < v_i, v_j > \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = x^T \cdot y \end{aligned}$$

Satz 2:

Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Orthonormalbasis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, f Endomorphismus auf V, dann gilt: f orthogonal $\Leftrightarrow$ Darstellungsmatrix A von f bzgl. B orthogonal

Beweis:

- $f: V \to V, v \mapsto f(v) =: r$ hat bzgl. B die Darstellungsmatrix A mit $\kappa_B(r) = A \cdot x$ mit $\kappa_B(v) = x$. Sei $f(w) =: s$ und damit $\kappa_B(s) = A \cdot y$ mit $y = \kappa_B(w)$.

$$\begin{aligned}
f \text{ orthogonal} &\Leftrightarrow\ < f(v), f(w) >=< v, w > \\
&\Leftrightarrow\ (\kappa_B(r))^T \cdot \kappa_B(s) = x^T \cdot y \\
&\Leftrightarrow\ (Ax)^T \cdot Ay = x^T \cdot y \\
&\Leftrightarrow\ x^T \cdot A^T \cdot A \cdot y = x^T \cdot y \\
&\Leftrightarrow\ A^T \cdot A = E
\end{aligned}$$

7.4 Drehungen und Spiegelungen im $\mathbb{R}^2$

- Definition:

$$\begin{aligned}
D(\alpha) &:= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
S(\alpha) &:= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
D(\alpha) \cdot D(\beta) &= D(\alpha + \beta) \\
D(\alpha) \cdot S(\beta) &= S(\alpha + \beta) \\
S(\alpha) \cdot S(\beta) &= D(\alpha - \beta) \\
S(\beta) \cdot D(\alpha) &= S(\beta - \alpha)
\end{aligned}$$

Weiter gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\det D(\alpha) &= 1 \qquad \det S(\alpha) = -1 \\
(D(\alpha))^{-1} &= D(-\alpha) = (D(\alpha))^T \\
(S(\alpha))^{-1} &= S(\alpha) = (S(\alpha))^T
\end{aligned}$$

Also $D(\alpha)$ und $S(\alpha) \in O(2)$, d.h. das sind Darstellungsmatrizen von orthogonalen Endomorphismen Endomorphismen bzgl. einer Orthonormalbasis B des $\mathbb{R}^2$. Es sei $B = \{(0,1), (1,0)\}$.

- Jeder Einheitsvektor lässt sich schreiben als

$$e(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

mit $\varphi \in \mathbb{R}$. Für alle $x \in \mathbb{R}^2$:

$$x = \|x\| \cdot e(\varphi)$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
D(\alpha) \cdot e(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\varphi - \sin\alpha \cdot \sin\varphi \\ \sin\alpha \cdot \cos\varphi + \cos\alpha \cdot \sin\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \varphi) \\ \sin(\alpha + \varphi) \end{pmatrix} = e(\alpha + \varphi) \\
\Rightarrow x' := D(\alpha) \cdot x &= \|x\| \cdot e(\alpha + \varphi)
\end{aligned}$$

Satz 1:

1. Die Abbildung
$$\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto x' = D(\alpha) \cdot x$$
beschreibt eine Drehung um O durch den Winkel α.

2. Die Abbildung
$$\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \sigma(x) = S(\alpha) \cdot x$$
beschreibt eine Spiegelung an der Geraden durch O mit dem Neigungswinkel $\frac{\alpha}{2}$.

3. Sowohl σ als auch δ sind isometrische Automorphismen auf $\mathbb{R}^2$.

Beweis:

1. Siehe oben.

2. $$\begin{aligned} S(\alpha) \cdot x &= S(\alpha) \cdot \|x\| \cdot e(\varphi) \\ &= \|x\| \cdot D(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot e(\varphi) \\ &= \|x\| \cdot D(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= \|x\| \cdot D(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \|x\| \cdot D(\alpha) \cdot e(-\varphi) \\ &= \|x\| \cdot e(\alpha - \varphi) \end{aligned}$$

   - Für $\varphi = \frac{\alpha}{2}$:
   $$S(\alpha) \cdot x = S(\alpha) \cdot \|x\|\dot{e}(\frac{\alpha}{2}) = \|x\| \cdot e(\frac{\alpha}{2})$$
   Jeder Punkt $\|x\| \cdot e(\frac{\alpha}{2})$ wird auf sich selbst abgebildet.
   - Für $\varphi = \frac{\alpha}{2} + \pi$.
   $$\begin{aligned} S(\alpha) \cdot \|x\| \cdot e(\frac{\alpha}{2} + \pi) &= \|x\| \cdot e(\frac{\alpha}{2} - \pi) \\ \Rightarrow S(\alpha) \cdot x \cdot \begin{pmatrix} -\cos\frac{\alpha}{2} \\ -\sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} &= \|x\| \cdot \begin{pmatrix} -\cos\frac{\alpha}{2} \\ -\sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow -S(\alpha) \cdot \|x\| \cdot e(\frac{\alpha}{2}) &= -\|x\| \cdot e(\frac{\alpha}{2}) \end{aligned}$$
   Für $v := \pm\|x\| \cdot e(\frac{\alpha}{2})$ gilt $S(\alpha) \cdot v = v$. Damit: Alle Punkte der Geraden $g : x = \lambda \cdot v$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) werden auf sich selbst abgebildet. g ist eine Fixpunktgerade (Spiegelungsgerade).
   - Für $\varphi = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$ gilt:
   $$S(\alpha) \cdot \underbrace{e(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2})}_{=:w} = e(\alpha - (\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2})) = -w$$
   Jeder Punkt $\mu \cdot w$ wird auf $-y \cdot w$ abgebildet ($\mu \in \mathbb{R}$), d.h die Gerade $\mu \cdot w$ wird auf sich selbst abgebildet (Fixgerade), wobei $w \perp v$.

- Sei $x = \lambda \cdot v + \mu \cdot w$ ein beliebiger Punkt.

$$\begin{array}{rcl} S(\alpha) \cdot x &=& S(\alpha)(\lambda \cdot v + \mu \cdot w) \\ &=& \lambda \cdot \underbrace{S(\alpha) \cdot v}_{v} + \mu \cdot \underbrace{S(\alpha) \cdot w}_{-w} \\ &=& \lambda \cdot v - \mu \cdot w \\ \Rightarrow S(\alpha) \cdot x - x &=& -2\mu \cdot w \qquad \perp v \\ S(\alpha) \cdot x - \lambda \cdot v &=& -\mu \cdot w \\ x - \lambda \cdot v &=& \mu \cdot w \\ \Rightarrow \|S(\alpha) \cdot x - \lambda \cdot v\| &=& \|x - \lambda \cdot v\| = \|\mu \cdot w\| = |\mu| \end{array}$$

8 Komplexe und unitäre Vektorräume

8.1 Reelle Einschränkung und komplexe Erweiterung

einleitende Bemerkung:

- Einführung von $\mathbb{C}$ über Zahlenpaare: $\mathbb{C}$ ist ein Körper mit $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als Trägermenge und Addition

  $$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

  und Multiplikation

  $$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$$

- Wiederfinden des Ausgangskörpers $\mathbb{R}$ durch Einbetten mittels injektiver linearen Abbildung

  $$\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2, a \mapsto \iota(a) = (a, 0)$$

  Addition und Skalarmultiplikation in $\mathbb{R}$ gehen in verträglicher Weise in Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ über:

  $$\begin{aligned} \iota(a_1 + a_2) &= (a_1 + a_2, 0) = (a_1, 0) + (a_2, 0) = \iota(a_1) + \iota(a_2) \\ \iota(a_1 \cdot a_2) &= (a_1 \cdot a_2, 0) = (a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = \iota(a_1) \cdot \iota(a_2) \end{aligned}$$

  Insbesondere findet man Null und Eins von $\mathbb{C}$:

  $$\iota(0) = (0, 0) \qquad \iota(1) = (-1, 0)$$

  Bekannte Schreibweise erhält man durch $\imath := (0, 1)$,

  $$\imath^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$$

  Damit $a_1 + \imath \cdot b_1 = (a_1, b_1)$

- Bemerkungen:

  1. $\mathbb{R}^2$ ist ein Körper, der zu dem Körper

     $$\mathbb{C} = \{a + \imath \cdot b | a, b \in \mathbb{R}, \imath^2 = -1\}$$

     isomorph - zwei verschiedene Ausführungen desselben Körpers (gleiche Struktur)

2. Alle n-dimensionalen Vektorräume über demselben Körper sind isomorph ($\rightarrow$ 4.1)

- Ein Vektorraum heißt komplex, falls $K = \mathbb{C}$.
- Beispiele:

1. Es sei
$$\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) | z_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, n\}$$
mit Addition
$$z + z' = (z_1 + z_1', \ldots, z_n + z_n')$$
und Skalarmultiplikation
$$c \cdot z = (c \cdot z_1, \ldots, c \cdot z_n)$$
mit $c \in \mathbb{C}$. Es gilt: $\dim \mathbb{C}^n = n$.

2. Es sei
$$\mathbb{R}^{2n} = \{(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) | a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$
mit komponenterweiser Addition und Skalarmultiplikation
$$c \cdot x = (c_1 \cdot a_1 - c_2 \cdot b_2, \ldots, c_1 \cdot a_n - c_2 \cdot b_n, c_1 \cdot b_1 + c_2 \cdot a_1, \ldots, c_1 \cdot b_n + c_2 \cdot a_n)$$
mit $c = c_1 + \imath \cdot c_2 \in \mathbb{C}$. Es gilt: $\dim \mathbb{R}^{2n} = 2n$.

Lemma 1:

Ist V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, so ist V auch ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Beweis:

- Menge der Vektoren unverändert, Wechsel zu einem Unterkörper.

Definition:

Ist V ein komplexer Vektorraum, so heißt V über $\mathbb{R}$ seine reelle Einschränkung, Bezeichnung: rV. (auch: Reellifizierung von V)

Satz 1:

Sei V ein komplexer Vektorraum.

1. Vektoren, die in V linear unabhängig sind, sind auch in rV linear unabhängig.
2. Vektoren, die in V linear abhängig sind, sind in rV nicht notwendig linear abhängig.
3. Vektoren, die in rV linear unabhängig sind, sind in rV nicht notwendig linear unabhängig.
4. $\dim V = n \Rightarrow \dim rV = 2n$

Beweis:

- 1.-3.: Übung
- 4.: $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ sei Basis von V.

$$\begin{aligned}\kappa_B : V \to \mathbb{C}^n, v \mapsto \kappa_B(v) &= (x_1 + \imath \cdot y_1, \ldots, x_n + \imath \cdot y_n) \\ \Rightarrow v &= \sum_{k=1}^{n} (x_k + \imath \cdot y_k) \cdot v_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k + \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \imath \cdot v_k\end{aligned}$$

Damit $B* = \{v_1, \ldots, v_n, \imath \cdot v_1, \ldots, \imath \cdot v_n\}$ Erzeugendensystem von rV und linear unabhängig über $\mathbb{R}$, also Basis von rV.

Lemma 2:

Sei V ein komplexer Vektorraum mit Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann ist

$$V_B := \{v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k | \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

wobei $\forall v, w \in V_B$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}v + w &:= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot v_k = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k) \cdot v_k \in V_B \\ \lambda \cdot v &:= \sum_{k=1}^{n} \lambda \cdot \lambda_k \cdot v_k \in V_B\end{aligned}$$

Dann ist V_B ein reeller Vektorraum der Dimension n, der ein reeller Ausschnitt von V bzgl. B heißt.

Satz 2:

Sind B und B' zwei Basen eines komplexen Vektorraumes V, so stimmen die reellen Ausschnitte V_B und $V_{B'}$ genau dann überein, falls es eine reelle Übergangsmatrix S für eine Basistransformation von B nach B' existiert.

Komplexe Erweiterung: Auf welche natürliche Weise kann V über $\mathbb{R}$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{C}$ erweitert werden? I.A. ist für $v \in V$: $\imath \cdot v \notin V$. Also muss Menge der Vektoren vergrößert werden.

Lemma 3:

Die aus V über $\mathbb{R}$ definierte Menge

$$cV := V \times V = \{(v, w) | v, w \in V\}$$

ist mit Addition

$$(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$$

und Skalarmultiplikation

$$c \cdot (v, w) := (c_1 \cdot v - c_2 \cdot w, c_1 \cdot w + c_2 \cdot v)$$

mit $c = c_1 + \imath \cdot c_2 \in \mathbb{C}$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, die komplexe Erweiterung (Komplexifizierung) von V.

Bemerkungen:

1. Vorbild: $\mathbb{C}$
2. (0,0) ist Nullvektor mit $0 \in V$
3. Es gilt:

$$\imath \cdot (v, w) = (-w, v) \quad \imath \cdot (0, w) = (-w, 0) \quad \imath \cdot (v, 0) = (0, v)$$

4. V über $\mathbb{R}$ kann mittels $\iota : V \to \mathbb{C}, v \mapsto \iota(v) = (v, 0)$ (injektiv und linear) in cV eingebettet werden.

Satz 3:

Ist V ein reeller Vektorraum mit Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und cV die Komplexifizierung von V, so ist

1. $cB = \{(v_1, 0), \ldots, (v_n, 0)\}$ eine Basis von cV
2. der reelle Aussschnitt $(cV)_{cB}$ gleich $\iota(V) = V \times \{0\}$, also isomorph zu V.

Beweis:

1. cB ist ein Erzeugendensystem von cV, denn $\forall (v, w) \in cV$:

$$\begin{aligned} (v, w) &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k, \sum_{r=1}^{n} y_r \cdot v_r \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (x_k + \imath \cdot y_k) \cdot (v_k, 0) \end{aligned}$$

   cB ist linear unabhängig:

$$\begin{aligned} (0, 0) &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k, \sum_{r=1}^{n} y_r \cdot v_r \right) \\ \Rightarrow x_k &= y_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

Satz 4:

cV sei Komplexifizierung eines reellen Vekorraumes V. Für jeden reellen Ausschnitt $W := (cV)_{cB}$ gilt: $cW \cong cV$.

Beweis: Übung

Naheliegende Schreibweise

$$(u, v) := u + \imath \cdot v \qquad i^2 = -1$$

und rein formal gleiche Addition und Multiplikation wie bei komplexen Zahlen

$$\begin{aligned} cV &= V \times \imath V = \{u + \imath \cdot v | u, v \in V\} \\ (u, v) + (u', v') &= (u + u') + \imath \cdot (v + v') \\ (c_1 + \imath \cdot c_2) \cdot (u, v) &= (c_1 \cdot u - c_2 \cdot v) + \imath \cdot (c_1 \cdot v + c_2 \cdot u) \end{aligned}$$

Definition:

$\bar{z} = u - \imath \cdot v$ heißt der konjugiert komplexe Vektor von $z = u + \imath \cdot v \in cV$. Wenn $\bar{z} = z$, dann heißt z reell. Es gilt: $\bar{\bar{z}} = z$.

Satz 5: (Fortsetzung einer linearen Abbildung)

Seien V,W reelle Vektorräume und cV, cW ihre Komplexifizierungen. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Es gibt genau eine lineare Abbildung $cf : cV \to cW$ für deren Einschränkung $V \times \{0\}$:

$$cf|_{V \times \{0\}} = \iota \circ f \qquad (13)$$

Beweis:

- Es gilt: $f(\alpha \cdot v + \alpha' \cdot v') = \alpha \cdot f(v) + \alpha' \cdot f(v')$ für alle $v, v' \in V, \alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$. Sei $cf : cV \to cW$ mit $cV = V \times V$ und $cW = W \times W$, $z = (v, w) \mapsto cf(z)$ linear, d.h.

$$\begin{aligned} cf(z + z') &= cf(z) + cf(z') = cf((v, w)) + cf((v', w')) \\ cf(s \cdot z) &= s \cdot c(f) = s \cdot cf((v, w)) \end{aligned}$$

  Bei Einschränkung auf $s \in \mathbb{R}$ und $z, z' \in V \times \{0\}$ gelte (13), also:

$$cf(z) = cf((v, 0)) = \iota(f(v)) = (\iota \circ f)(v)$$

  Dann ist

$$\begin{aligned} \imath \cdot cf(z) &= \imath \cdot cf((v, 0)) = \imath \cdot (f(v), 0) = (0, f(v)) \\ \Rightarrow cf(v, w) &= cf((v, 0)) + cf((0, w)) = cf((v, 0)) + \imath \cdot cf((w, 0)) \\ &= (f(v), 0) + (0, f(w)) \\ = (f(v), f(w)) & \end{aligned}$$

  Falls also eine lineare Abbildung cf mit Eigenschaft (13) existiert, so gilt $cf((v, w)) = (f(v), f(w))$ und die Darstellung ist eindeutig.

- Umgekehrt: Verwendet man $cf((v, w)) = (f(v), f(w))$ als Definition von cf, so rechnet man die Linearität nach.

8.2 Unitäre Vektorräume

8.2.1 Semibilinearformen

- K sei Körper mit bijektiver Abbildung $K \to K : a \mapsto \bar{a}$ mit $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$, $\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$, $\bar{\bar{a}} = a$ für alle $a, b \in K$.

  Beispiel: $\mathbb{C}$ mit Abbildung $a + \imath \cdot b \mapsto a - \imath \cdot b$

- V,W seien Vektorräume über K, Abbildung $\sigma : V \times W \to K$, $(v, w) \mapsto \sigma(v, w)$ heißt Semibilinearform, wenn $\forall v, v' \in V, w, w' \in W, a \in K$: :
  - (S1) $\sigma(v + v', w) = \sigma(v, w) + \sigma(v', w)$ (additiv bzgl. 1. Komponente)
  - (S2) $\sigma(v, w + w') = \sigma(v, w) + \sigma(v, w')$ (additiv bzgl. 2. Komponente)
  - (S3) $\sigma(a \cdot v, w) = a \cdot \sigma(v, w)$ (homogen bzgl. 1. Komponente)
  - (S4) $\sigma(v, a \cdot w) = \bar{a} \cdot \sigma(v, w)$ (konjugiert homogen bzgl. 2. Komponente)

  Wenn $\forall a \in K : a = \bar{a}$, so heißt σ eine Bilinearform.

- Beispiele:
  1. Sei $V = W = \mathbb{R}^n, K = \mathbb{R}, \forall : a = \bar{a}$,
  $$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$
  ist eine Bilinearform, bekannt als natürliches Skalarprodukt.
  2. Sei $V = W = \mathbb{C}^n$, $K = \mathbb{C}$, $\bar{a}$ ist konjugiert komplexe Zahl von a. Mit
  $$\sigma(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \bar{y_k}$$
  ist Semibilinearform definiert:

     (S1)-S(3): Klar

     (S4):
  $$\begin{aligned} \sigma(x, a \cdot y) &= \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \overline{a \cdot y_k} = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \bar{a} \cdot \bar{y_k} \\ &= \bar{a} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \bar{y_k} = \bar{a} \cdot \sigma(x, y) \end{aligned}$$
  3. Sei $V = W = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}, a = \bar{a}$.
  $$\sigma(x, y) = x^T \cdot A \cdot y$$
  mit $A = A^T \neq 0$ ist Bilinearform. Die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\sigma(x, x) = 1$ ist eine Quadrik (Kegelschnitt) des $\mathbb{R}^2$.

Beispiel:

$$\sigma(x,x) = 1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_2^2$$

(Ellipse)

4. Sei $V = W = C[a,b]$: Menge der stetigen Funktionen über dem Intervall [a,b], $K = \mathbb{R}, a = \bar{a}$. Für $f, g \in C[a,b]$:

$$\sigma(f,g) = \int_a^b (f \cdot g)(x)\,dx$$

ist Bilinearform.

- Endlich dimensionale Vektorräume V,W über K. V habe Basis $B = \{v_1, \ldots, v_m\}$, W habe Basis $C = \{w_1, \ldots, w_n\}$. $\sigma : V \times W \to K$ sei Semibilinearform. Dann:

$$m_{ij} := \sigma(v_i, w_j) \qquad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$$

mit ${}_BM_C = (m_{ij}) \in K^{m \times n}$: Darstellungsmatrix von σ bzgl. der Basen B und C von V,W.

$$\begin{aligned} \forall v \in V : v &= \sum_{i=1}^m x_i \cdot v_i \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \kappa_B(v) \\ \forall w \in W : w &= \sum_{j=1}^n y_j \cdot w_j \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \kappa_C(w) \end{aligned}$$

Mit (S1)-(S4) folgt:

$$\begin{aligned} \sigma(v,w) &= \sigma(\sum_{i=1}^m x_i \cdot v_i, \sum_{j=1}^n y_j \cdot w_j) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i \cdot \bar{y_j} \cdot \sigma(v_i, w_j) \\ &= x^T \cdot_B M_C \cdot \bar{y} \end{aligned}$$

Satz 1:

Eine Semibilinearform $\sigma : V \times W \to K$ mit der Darstellungsmatrix ${}_BM_C$ berechnet sich gemäß

$$\sigma(v,w) = x^T \cdot_B M_C \cdot \bar{y}$$

mit $x = \kappa_B(v)$ und $y = \kappa_C(w)$.

8.2.2 Symmetrische, hermitesche Formen und Skalarprodukt

Definition:

- Semibilinearform $\sigma : V \times W \to K$ heißt

- ... symmetrisch :$\Leftrightarrow$ $V = W$ und $\sigma(v,w) = \sigma(w,v)$
- ... hermitesch :$\Leftrightarrow$ $V = W$ und $\sigma(v,w) = \overline{\sigma(w,v)}$

- Beispiele:
  1. Die Bilinearformen aus Beispiel 1,3,4 ($\rightarrow$ 8.2.1) sind symmetrisch.
  2. Die Semibilinearform aus Beispiel 2 ($\rightarrow$ 8.2.1) ist eine hermitesche Form.

Lemma 1:

Ist $\sigma : V \times V \rightarrow K$ eine symmetrische bzw. hermitesche Semibilinearform, dann gilt:

1. $(S1) \Rightarrow (S2)$ und $(S3) \Rightarrow (S4)$
2. $\sigma(v,v) = \overline{\sigma(v,v)}$ für alle $v \in V$
3. $K = \mathbb{C}$ und $\bar{a}$ Konjugium von a, dann $\sigma(v,v)$ reell.
4. Jede Darstellungsmatrix M von σ ist symmetrisch ($M = M^T$) bzw. hermitesch ($M = \bar{M}^T$)

Beweis:

- Hermitesch:
  1. Es gilt:
  $$\begin{aligned} \sigma(v, w + w') &= \overline{\sigma(w + w', v)} = \overline{\sigma(v,w) + \sigma(w',v)} \\ &= \overline{\sigma(w,v)} + \overline{\sigma(w',v)} = \sigma(v,w) + \sigma(v,w') \end{aligned}$$
  Und:
  $$\begin{aligned} \sigma(v, a \cdot w) &= \overline{\sigma(a \cdot w, v)} = \overline{a \cdot \sigma(w,v)} \\ &= \bar{a} \cdot \overline{\sigma(w,v)} = \bar{a} \cdot \sigma(v,w) \end{aligned}$$
  2. Klar nach Definition.
  3. Klar.
  4. V=W habe Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, dann:
  $$m_{ij} = \sigma(v_i, v_j) = \overline{\sigma(v_j, v_i)} = \overline{m_{ji}}$$
  Damit:
  $$M = (m_{ij}) \Rightarrow M^T = (m_{ji}) \Rightarrow \bar{M}^T = (\overline{m_{ji}}) = (m_{ij}) = M$$
- Symmetrisch: Klar.

Definition:

1. Semibilinearform $\sigma : V \times V \rightarrow K$ mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ heißt positiv definit, wenn $\forall v \in V \backslash \{0\}$
$$\sigma(v,v) \in \mathbb{R}, \sigma(v,v) > 0$$

2. Eine positiv definite symmetrische bzw. hermitesche Semibilinearform von V heißt ein Skalarprodukt (inneres Produkt).

Beispiele: (aus 8.2.1)

1. $V = W = \mathbb{R}^n$, $K = \mathbb{R}$,$a = \bar{a}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \sigma(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i = \sigma(y,x) \\ \sigma(x,x) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0 \,\text{für}\, x \neq 0 \end{aligned}$$

Also σ Skalarprodukt.

2. $V = W = \mathbb{C}^n$, $K = \mathbb{C}$, $\bar{a}$ Konjugium von a

$$\begin{aligned} \sigma(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \overline{x_i}} = \overline{\sigma(y,x)} \\ \sigma(x,x) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} (x_{i1}^2 + x_{i2}^2) > 0 \,\text{für}\, x \neq 0 \end{aligned}$$

Also σ Skalarprodukt.

3. $V = W = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, $\bar{a} = a$

$$\begin{aligned} \sigma(x,y) &:= x^T \cdot A \cdot y \\ \sigma(y,x) &= y^T \cdot A \cdot x = (y^T \cdot A \cdot x)^T \\ &= x^T \cdot A^T \cdot y = x^T \cdot A \cdot y = \sigma(y,x) \end{aligned}$$

σ ist nicht positiv definit:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \sigma(x,x) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1^2 < 0 \end{aligned}$$

4. $V = W = C[a,b]$, $K = \mathbb{R}$, $\bar{a} = a$

$$\begin{aligned} \sigma(f,g) &= \int_a^b f(t) \cdot g(t)\, dt = \int_a^b g(t) \cdot f(t)\, dt = \sigma(g,f) \\ \sigma(f,f) &= \int_a^b f^2(t)\, dt > 0 \qquad (f \neq 0) \end{aligned}$$

Also σ Skalarprodukt.

Lemma 2:

σ sei positiv definite Semibilinearform mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, dann gilt:

$$\sigma(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Beweis:

1. „⇒“:

   anderenfalls Widerspruch zur Definition

2. „⇐“:

   Sei $v = 0$. Dann $v = 0 \cdot w$ mit $w \neq 0$. Also:

$$\sigma(v,v) = \sigma(0 \cdot w, 0 \cdot w) = 0 \cdot \sigma(w, 0 \cdot w) = 0$$

Lemma 3:

Sei (V, σ) ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum mit Orthonormalbasis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Die Darstellungsmatrix von σ bzgl. B ist die $n \times n$-Einheitsmatrix und damit $\sigma(x, y) = x^T \cdot \bar{y}$ mit $x = \kappa_B(v)$ und $y = \kappa_B(w)$ für $v, w \in V$.

Beweis:

- Es gilt: $\sigma(x, y) = x^T \cdot M \cdot \bar{y}$ mit $M = (m_{ij})$,

$$m_{ij} = \sigma(v_i, v_j) = \delta_{ij} \Rightarrow M = E$$

8.2.3 Normierte, euklidische und unitäre Vektorräume

- Sei V ein Vektorraum über K. Eine Abbildung $\|.\| : V \to K,\ v \mapsto \|v\|$ heißt Norm auf V, wenn
  - (N1) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
  - (N2) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$
  - (N3) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- Ein Vektorraum, auf dem eine Norm erklärt ist, heißt ein normierter Vektorraum $(V, \|.\|)$.
- Wenn σ ein Skalarprodukt auf V und $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$, dann heißt (V, σ) ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum.
- In jedem euklidischen bzw. unitären Vektorraum (V, σ) kann durch

$$\|v\| = \sqrt{\sigma(v, v)}$$

  eine Norm definiert werden. Um (N1)-(N3) nachzuweisen, brauchen wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Satz 2: (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

In jedem euklidischen bzw. unitären Vektorraum (V, σ) gilt:

$$\sigma(u, v) \cdot \overline{\sigma(u, v)} \leq \sigma(u, u) \cdot \sigma(v, v)$$

d.h. mit Norm geschrieben:

$$|\sigma(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

wobei „=“ ⇔ u,v linear abhängig.

Beweis:

- Sei $v \neq 0$, anderenfalls Behauptung trivial. Dann $\forall \lambda \in K$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sigma(u - \lambda \cdot v, u - \lambda \cdot v) \\ &= \sigma(u,u) + \sigma(u, -\lambda \cdot v) + \sigma(-\lambda \cdot v, u) + \sigma(-\lambda \cdot v, -\lambda \cdot v) \\ &= \sigma(u,u) - \bar{\lambda} \cdot \sigma(u,v) - \lambda \cdot \sigma(v,u) + \lambda \cdot \bar{\lambda} \cdot \sigma(v,v) \end{aligned}$$

Speziell für $\lambda = \frac{\sigma(u,v)}{\sigma(v,v)}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sigma(u,u) - \frac{\overline{\sigma(u,v)}}{\sigma(v,v)} \cdot \sigma(u,v) - \frac{\sigma(u,v)}{\sigma(v,v)} \cdot \overline{\sigma(u,v)} \\ &\quad + \frac{\overline{\sigma(u,v)}}{\sigma(v,v)^2} \cdot \sigma(u,v) \cdot \sigma(v,v) \\ &= \sigma(u,u) - \frac{\sigma(u,v)}{\sigma(v,v)} \cdot \overline{\sigma(u,v)} \\ \sigma(u,v) \cdot \overline{\sigma(u,v)} &\leq \sigma(u,u) \cdot \sigma(v,v) \end{aligned}$$

Für $c \in \mathbb{C}$ gilt: $c \cdot \bar{c} = |c|^2$. Damit:

$$|\sigma(u,v)|^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$$

„=“ $\Leftrightarrow u - \lambda \cdot v = 0 \Leftrightarrow$ u,v linear abhängig.

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^n$:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j \right) \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2 \right)$$

2. $\mathbb{C}^n$:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \overline{y_j} \right) \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2 \right)$$

3. $C[a,b]$

$$\left(\int_a^b f(t) \cdot g(t)\, dt \right) \leq \left(\int_a^b f^2(t)\, dt \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(t)\, dt \right)$$

Satz 3:

Jeder euklidischer bzw. unitärer Vektorraum (V, σ) wird durch $\|v\| := \sqrt{\sigma(v,v)}$ für $v \in V$ zu einem normierten Vektorraum, d.h. es gelten (N1)-(N3)

Beweis:

- Definition sinnvoll, da $\sigma(v,v) \geq 0$. (N1):

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot v\| &= \sqrt{\sigma(\lambda \cdot v, \lambda \cdot v)} = \sqrt{\lambda \cdot \bar{\lambda} \cdot \sigma(v,v)} \\ &= \sqrt{|\lambda|^2} \cdot \sqrt{\sigma(v,v)} = |\lambda| \cdot \|v\| \end{aligned}$$

(N2):

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \sigma(u+v, u+v) = \sigma(u,u) + \sigma(u,v) + \underbrace{\sigma(v,u)}_{\overline{\sigma(u,v)}} + \sigma(v,v) \\ &= \sigma(u,u) + 2Re(\sigma(u,v)) + \sigma(v,v) \\ &\leq \sigma(u,u) + 2|\sigma(u,v)| + \sigma(v,v) \\ &= \|u\|^2 + 2|\sigma(u,v)| + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2 \cdot \|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

(N3) gilt wegen $\|v\| = \sqrt{\sigma(v,v)} = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (Folgerung 2 in 7.2)

8.3 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

- Sei (V, σ) ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum.
- Die Definitionen zur Orthogonalität von Vektoren, Teilmengen aus Vektoren und zur Orthonormalität von Vektoren wird von euklidischen Vektorräumen auf unitäre Vektorräume übertragen, indem das Skalarprodukt $< .,. >$ in 7.2 durch $\sigma(.,.)$ ersetzt wird.
- Ein Endomorphismus f auf einem euklidischen bzw. unitären Vektorraum (V, σ) heißt orthogonal bzw. unitär

$$:\Leftrightarrow \forall v, w \in V : \sigma(f(v), f(w)) = \sigma(v, w)$$

- Ein Endomorphismus f heißt isometrisch

$$:\Leftrightarrow \forall v \in V : \|f(v)\| = \|v\|$$

Lemma 1:

Endomorphismus f sei orthogonal bzw. unitär. Dann gilt:

1. $\|f(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$
2. Ist λ Eigenwert von f, dann $|\lambda| = 1$.
3. $\forall v, w \in V : \sigma(v,w) = 0 \Leftrightarrow \sigma(f(v), f(w)) = 0$
4. f ist injektiv.
5. Wenn $\dim V < \infty$, dann ist f ein Automorphismus und f^{-1} ist orthogonal bzw. unitär.

Beweis: siehe 7.3 für „orthogonal“, analog für „unitär“

Satz 1:

Ein Endomorphismus f ist isometrisch $\Leftrightarrow$ f orthogonal bzw. unitär

Beweis:

1. „$\Leftarrow$“: siehe Lemma 1,a)
2. „$\Rightarrow$“: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|\alpha \cdot v + \beta \cdot w\|^2 &= \sigma(\alpha \cdot v + \beta \cdot w, \alpha \cdot v + \beta \cdot w) \\
&= \alpha \cdot \bar{\alpha} \cdot \sigma(v,v) + \alpha \cdot \bar{\beta} \cdot \sigma(v,w) + \bar{\alpha} \cdot \beta \cdot \sigma(w,v) + \beta \cdot \bar{\beta} \cdot \sigma(w,w) \\
&= |\alpha|^2 \cdot \|v\|^2 + \alpha \cdot \bar{\beta} \cdot \sigma(v,w) + \bar{\alpha} \cdot \beta \cdot \sigma(w,v) + |\beta|^2 \cdot \|w\|^2 \\
&\overset{!}{=} \|\alpha \cdot f(v) + \beta \cdot f(w)\|^2 \\
&= |\alpha|^2 \cdot \|f(v)\|^2 + \alpha \cdot \bar{\beta} \cdot \sigma(f(v), f(w)) + \bar{\alpha} \cdot \beta \cdot \sigma(f(w), f(v)) \\
&\quad + |\beta|^2 \cdot \|f(w)\|^2
\end{aligned}$$

Wegen $\|f(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$ folgt:

$$\alpha \cdot \bar{\beta} \cdot \sigma(f(v), f(w)) + \bar{\alpha} \cdot \beta \cdot \sigma(f(w), f(v)) = \alpha \cdot \bar{\beta} \cdot \sigma(v,w) + \bar{\alpha} \cdot \beta \cdot \sigma(w,v)$$

Wenn $\alpha = \beta = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sigma(f(v), f(w)) + \sigma(f(w), f(v)) &= \sigma(v,w) + \sigma(w,v) \\
\sigma(f(v), f(w)) + \overline{\sigma(f(v), f(w))} &= \sigma(v,w) + \overline{\sigma(v,w)} \\
Re(\sigma(f(v), f(w))) &= Re(\sigma(v,w))
\end{aligned}$$

Wenn $\alpha = -1, \beta = \imath$ folgt:

$$\begin{aligned}
\sigma(f(v), f(w)) - \sigma(f(w), f(v)) &= \sigma(v,w) - \sigma(w,v) \\
\sigma(f(v), f(w)) - \overline{\sigma(f(v), f(w))} &= \sigma(v,w) - \overline{\sigma(v,w)} \\
Im(\sigma(f(v), f(w))) &= Im(\sigma(v,w))
\end{aligned}$$

Also $\sigma(f(v), f(w)) = \sigma(v,w)$.

Unitäre Matrizen:

- Mit $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ als Orthonormalbasis von (V, σ) wollen wir 7.3, Satz 2 auf unitäre Vektorräume übertragen: f orthogonal $\Leftrightarrow$ Darstellungsmatrix bzgl. B ist orthogonal
- Es sind äquivalent:
    1. f unitär
    2. $\sigma(f(v), f(w)) = \sigma(v,w)$

3. $r^T \cdot \bar{s} = x^T \cdot \bar{y}$ mit $r = \kappa_B(f(v)), s = \kappa_B(f(w)), x = \kappa_B(v), y = \kappa_B(w)$ und weiter: $r = A \cdot x$, $s = A \cdot y$, wobei A Darstellungsmatrix von f bzgl. B. Damit gilt:

$$\begin{aligned} (A \cdot x)^T \cdot (\bar{A} \cdot \bar{y}) &= x^T \cdot \bar{y} \\ x^T \cdot A^T \cdot \bar{A} \cdot \bar{y} &= x^T \cdot \bar{y} \\ x^T \cdot (A^T \cdot \bar{A} - E) \cdot \bar{y} &= 0 \\ A^T \cdot \bar{A} &= E \\ A \cdot \bar{A}^T &= E^T = E \end{aligned}$$

4. $A^{-1} = \bar{A}^T$.

- Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bzw. $\in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt ...
  - orthogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^T$
  - unitär $:\Leftrightarrow A^{-1} = \bar{A}^T$

Satz 2:

(V, σ) habe Orthonormalbasis B. Ein Endomorphismus f auf V ist orthogonal bzw. unitär $\Leftrightarrow$ Darstellungsmatrix von f bzgl. B ist orthogonal bzw. unitär.

Bemerkung:

- Bekanntlich

$$\begin{aligned} O(n) &= \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A^{-1} = A^T\} \\ SO(n) &= \{A \in O(n) | \det A = 1\} \end{aligned}$$

  Sei
$$U(n) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} | A^{-1} = \bar{A}^T\}$$
  die Menge der unitären Matrizen.

Satz 3:

O(n), SO(n), U(n) sind Gruppen bzgl. der Matrizenmultiplikation - die orthogonale, spezielle orthogonale und unitäre Gruppe.

Satz 4:

Wird bei einer Basistransformation in einem euklidischen bzw. unitären Vektorraum eine Orthonormalbasis in eine Orthonormalbasis überführt, so ist die Übergangsmatrix orthogonal bzw. unitär.

Beweis: Übung

Folgerung 1:

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitär $\Leftrightarrow$ Spaltenvektoren von A sind eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ $\Leftrightarrow$ Zeilenvektoren von A bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^n$.

Folgerung 2:

A unitär $\Rightarrow |\det A| = 1$

Beweis: Übung

Satz 5:

Ist $f : V \to V$ ein unitärer Endomorphismus und $\dim V < \infty$, dann besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f.

Beweis:

- vollständige Induktion über $n = \dim V \geq 1$

  I.V.: Satz gelte für V mit $\dim V = n - 1$

  I.B.: Sei $\dim V = n$.

  $$\chi(\lambda) = \pm(c_1 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (c_n - \lambda) \qquad c_i \in \mathbb{C}$$

  zerfällt über $\mathbb{C}$ vollständig in Linearfaktoren und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind die Eigenwerte von f. Sei v_1 Eigenwert zu λ_1 mit $\|v_1\| = 1$,

  $$\begin{aligned} f(v_1) &= \lambda_1 \cdot v_1 \\ W &= \{w \in V | \sigma(w, v_1) = 0\} \end{aligned}$$

  Es gilt: $f(W) \subset W$, denn $\forall w \in W$:

  $$\begin{aligned} \sigma(f(w), \lambda_1 \cdot v_1) &= \sigma(f(w), f(v_1)) \\ &= \sigma(w, v_1) = 0 \\ &= \bar{\lambda}_1 \cdot \sigma(f(w), v_1) \end{aligned}$$

  Nach Lemma 1b): λ Eigenwert von f, dann $|\lambda| = 1$. Damit:

  $$\sigma(f(w), v_1) = 0$$

  Definiere $g : f|W \to W$. g ist unitär und es gilt: $\dim W = n - 1$. Aufgrund der Induktionsvoraussetzung gibt es eine Orthonormalbasis $v_2, \ldots, v_n$ von W bestehend aus Eigenvektoren von g.

  Es ist dann $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von $V = Linv_1 \oplus W$, bestehend aus Eigenvektoren von f.

Bemerkung:

- *Obiger Satz/Beweis wurde korrigiert, da nur diese Beweisrichtung korrekt ist.*

- Der Satz gilt nur dann für orthogonale Endomorphismen, falls deren charakteristische Polynome vollständig in Linearfaktoren zerfallen.

Satz 6:

1. Jeder unitäre Endomorphismus f eines endlich-dimensionalen Vektorraumes V ist diagonalisierbar und besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

2. Hat f die Darstellungsmatrix $A \in U(n)$, dann gibt es $S \in U(n)$, sodass

$$\bar{S}^T \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_i \in \mathbb{C}, |\lambda_i| = 1$ für $i = 1, \ldots, n$.

3. $V = U_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus U_{\lambda_n}$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von f bzw. A bezeichnen und U_{λ_i} den Eigenraum von λ_i.

Beweis:

1. Nach 6.1,Satz 1: f diagonalisierbar $\Leftrightarrow \exists$ Basis aus Eigenvektoren ... und Satz 5.

2. Nach 4.4,(17)

$$A' = S^{-1} \cdot A \cdot S$$

wenn A Darstellungsmatrix von f bzgl. $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, A' Darstellungsmatrix von f bzgl. B' und S Übergangsmatrix von B nach B'. Mit 4.4 (14) ist dabei

$$v'_j = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot s_{kj}$$

Man wähle eine nach Satz 5 existierende Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f, dann ist nach Satz 4 S unitär und $f(v'_j) = \lambda_j \cdot v'_j$, λ_i Eigenwert von f, $\lambda_i| = 1$ für $i = 1, \ldots, n$ (Lemma 1b). Die Darstellungsmatrix von f bzgl. B' ist

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Da S unitär:

$$A' = \bar{S}^T \cdot A \cdot S$$

3. $V = U_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus U_{\lambda_m}$ nach 2.3, Satz 2. Sei $v \in U_{\lambda_i}, w \in U_{\lambda_j}$. Dann:

$$\begin{aligned} \sigma(v,w) &= \sigma(f(v), f(w)) \\ &= \sigma(\lambda_i \cdot v, \lambda_j \cdot w) \\ &= \lambda_i \cdot \bar{\lambda}_j \cdot \sigma(v,w) \end{aligned}$$

Angenommen $\sigma(v,w) \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_i \cdot \bar{\lambda}_j &= 1 \\ \Rightarrow \bar{\lambda}_i \cdot \lambda_j &= 61 \\ \Rightarrow \lambda_j &= |\lambda_i|^2 \cdot \lambda_j = \lambda_i \cdot \bar{\lambda}_i \cdot \lambda_j = \lambda_i \end{aligned}$$

im Widerspruch zu $i \neq j$. Also $\sigma(v,w) = 0$.

Rückblick in 7.4

- Sei $A \in O(2)$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{oder} A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

- 1.Fall: $A \in SO(2)$: Drehung

$$\begin{aligned} \chi_A &= \lambda^2 - 2\lambda \cdot \cos\alpha + 1 \\ \lambda_{1/2} &= \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} \in \mathbb{R}, \text{falls } \cos^2\alpha - 1 \geq 0 \\ \lambda_{1/2} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \alpha = k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

  Nur in diesem Fall hat A die Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{oder } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 2. Fall: $A \in O^-(2)$: Spiegelung

$$\chi_A = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1)$$

  Also zwei reelle Eigenwerte ($\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$) und zwei Eigenvektoren v_1, v_2 mit $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ und $A \cdot v_1 = v_1, A \cdot v_2 = -v_2$.

$$\begin{aligned} \sigma(v_1, v_2) &= \sigma(A \cdot v_1, A \cdot v_2) = -\sigma(v_1, v_2) \\ \Rightarrow \sigma(v_1, v_2) &= 0 \end{aligned}$$

  Es gibt eine Übergangsmatrix S aus Eigenvektoren v_1, v_2 für den Basiswechsel $\{e_1, e_2\} \to \{v_1, v_2\}$, sodass

$$S^T \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  Mit diesen Anregungen behandeln wir jetzt orthogonale Endomorphismen $f : V^{(n)} \to V^{(n)}$

Satz 7:

Sei $f : V^{(n)} \to V^{(n)}$ ein orthogonaler Endomorphismus, dann gibt es eine Orthonormalbasis von V bzgl. der f diese darstellende Matrix besitzt ($p, q, m \in \mathbb{N}_0$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & A_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & & \\ & Q & \\ & & A \end{pmatrix}$$

mit $P \in K^{p\times p}, Q \in K^{q\times q}, A \in K^{2m\times 2m}$, wobei

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i \\ -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix} \in SO(2)$$

mit $\alpha \in (0, 2\pi), \alpha \neq \pi$.

Beweis: vollständige Induktion über $n = \dim V$

- Induktionsanfang: n=2 (Klar - Drehung/Spiegelung)
- Induktionsschritt: Sei $n \geq 3$. Es gibt Untervektorraum $W \subset V$ mit $\dim W \in \{1, 2\}$, sodass $f(W) = W$ und f ist bijektiv nach Lemma 1. (W Untervektorraum von V $\Rightarrow W^\perp$ ist Untervektorraum von V, $W \cap W^\perp = \{0\}$, $V = W \oplus W^\perp$). Dann $f(W^\perp) = W^\perp$, f^{-1} orthogonal. Für alle $w \in W, v \in W^\perp$:

  $$\begin{aligned} = &= \sigma(f(v), w) = \sigma(f^{-1}(f(v)), f^{-1}(w)) \\ &= \sigma(v, f^{-1}(w)) \end{aligned}$$

  Nach Induktionsannahme gilt der Satz für $\dim V = n-1$, d.h. es gibt einen Endomorphismus $g := f|_{W^\perp} : W^\perp \to W^\perp$. Die somit in $W^\perp$ existierende Orthonormalbasis B" wird zu einer Orthonormalbasis von B ergänzt.

  1. Ist $\dim W = 1$ und $v \in W$ mit $\|v\| = 1$, so ist $B'' \cup \{v\} =: B$. Weil $f(v) = \pm v$ hat die Darstellungsmatrix die verlangte Gestalt.
  2. Ist $\dim W = 2$ und $h := f|_W : W \to W$, dann existiert Orthonormalbasis $\tilde{B}$ von W. Dann sei $A :=_{\tilde{B}} A_{\tilde{B}}$. Wegen $\dim W = 2$ ist $A \in O(2)$. Wenn $A \in SO(2)$, so sei $B' = \tilde{B}$. Wenn $A \notin SO(2)$, dann sei A Spiegelungsmatrix, dann gibt es $S \in O(2)$ mit

     $$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

     Man bestimmt Orthonormalbasis B' derart, dass $S \in O(2)$ die Übergangsmatrix des Basiswechsels $\tilde{B}$ zu B'. Dann:

     $$_{B'}A_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

     Es gibt in jedem Fall eine Orthonormalbasis B' von W, sodass

     $$_{B'}A_{B'} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} & \alpha \in (0, 2\pi)\backslash\pi \end{cases}$$

     Ergänzt man B" durch B' zu B, so hat (nach eventueller Umnummerierung) die Darstellungsmatrix die verlangte Gestalt.

8.4 Adjungierte und selbstadjungierte Endomorphismen

- (V, σ) sei ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum.
- Ein Endomorphismus $\tilde{f} : V \to V$ heißt zu einem Endomorphismus $f : V \to V$ adjungiert, falls $\forall v, w \in V$:

  $$\sigma(f(v), w) = \sigma(v, \tilde{f}(w))$$

  Folglich:

  $$\begin{aligned} \sigma(w, f(v)) &= \overline{\sigma(f(v), w)} = \overline{\sigma(v, \tilde{f}(w))} \\ &= \sigma(\tilde{f}(w), v) \end{aligned}$$

- Auswirkung der Definition auf Darstellungsmatrizen: (V, σ) habe Orthonormalbasis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann:

  $$\sigma(f(v), w) = y^T \cdot \bar{z}$$

  mit $y = \kappa_B(f(v)) = A \cdot x$, $z = \kappa_B(w)$, $x = \kappa_B(v)$, A Darstellungsmatrix von f. Außerdem:

  $$\begin{aligned} \sigma(w, f(v)) &\overset{!}{=} z^T \cdot \bar{y} = \sigma(\tilde{f}(w), v) \\ &= \tilde{z}^T \cdot \bar{x} \end{aligned}$$

  mit $\tilde{z} = \kappa_B(\tilde{f}(w))$, d.h. mit Darstellungsmatrix $\tilde{A}$ von $\tilde{f}$:

  $$\tilde{z} = \tilde{A} \cdot z$$

  Damit:

  $$\begin{aligned} \sigma(f(v), w) = y^T \cdot \bar{z} &= \sigma(v, \tilde{f}(w)) = x^T \cdot \bar{\tilde{z}} \\ (A \cdot x)^T \cdot \bar{z} &= x^T \cdot \overline{(\tilde{A} \cdot z)} = x^T \cdot (\bar{\tilde{A}} \cdot \bar{z}) \\ (x^T \cdot A^T) \cdot \bar{z} &= (x^T \cdot \bar{\tilde{A}}) \cdot \bar{z} \\ \Rightarrow A^T &= \bar{\tilde{A}} \\ \bar{A}^T &= \tilde{A} \end{aligned}$$

Satz 1:

Endomorphismus $f : V \to V$ besitze die Darstellungsmatrix A bzgl. einer Orthonormalbasis. Dann ist ein adjungierter Endomorphismus $\tilde{f}$ von f eindeutig bestimmt durch seine Darstellungsmatrix bzgl. der Orthonormalbasis

$$\tilde{A} = \bar{A}^T$$

Folgerungen:

1. $\tilde{\tilde{f}} = f$
2. Ist f unitär, dann $A^{-1} = \bar{A}^T = \tilde{A}$. Es existiert f^{-1} mit Darstellungsmatrix A^{-1}, also $f^{-1} = \tilde{f}$.

3. f unitär und $\tilde{f}$ adjungierter Endomorphismus, dann

$$\sigma(f(v), f(v)) = \sigma(\tilde{f}(v), \tilde{f}(v))$$

Satz 2:

Sei f ein unitärer Endomorphismus von (V, σ) mit $\dim V < \infty$, $\tilde{f}$ adjungierter Endomorphismus von f.

1. Jeder Eigenwert von f ist konjugiert komplex zu einem Eigenwert von $\tilde{f}$.
2. Ist v Eigenvektor von f zum Eigenwert λ, so ist v Eigenvektor von $\tilde{f}$ zum Eigenwert $\bar{\lambda}$.
3. Im euklidischen Fall ist $\lambda = \bar{\lambda}$, falls Eigenwert λ existiert.

Beweis:

1. Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= \det(A - \lambda \cdot E) \\ \chi_{\tilde{f}}(\lambda) &= \det(\bar{A}^T - \lambda \cdot E) = \det(\bar{A} - \lambda \cdot E) \\ &= \overline{\det(A - \bar{\lambda} \cdot E)} = \overline{\chi_f(\lambda)} \end{aligned}$$

   Falls $\chi_f(\lambda) = 0$ (λ Eigenwert von f), dann

$$\chi_{\tilde{f}}(\bar{\lambda}) = \overline{\chi_f(\lambda)} = \bar{0} = 0$$

2. Sei v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ, dann $f(v) = \lambda \cdot v$, d.h. $f(v) - \lambda \cdot v = 0$. Damit:

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma(f(v) - \lambda \cdot v, f(v) - \lambda \cdot v) \\ &= \sigma(f(v), f(v)) - \lambda \cdot \sigma(v, f(v)) - \bar{\lambda} \cdot \sigma(f(v), v) + \lambda \cdot \bar{\lambda} \cdot \sigma(v, v) \\ &= \sigma(\tilde{f}(v), \tilde{f}(v)) - \lambda \cdot \sigma(\tilde{f}(v), v) - \bar{\lambda} \cdot \sigma(v, \tilde{f}(v)) + \lambda \cdot \bar{\lambda} \cdot \sigma(v, v) \\ &= \sigma(\tilde{f}(v) - \bar{\lambda} \cdot v, \tilde{f}(v) - \bar{\lambda} \cdot v) \end{aligned}$$

   Damit:

$$\tilde{f}(v) - \bar{\lambda} \cdot v = 0 \Leftrightarrow \tilde{f}(v) = \bar{\lambda} \cdot v$$

3. Im euklidischen Fall ist $A = \bar{A}$, damit $\tilde{A} = A^T$.

$$\chi_{\tilde{f}}(\lambda) = \det(A^T - \lambda \cdot E) = \det(A - \lambda \cdot E)$$

   Eigenwerte stimmen überein, falls existent.

Definition:

Endomorphismus f heißt selbstadjungiert, falls $\tilde{f} = f$.

Satz 3:

1. f selbstadjungiert $\Rightarrow \sigma(v, f(w)) = \sigma(f(v), w)$

2. f selbstadjungiert habe Darstellungsmatrix A bzgl. Orthonormalbasis $\Leftrightarrow$ A hermitesch

Beweis: klar

Satz 4:

(V, σ) mit $\dim V = n < \infty$ und $f : V \to V$ selbstadjungiert, dann zerfällt das charakteristische Polynom von f über $\mathbb{R}$ vollständig in Linearfaktoren.

Beweis:

- 1.Fall: $K = \mathbb{C}$

  Dann ist nach Fundamentalsatz der Algebra
  $$\chi_f(\lambda) = (-1)^n \cdot (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n)$$
  mit $\lambda_i \in \mathbb{C}$ für $i = 1, \ldots, n$. Wir zeigen, dass $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für alle i. Sei v_j ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_j, dann $f(v_j) = \lambda_j \cdot v_j$ mit $v_j \neq 0$ und
  $$\begin{aligned} \bar{\lambda}_j \cdot \sigma(v_j, v_j) &= \sigma(v_j, \lambda_j \cdot v_j) \\ &= \sigma(v_j, f(v_j)) = \sigma(f(v_j), v_j) \\ &= \lambda_j \cdot \sigma(v_j, v_j) \\ \Rightarrow \bar{\lambda}_j &= \lambda_j \end{aligned}$$
  Also $\lambda_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, \ldots, n$.

- 2. Fall: $K = \mathbb{R}$

  Durch Komplexifizierung wird 1. Fall hergestellt: Sei B Orthonormalbasis von V, dann $A =_B A_B$ Darstellungsmatrix hermitesch (speziell reelle symmetrische Matrix für f wird jetzt über $\mathbb{C}$ betrachtet.) Die komplexe Erweiterung f_A von f wird durch A beschrieben und ist wegen Satz 3 selbstadjungiert. Nach Fall 1 sind alle Nullstellen von χ_{f_A} reell. Weiter $\chi_f = \chi_{f_A}$, also Nullstellen von χ_f und Nullstellen von χ_{f_A} gleich.

Folgerungen:

1. Jeder selbstadjungierte Endomorphismus ist diagonalisierbar und besitzt eine Orthonormalbasis B aus Eigenvektoren.

2. Selbstadjungierter Endomorphismus f besitzt eine hermitesche Darstellungsmatrix $A = \bar{A}^T$ und es gibt eine unitäre Matrix S, sodass
   $$_BA_B = \bar{S}^T \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

3. Ist f selbstadjungiert, $\lambda_j \neq \lambda_k$ zwei Eigenwerte von f mit Eigenvektoren v_j, v_k, dann gilt
   $$\sigma(v_j, v_k) = 0$$

4. Die Eigenwerte einer hermiteschen Matrix sind reell.

8.5 Gruppe O(n)

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A^{-1} = A^T\}$$

ist Untergruppe der Gruppe der regulären $n \times n$-Matrizen.

Verallgemeinerung der Spiegelung aus $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^n$:

- Die Abbildung

  $$\varphi : x \mapsto \varphi(x) = S(\alpha) \cdot x \,\text{mit}\, S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \in O^-(2)$$

  beschreibt eine Geradenspiegelgung und zwar an der Geraden

  $$v = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

  Das ist eine Fixpunktgerade, d.h. $h \in g \Rightarrow \varphi(h) = S \cdot h = h$. Weiter gezeigt: Jeder Punkt $z = \mu \cdot w$ mit $w = v^\perp$ wird auf $\varphi(z) = -z$ abgebildet, d.h.

  $$z \in Lin(w) \Rightarrow \varphi(z) = -z$$

  Beliebiger Punkt $x = k + z$ mit $h \in g, z \in Lin(w)$ hat Bild

  $$\varphi(x) = \varphi(h + z) = h - z = h - (x - h) = 2h - x$$

- Ebene ε des $\mathbb{R}^3$:

  $$< n, x - a >= 0 \qquad n \neq 0$$

  Hyperebene:

  $$H_{n,a} = \{x \in \mathbb{R}^n | < n, x - a >= 0; n \neq 0\}$$

  dabei $(\mathbb{R}^n, < .,. >)$ euklidischer Vektorraum mit $\sigma(x, y) =< x, y >= x^T \cdot y$, weil Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^n$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden kann.

  $$\begin{aligned} < n, x - a > &= < n, x > - < n, a >= n^T \cdot x - n^T \cdot y \\ &= n_1 \cdot x_1 + \ldots + n_n \cdot x_n - d = 0 \end{aligned}$$

  (lineares Gleichungssystem für $x_1, \ldots, x_n$)

- Kann die Formel für die Spiegelung allein unter der Verwendung des Normalenvektors n beschrieben werden?

- Im $\mathbb{R}^3$ Fußpunktsatz bekannt ($\rightarrow$ 2.3.3): Normale N_p von ε durch p schneidet ε im Fußpunkt f

  $$f = p - \frac{< n, p - a >}{< n, n >} \cdot n$$

Übertragung: $p \to x, n \to w, a \to 0$

$$\begin{aligned}
f &= x - \frac{< w, x >}{< w, w >} \cdot w \\
\varphi(f) &= f \qquad \varphi(x) = 2h - x \\
\Rightarrow \varphi(f) - \varphi(x) &= \varphi(f - x) = f - 2h + x = x - f \\
\Rightarrow \varphi(x) &= 2f - x = 2\left(x - \frac{1}{w^T \cdot w}(w^T \cdot x) \cdot w\right) - x \\
&= 2\left(x - \frac{1}{w^T \cdot w} \cdot w \cdot (w^T \cdot x)\right) - x \\
&= 2\left(x - \frac{1}{w^T \cdot w} \cdot (w \cdot w^T) \cdot x\right) - x \\
&= x - \frac{2}{w^T \cdot w} \cdot (w \cdot w^T) \cdot x \\
&= \left(E - \frac{2}{w^T \cdot w} \cdot (w \cdot w^T)\right) \cdot x
\end{aligned}$$

verallgemeinerungsfähige Darstellung einer Geradenspiegelung: Spiegelung an dem orthogonalen Komplement eines 1-dimensionalen Untervektorraumes Lin(w) durch obige Formel beschrieben.

- Wir definieren für $0 \neq w \in \mathbb{R}^n$

$$S_w = E - \frac{2}{w^T \cdot w} \cdot (w \cdot w^T)$$

als Spiegelungsmatrix der Spiegelung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto S_w \cdot x$ an der Hyperebene $H_{w,0}$.

- Es gilt $S_w \in O(n)$, denn

$$\begin{aligned}
S_w^T &= E^T - \frac{2}{w^T \cdot w} \cdot (w \cdot w^T)^T \\
&= E - \frac{2}{w^T \cdot w} \cdot (w \cdot w^T) = S_w
\end{aligned}$$

Weiter:

$$S_w \cdot S_w = \ldots = E$$

- Namensgebung gerechtfertigt? Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig mit $x = \alpha \cdot w + h$ mit $h \in H_{w,0}, \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= S_w \cdot x = S_w(\alpha \cdot w + h) \\
&= \alpha \cdot S_w \cdot w + S_w \cdot h = -\alpha \cdot w + h
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
S_w \cdot w &= \left(E - \frac{2}{w^T \cdot w}(w \cdot w^T)\right) \cdot w = w - 2w = -w \\
S_w \cdot h &= h
\end{aligned}$$

- Folgerungen:

1. Die Gerade Lin(w) wird in sich abgebildet.
2. Jeder Punkt $h \in H_{w,0}$ ist ein Fixpunkt.
3. $d(x, H_{w,0}) = d(x,h) = d(\varphi(x), H_{w,0}) = d(\varphi(x), h) = \|x-h\| = \|\alpha \cdot w\|$

Erzeugung der O(n) durch Spiegelungen:

Lemma 1:

$$A \in O(n) :\Leftrightarrow A^{-1} = A^T \Leftrightarrow \|A \cdot x\| = \|x\|$$

Lemma 2:

Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $u \neq v, \|u\| = \|v\|$. Dann existiert $w \in \mathbb{R}^n, w \neq 0$, sodass $S_w \cdot u = v$ und $S_w \cdot v = u$..

Beweis:

- Nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned} 0 \neq \|u-v\|^2 &= < u-v, u-v > \\ &= \|u\|^2 - 2\cdot < u, v > + \|v\|^2 \\ &= 2 \cdot (\|u\|^2 - < u, v >) \\ &= 2(< u, u > - < u, v >) \\ &= 2 < u, u-v >= 2u^T \cdot (u-v) \end{aligned}$$

- Wähle $w = u - v$. Dann:

$$\begin{aligned} S_w \cdot u &= S_{u-v} \cdot u = \left(E - 2\frac{(u-v)^T \cdot (u-v)}{\cdot}(u-v) \cdot (u-v)^T \right) \cdot u \\ &= u - \frac{2}{(u-v)^T \cdot (u-v)} \cdot (u-v) \cdot \underbrace{u^T \cdot (u-v)}_{u^T \cdot u - u^T \cdot v} \\ &= u - \frac{1}{(u-v)^T \cdot (u-v)} \cdot (u-v) \cdot (2u^T \cdot u - 2u^T \cdot v) \\ &= u - \frac{\|u-v\|^2}{(u-v)^T \cdot (u-v)} \cdot (u-v) = u - (u-v) = v \end{aligned}$$

  Analog $S_{u-v} \cdot v = u$.

Satz 1: (Erzeugungssatz)

Jede Matrix $A \in O(n)$, $A \neq E$ ist das Produkt von höchstens n Spiegelungen.

Beweis:

- Sei $A \in O(n)$ mit $A = (a_1 \dots a_n)$, $A \neq E$. Dann $\|a_i\| = 1$ und es gibt i mit $a_i \neq e_i$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $i = 1$.

- Nach Lemma 2 existiert eine Spiegelung S_1 mit

$$S_1 \cdot a_1 = e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$$

Damit

$$\begin{aligned}
S_1 \cdot A &= \begin{pmatrix} S_1 \cdot a_1 & S_1 \cdot a_2 & \dots & S_1 \cdot a_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e_1 & S_1 \cdot a_2 & \dots & S_1 \cdot a_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix} \in O(n)
\end{aligned}$$

Dabei c=0, weil die Norm der ersten Zeile 1 ist.

- Weiter mit vollständiger Induktion nach n:

$$\begin{aligned}
S_n \cdot S_{n-1} \cdot \dots \cdot S_1 \cdot A &= E \\
A^{-1} &= S_1^{-1}(S_n \cdot \dots \cdot S_1) \\
A &= S_1^{-1} \cdot \dots \cdot S_n^{-1}
\end{aligned}$$

dabei kann $S_i = E$ auftreten für $i > 1$.

Lemma 3:

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} : S_{\lambda \cdot w} = S_w$
2. $\det S_w = -1$

Beweis:

1. Es gilt:

$$S_{\lambda \cdot w} = E - \frac{2}{(\lambda \cdot w)^T \cdot (\lambda \cdot w)} \cdot (\lambda \cdot w) \cdot (\lambda \cdot w)^T = S_w$$

2. Vorbereitend zeigen wir: $\forall w \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \forall A \in O(n) : S_{A \cdot w} = A \cdot S_w \cdot A^T$:

$$\begin{aligned}
S_{A \cdot w} &= E - \frac{2}{(A \cdot w)^T \cdot (A \cdot w)} \cdot (A \cdot w) \cdot (A \cdot w)^T \\
&= E - \frac{2}{w^T \cdot \underbrace{A^T \cdot A}_{E} \cdot w} \cdot A \cdot w \cdot w^T \cdot A^T \\
&= A \cdot A^T - \frac{2}{w^T \cdot w} \cdot A \cdot w \cdot w^T \cdot A^T \\
&= A \cdot \left(E - \frac{2}{w^T \cdot w} w \cdot w^T \right) \cdot A^T
\end{aligned}$$

Wegen 1. genügt es $\det S_w = -1$ für $\|w\| = 1$ zu zeigen. Es existiert $A \in O(n)$ mit $W = A \cdot e_1$ nach Lemma 2.

$$S_w = S_{A \cdot e_1} = A \cdot S_{e_1} \cdot A^T$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\det S_w &= \underbrace{\det(A \cdot A^T)}_{1} \cdot \det S(e_1) = \det S_{e_1} \\
&= \det \left(2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \det \begin{pmatrix} -e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} = -1
\end{aligned}$$

Folgerung:

$A \in SO(n), A \neq E \Leftrightarrow$ A ist Produkt einer geraden Anzahl von Spiegelungen.

Anwendung der Spiegelungen in der Numerik: (Herstellung von gestaffelten Gleichungssystemen)

Satz 3:

Für alle $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert $S \in O(n)$ und eine obere Dreiecksmatrix R, sodass

$$M = S \cdot R$$

Beweis:

- Sei $M = (m_1 \dots m_n)$. Dann:
$$\|m_1\| = \|m_1\| \cdot \|e_1\| = \| \|m_1\| \cdot \|e_1\| \|$$
Nach Lemma 2 gibt es $S \in O(n)$, sodass
$$S \cdot m_1 = \|m_1\| \cdot e_1$$
Also:
$$\begin{aligned} S \cdot M &= S \cdot \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S \cdot m_1 & \dots & S \cdot m_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \|m_1\| & & b^T \\ 0 & & \\ \vdots & & B \\ 0 & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$
mit $b \in \mathbb{R}^{n-1}, B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Weiter mit vollständiger Induktion.

Beschreibung von Drehungen im $\mathbb{R}^n$:

- Die Abbildung $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto D(\alpha) \cdot x$ mit
$$D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
beschreibt eine Drehung,
$$SO(2) = \{D(\alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$$
Winkel zwischen zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$:
$$\cos \angle(x, y) = \frac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|}$$
- Bei einer Drehung $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erwarten wir:
  1. $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \|\delta(x)\|$
  2. $\forall x \in \mathbb{R}^n : \angle(x, \delta(x)) = \text{const.}$
- Beobachtung: Hintereinanderausführen zweier Spiegelungen S_u und S_v liefert Eigenschaften von δ. Dazu sei
$$\begin{aligned} \forall x : \sigma_u(x) &= S_u \cdot x \\ \forall y : \sigma_v(y) &= S_v \cdot y \end{aligned}$$
Dann:
$$\begin{aligned} (\sigma_v \circ \sigma_u)(x) &= \sigma_v(\sigma_u(x)) \\ &= S_v \cdot S_u \cdot x = S_v \cdot y \end{aligned}$$
wobei
$$\|x\| = \|\sigma_u(x)\| = \|S_u \cdot x\| =: \|y\|$$
Also:
$$\|(\sigma_v \circ \sigma_u)(x)\| = \|S_v \cdot y\| = \|y\|$$

Lemma 4:

Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig und $\|u\| = \|v\| = 1$. Der Untervektorraum

$$H := H_u \cap H_v$$

hat die Dimension (n-2) und

1. $\forall x \in H_u : S_u \cdot x = x$
2. $\forall y \in S_v : S_v \cdot y = y$
3. $H^\perp = Lin(u) \oplus Lin(v)$
4. $\mathbb{R}^n = H^\perp \oplus H$

Bemerkungen:

1. M Teilmenge V $\Rightarrow$ Lin M Untervektorraum von V
2. W, W' seien Untervektorräume von V, dann $W \cap W'$ Untervektorraum von V und $W \cup W'$ kein Untervektorraum von V
3. $W + W' = Lin(W \cup W')$ ist die Summe der Untervektorräume (wieder ein Untervektorraum).
4. $W \oplus W' := W + W'$ mit $W \cap W' = \{0\}$ heißt direkte Summe.
5. W $\ominus W' = W \oplus W'$ heißt orthogonale Summe von W und W', dabei W orthogonal zu W'.
6. Dimensionsformel für $\dim V < \infty$:

$$\dim(W + W') = \dim W + \dim W' - \dim(W \cap W')$$

Beweis:

1. Es gilt mit $x \in H_u$:

$$\begin{aligned} S_u \cdot x &= (E - \frac{2}{u^T \cdot u} \cdot u \cdot u^T) \cdot x \\ &= x - \frac{2}{u^T \cdot u} \cdot u \cdot \underbrace{(u^T \cdot x)}_{0} = x \end{aligned}$$

2. Analog.
3. Sei $x \in H_u$ und $x \in H_v$, dann $x \in H$, d.h.

$$\begin{aligned} u^T \cdot x &= 0 \qquad v^T \cdot x = 0 \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} u^T \\ v^T \end{pmatrix} \cdot x &= 0 \end{aligned}$$

also $x \in H$ Lösung des linearen homogenen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix vom Rang 2. Damit H die Lösungsmenge mit $\dim H = n-2$.

H_u ist Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$, denn

(a) $0 \in H_u = \{x \in \mathbb{R}^n | < u, x >= 0\}$

(b) $x, y \in H_u \Rightarrow x + y \in H_u$, denn

$$0 =< u, x > + < u, y >=< u, x + y >$$

(c) $\lambda \in \mathbb{R}, x \in H_u \Rightarrow (\lambda \cdot x) \in H_u$, denn

$$0 =< u, x >\Rightarrow 0 =< u, \lambda \cdot x >$$

H_v ist ebenfalls Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$. Damit $H = H_u \cap H_v$ Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ (siehe Bemerkung).

Sei

$$W := Lin(u) \oplus Lin(v) = \{w \in \mathbb{R}^n | w = \lambda \cdot u + \mu \cdot v; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Also $\forall w \in W, \forall h \in H$:

$$w^T \cdot h = (\lambda \cdot u + \mu \cdot v)^T \cdot h = \lambda \cdot \underbrace{u^T \cdot h}_{0} + \lambda \cdot \underbrace{v^T \cdot h}_{0} = 0$$

Also $W = H^\perp$.

4. Es ist $\dim H = n - 2, \dim H^\perp = 2, \dim \mathbb{R}^n = n$ mit $H \cap H^\perp = \{0\}$. Nach Dimensionsformel:

$$\dim(H^\perp \oplus H) = \dim H + \dim H^\perp = n$$

Lemma 5:

Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig und $\|u\| = \|v\| = 1$. Sei $W := Lin(u) \oplus Lin(v)$. Dann $\forall x \in W = H^\perp$:

$$< x, S_v \cdot S_u \cdot x >=< x, x > \cdot (2 < u, v >^2 - 1)$$

Beweis: Übung

Satz 4:

$\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig: Die Komposition $\sigma_v \circ \sigma_u$ der Spiegelungen beschreibt eine Drehung in $H^\perp$ durch den Winkel

$$\cos \omega = 2 \left(\frac{< u, v >}{\|u\| \cdot \|v\|} \right)^2 - 1$$

, bei der der Untervektorraum $H = H_u \cap H_v$ elementweise fest bleibt.

Beweis:

- Sei zunächst $\|u\| = \|v\| = 1$. Sei $D := S_v \cdot S_u$. Nach Lemma 5:
$$\frac{< x, Dx >}{< x, x >} = \frac{< x, Dx >}{< Dx, Dx >} = \frac{< x, Dx >}{\|x\| \cdot \|Dx\|} \overset{!}{=} 2 < u, v >^2 -1$$
unabhängig von x, d.h. x und Dx schließen einen konstanten Winkel ein, für den nach Definition gilt:
$$\cos\omega = \frac{< x, Dx >}{\|x\| \cdot \|Dx\|} = 2 < u, v >^2 -1$$
Damit ist der orthogonale Endomorphismus $x \mapsto Dx$ eine Drehung um H durch ω.
- Sind u,v nicht normiert (wie bisher angenommen), dann muss auf der rechten Seite normiert werden.

Satz 5:

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, $\|x\| = \|y\|$ mit $n \geq 2$. Dann gibt es $D \in SO(n)$, sodass $y = D \cdot x$.

Beweis:

- Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq v \neq y$ und $\|x\| = \|v\|$. Nach Lemma 2: Es gibt Spiegelungsmatrizen S_1, S_2 mit $S_1 \cdot x = v$ und $S_2 \cdot v = y$. Also $S_2 \cdot S_1 \cdot x = y$, $D := S_2 \cdot S_1$. Nach Satz 3 beschreibt D eine Drehung, also $D \in SO(n)$.

Lemma 6:
$$\forall A \in O(3)\, \exists q \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} : A \cdot q = (\det A) \cdot q$$
Beweis:

1. $A \in SO(3)$, also $\det A = 1$. Dann $A = S_v \cdot S_u$. Nach Satz 4 ist $S_v \cdot S_u$ eine Drehmatrix, die eine Drehung um H durch ω beschreibt und für $x \in H^\perp$ ist $< x, Dx >$ konstant. Nach Lemma 4: $\dim H = n - 2 = 1, \dim H^\perp = 2$. Es ist $w = u \times v$ ein Normalenvektor von $H^\perp$ bzw. Basisvektor von H. Für $h \in H$ gilt:
$$\begin{aligned} S_u \cdot h &= h \qquad S_v \cdot h = h \\ \Rightarrow S_v \cdot S_u \cdot h &= h \\ A \cdot h &= h \end{aligned}$$
2. $A \in O^-(3)$, also $\det A = -1$, d.h. $A = S_w$ (Spiegelungsmatrix zu $w \in \mathbb{R}^3$ mit $\|w\| = 1$). Dann:
$$S_w \cdot w = -w$$

Lemma 7:

Für alle $A \in O(3)$ gilt, dass der Eigenraum zum Eigenwert det A eindimensional ist (Lin q).

Beweis: Klar.

geometrische Deutung:

- Eine Gerade Lin(q) mit $q \neq 0$ aus Lemma 6 heißt eine Fixgerade bzgl. des Endomorphismus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit Darstellungsmatrix A. Falls $A \in SO(3)$ ist, dann sogar Fixpunktgerade (Drehachse).
- Bemerkung: A besitzt eine Fixpunktgerade $\Leftrightarrow$ A hat einen reellen Eigenwert.

Satz 6:

Jedes $A \in O(3)$ besitzt eine Fixgerade - den Eigenraum zum Eigenwert det A.

Satz 7:

Die Fixgerade Lin(q) zu $A \in SO(3)$ steht senkrecht zu $H^\perp$. Es wird x nach Ax gedreht, d.h. für jedes $x \in H^\perp$ gilt:

$$A \cdot x = (\cos\alpha) \cdot x + (\sin\alpha) \cdot x \times q$$

wobei $A \cdot q = q$ mit $\|q\| = 1$ und $\alpha = \angle(x, A \cdot x)$.

8.6 Quadratische Formen

- Sei V ein Vektorraum über K, $\sigma : V \times V \to K$ eine Bilinearform. σ symmetrisch, falls $\sigma(v,w) = \sigma(w,v)$.
- Jede Bilinearform β definiert eine quadratische Form

  $$q(v) := \beta(v,v)$$

  Gehört q zu einer symmetrischen Bilinearform σ, dann heißt σ die Polarform von q.
- Zu jeder symmetrischen Bilinearform gehört also eine quadratische Form. Umkehrung: Gibt es zu jeder quadratischen Form (genau) eine symmetrische Bilinearform? Falls ja, dann

  $$\begin{aligned} q(v+w) &= \sigma(v+w, v+w) \\ &= \sigma(v,v) + (1+1)\cdot\sigma(v,w) + \sigma(w,w) \\ &= \begin{cases} \sigma(v,v) + 2\cdot\sigma(v,w) + \sigma(w,w) & \text{char(K)} \neq 2 \\ \underbrace{\sigma(v,v) + \sigma(w,w)}_{q(v)+q(w)} & \text{char(K)} = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

  Im Fall char(K) $\neq 2$ folgt aus q eindeutig die Bilinearform

  $$\sigma(v,w) = (q(v+w) - q(v) - q(w)) \cdot \frac{1}{2}$$

und σ ist additiv, homogen in beiden Argumenten und symmetrisch. Somit auch Existenz von Polarform σ zu einer gegebenen quadratischen Form von q gezeigt. Rechnung zur Homogenität:

$$\begin{aligned}
\sigma(\lambda \cdot v, w) &= \frac{1}{2} \cdot (q(\lambda \cdot v + w) - q(v) - q(w)) \\
&= \frac{1}{2}(\beta(\lambda \cdot v + w, \lambda \cdot v + w) - \beta(\lambda \cdot v, \lambda \cdot v) - \beta(w, w)) \\
&= \frac{1}{2}\lambda \cdot (\beta(v, w) + \beta(w, v)) \\
&= \frac{1}{2}\lambda \cdot (\beta(v + w, v + w) - \beta(v, v) - \beta(w, w)) \\
&= \frac{1}{2}\lambda \cdot (q(v + w) - q(v) - q(w))
\end{aligned}$$

Satz 1:

Auf V über K mit char K$\neq$ 2 bestimmen eine quadratische Form q und ihre Polarform einander gegenseitig.

Darstellungsmatrix der Polarform:

- Sei $\dim V = n$. Dann nach 8.2.1 Darstellungsmatrix von σ:

  $$M = (\sigma(v_i, v_j))$$

  bzgl. Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und es gilt $M = M^T$. Außerdem

  $$\sigma(v, w) = x^T \cdot M \cdot y$$

  mit $x = \kappa_B(v), y = \kappa_B(w)$.

- Sei q durch eine Bilinearform β auf V definiert, dann $\beta(v, w) = x^T \cdot A \cdot y$ mit $A = (\beta(v_i, v_j))$. A ist nicht notwendig symmetrisch. Die zugehörige quadratische Form ist $q(v) = \beta(v, v)$. Zu q gibt es genau eine Polarform nach Satz 1.

  $$\begin{aligned}
  \sigma(v, w) &= \frac{1}{2} \cdot (q(v + w) - q(v) - q(w)) \\
  &= \frac{1}{2} \cdot (\beta(v + w, v + w) - \beta(v, v) - \beta(w, w)) \\
  &= \frac{1}{2} \cdot ((x + y)^T \cdot A \cdot (x + y) - x^T \cdot A \cdot x - y^T \cdot A \cdot y) \\
  &= \frac{1}{2} \cdot (x^T \cdot A \cdot y + \underbrace{y^T \cdot A \cdot x}_{(Ax)^T \cdot y}) \\
  &= \frac{1}{2} \cdot x^T \cdot (A + A^T) \cdot y = x^T \cdot M \cdot y
  \end{aligned}$$

  mit

  $$M := \frac{1}{2} \cdot (A + A^T)$$

Satz 2:

1. Nach Wahl einer Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ für V mit char(K)$\neq 2$ ist jede Bilinearform β durch
$$\beta(v, w) = x^T \cdot A \cdot y$$
bestimmt, wobei β und A einander gegenseitig bestimmen. Dabei ist β eine symmetrische Bilinearform $\Leftrightarrow$ A symmetrisch.

2. Eine quadratische Form ist durch
$$q(v) = x^T \cdot M \cdot x$$
bestimmt, wobei M ohne Beschränkung der Allgemeinheit als symmetrisch angenommen werden kann. Dann ist die Polarform $\sigma(v, w) = x^T \cdot A \cdot y$ eindeutig bestimmt.

Einteilung der quadratischen Formen:

q heißt ...

- positiv definit $:\Leftrightarrow \forall v \in V\backslash\{0\} : q(v) > 0$
- positiv semidefinit $:\Leftrightarrow \forall v \in V\backslash\{0\} : q(v) \geq 0$
- negativ semidefinit $:\Leftrightarrow \forall v \in V\backslash\{0\} : q(v) \leq 0$
- negativ definit $:\Leftrightarrow \forall v \in V\backslash\{0\} : q(v) < 0$
- indefinit $:\Leftrightarrow$ weder positiv noch negativ semidefinit

Satz 3:

Ein Skalarprodukt eines reellen Vektorraumes endlicher Dimension ist die Polarform einer positiv definiten quadratischen Form.

Satz 4: (Normalform einer quadratischen Form)

Ist $q : V^{(n)} \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form, dann existiert eine Orthonormalbasis $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ bzgl. der q durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.

Beweis:

- Sei $q(v) = x^T \cdot A \cdot x$ mit $A = A^T$ eine quadratische Form auf einem Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$.
- A kann als Darstellungsmatrix eines selbstadjungierten Endomorphismus $f : V \to V$ aufgefasst werden. Nach 8.4, Satz 4 ist f diagonalisierbar. Es existiert eine Orthonormalbasis $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ aus Eigenvektoren bzgl. der f die Diagonalmatrix
$$F = S^T \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$
besitzt, wobei
$$S = \begin{pmatrix} \kappa_B(w_1) & \dots & \kappa_B(w_n) \end{pmatrix}$$

Beispiel:

1. Sei $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form auf $\mathbb{R}$,

$$q(v) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & \sqrt{6} \\ -1 & 5 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte, Eigenvektoren zu A:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = -\frac{1}{3} \\ a_1 &= \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad a_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \cdot \sqrt{6} \\ -\frac{1}{6} \cdot \sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Orthonormalbasis C: Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren auf $\{a_1, a_2, a_3\}$:

$$w_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{6}{6}} \\ 0 \\ \sqrt{\frac{1}{7}} \end{pmatrix} \qquad w_2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ \sqrt{\frac{7}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{7}} \end{pmatrix} \qquad w_3 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Damit:

$$F = S^T \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Normalform von q mit $y = \kappa_C(v)$:

$$\begin{aligned} q(v) &= y^T \cdot F \cdot y \\ &= y_1^2 + y_2^2 - \frac{1}{3} y_3^2 \end{aligned}$$

Anwendungen von quadratischen Formen:

- Kegelschnitte im $\mathbb{R}^2$
- Quadriken des $\mathbb{R}^n$
- Eichquadriken