Technische Universität Dresden

Skript:

Stochastische Prozesse

Verfasser Franziska Kühn

Daten Prof. Dr. Zoltan Sasvári
Sommersemester 2011
Hauptstudium

Inhaltsverzeichnis

1

Grundlegende Begriffe

1.1 Bezeichnungen

1.2 Historische Bemerkungen

- Anwendung in Physik, Technik, Finanzwelt, ...
- Untersuchung von Prozessen, d.h. von Erscheinungen, die mit der Zeit ablaufen und wo der Zufall eine Rolle spielt.
- Die Wahrscheinlichkeitstheorie besaß keine allgemeine Verfahren für die Untersuchung solcher Erscheinungen.
- Notwendigkeit eine allgemeine Theorie der zufällige Prozesse auszuarbeiten.
- Beispiele:

  (i). Zwei Gase werden in Berührung gebracht, die Moleküle der beiden Gase vermischen sich. Es findet eine Diffusion statt. Fragen:
    - Nach welchen Gesetzen geht die Diffusion vor sich?
    - Wie schnell?
    - Wann stellt sich ein Gleichgewicht ein?

  (ii). Radioaktiver Zerfall

  (iii). Brownsche Bewegung

  (iv). Anzahl der Anrufe, die in einer Telefonzentrale während eines bestimmten Zeitintervalls erfolgen

  (v). Rauschen bei elektrischen Signalen

- Konkretes Beispiel: Herleitung der Fokker-Planck-Differentialgleichung der Diffusionstheorie (Anfang 20. Jh.), hier nur eindimensional:

  Ein Teilchen erleidet zu den Punkten $n \cdot \tau$ ($n \in \mathbb{N}$) unabhängige zufällige Stöße, die eine Verschiebung um h nach rechts mit Wahrscheinlichkeit p oder nach links mit Wahrscheinlichkeit $q := 1 - p$ verursachen. $f(x,t)$ bezeichne die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen nach n Stößen, ausgehend von $x = 0$, zur Zeit t im Punkt x auftritt.

  Diskretisierung: $f(x,t) = f(k \cdot h, n \cdot \tau)$. Es gilt $f(k \cdot h, n \cdot \tau) = 0$, wenn n gerade (ungerade) und k ungerade (gerade). Sei m die Anzahl der Schritte nach rechts. Dann ist

  $$m - (n - m) = \frac{x}{h} = k$$
  $$f(k \cdot h, n \cdot \tau) = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

  Kurze Rechnung: f erfüllt die Differenzengleichung

  $$f(x, t + \tau) = p \cdot f(x - h, t) + q \cdot f(x + h, t) \tag{1.1}$$

(*Aufgabe*) mit den Anfangsbedingungen

$$f(0,0) = 1 \qquad\qquad \forall x \neq 0 : f(x,0) = 0$$

Wir bilden den Grenzwert $\tau, h \to 0$. Aus physikalischen Überlegungen folgt, dass dabei τ, h und p gewisse Bedingungen erfüllen müssen:

$$\frac{h^2}{\tau} \to 2D \qquad\qquad \frac{p-q}{h} \to \frac{c}{D} \tag{1.2}$$

(c: Strömungsgeschwindigkeit, D: Diffusionskoeffizient) Wir ziehen von beiden Seiten von (1.1) $f(x,t)$ ab:

$$f(x,t+\tau) - f(x,t) = p \cdot \big(f(x-h,t) - f(x,t)\big) + q \cdot \big(f(x+h,t) - f(x,t)\big) \tag{1.3}$$

Sei f einmal nach t und zweimal nach x differenzierbar, dann:

$$\begin{aligned} f(x,t+\tau) - f(x,t) &= \tau \cdot \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + o(\tau) \\ f(x \pm h,t) - f(x,t) &= \pm h \cdot \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} + o(h^2) \end{aligned}$$

Wir setzen dies in (1.3) ein und verwenden (1.2):

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -2c \cdot \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + D \cdot \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$$

(Fokker-Plancksche Differentialgleichung für die Dichte zur Zeit t). *Aufgabe*: Nachrechnen.

- Anfang der 30er Jahre: Grundsteine einer allgemeinen Theorie stochastischer Prozesse. A.N. Kolmogorov: Prozesse ohne Nachwirkungen (Markov-Prozesse), A.J. Chintshin: stationäre Prozesse, ...

- Beispiel: Poisson-Prozess (schon vorher untersucht von Einstein, Smaluchowski im Zusammenhang mit der Brownschen Bewegung) In zufälligen Zeitpunkten tritt ein gewisses Ereignis A ein. Sei $X(t)$ die Anzahl des Eintretens von A im Zeitintervall $(0,t)$, $P_k(t) := \mathbb{P}[X(t) = k]$ ($k \in \mathbb{N}_0$). Wir setzen voraus:
  - stationär: Die Wahrscheinlichkeit für das k-fache Auftreten von A in $(T, T+t)$ hängt nicht von T ab.
  - ohne Nachwirkung: Die obige Wahrscheinlichkeit ist unabhängig davon, wieviele Male und wann A vorher eintrat.
  - ordinär: Das mehrfache Auftreten von A in einem sehr kleinen Intervall Δt kann praktisch nicht vorkommen. Genauer: Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $o(\Delta t)$.

  Aus diesen Annahmen folgt (Beweis später):

  $$P_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

  mit Konstante $\lambda > 0$ (Intensität des Prozesses). Beispiele für A:
  - Auftreffen eines kosmischen Teilchens auf eine bestimmte Fläche
  - Zerfall eines Atoms eines radioaktiven Stoffes

- Bisher war t die Zeit, sie kann aber auch Ortsangabe sein, z.B. in der Geostatistik (Modellierung von Gesteinsschichten).

1.3 Stochastische Prozesse

In diesem Abschnitt: $T \neq \varnothing$ eine beliebige Menge, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(S, \mathcal{B})$ Meßraum.

1.3.1 Definition

Ein stochastischer Prozess (Zufallsfeld) Z auf T mit Grundraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist eine Abbildung, die jedem Element $t \in T$ eine S-wertige Zufallsvariable $Z(t)$ zuordnet.

1.3.2 Bemerkungen

(i). Anstelle von $Z(t)$ wird auch Z_t geschrieben. Die Schreibweise $Z(t)(w)$ wäre umständlich, man schreibt $Z_t(w)$ oder $Z(t,w)$.

(ii). Das Feld Z wird auch mit $\{Z_t; t \in T\}$ oder $(Z_t)_{t \in T}$ bezeichnet.

(iii). Ist S ein metrischer oder topologischer Raum, z.B. eine Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}^d$, so nehmen wir für $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra, d.h. die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält.

(iv). Sind die Zufallsgrößen reell- oder komplexwertig, so heißt Z ein reelles bzw. komplexes Zufallsfeld.

(v). Für $T = \mathbb{R}$, $T = [0, \infty)$ oder $T = [0,1]$: zeitstetiger stochastischer Prozess

(vi). Für $T = \mathbb{N}$, $T = \mathbb{N}_0$ oder $T = \mathbb{Z}$: zeitdiskreter Prozess, Zeitreihe

(vii). Die Funktionen $t \mapsto Z(t,w)$ $(t \in T, w \in \Omega)$ heißen Realisierungen (Pfade, Trajektorien) des Feldes Z. Die Gesamtheit aller Pfade wird auch als Pfadraum bezeichnet.

Man kann Z auch als Abbildung auffassen, die jedem $w \in \Omega$ eine S-wertige Funktion auf T zuordnet, nämlich die Trajektorie $Z(\cdot, w)$.

Eine weitere Sichtweise ist, das Feld als eine Abbildung

$$T \times \Omega \ni (t,w) \mapsto Z(t,w) \in S$$

aufzufassen, die für festes t messbar ist bzgl. $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

(viii). Sei $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mathbb{P}_0)$ die Vervollständigung des Grundraumes, d.h. $\mathcal{A}_0$ ist die σ-Algebra aller Mengen der Form

$$A_0 = (A \cup N) \setminus M$$

wobei $A \in \mathcal{A}$ und N, M Teilmengen von $\mathbb{P}$-Nullmengen sind;

$$\mathbb{P}_0(A_0) := \mathbb{P}(A)$$

Die Erweiterung hat die günstige Eigenschaft, dass beliebige Teilmengen von Nullmengen Ereignisse sind.

Aufgabe: Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_0$ eine σ-Algebra ist und dass $\mathbb{P}_0$ wohldefiniert und ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Beispiele für nicht vollständige Räume:

(1) $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega, [0, \frac{1}{2}], (\frac{1}{2}, 1]\}$, $\mathbb{P}[0, \frac{1}{2}] := 1$

(2) $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda|_{[0,1]})$

Wegen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_0$ und $\mathbb{P}_0|_{\mathcal{A}} = \mathbb{P}$ können wir ein Feld mit dem Grundraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ auch als Feld mit dem Grundraum $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mathbb{P}_0)$ betrachten. Die Verteilungen der Zufallsvariablen Z_t bleiben unverändert.

1.3.3 Beispiele

(i). Sind X_j $(j \in \mathbb{N}_0)$ beliebige Zufallsgrößen, so sind $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ und

$$S_n := \sum_{j=0}^{n} X_j \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Zeitreihen auf $T = \mathbb{N}_0$.

(ii). Seien a und φ Zufallsgrößen und $u \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$X_t := a \cdot \cos(u \cdot t + \varphi) \qquad (t \in \mathbb{R} = T)$$

ein stochastischer Prozess auf $\mathbb{R}$, eine sogenannte harmonische Schwingung mit zufälligen Parametern (a: Amplitude, φ: Phase, u: Frequenz (gegeben)). Viele Prozesse in Anwendungen lassen sich als Summe von solchen Prozessen modellieren:

$$X_t(w) := \sum_{j=1}^{n} a_j(w) \cdot \cos(u_j \cdot t + \varphi_j(w)) \qquad (t \in \mathbb{R}, w \in \Omega)$$

Die Menge $\{u_1, \ldots, u_n\}$ der Frequenzen heißt das Spektrum von X. Wichtige Aufgabe in Anwendungen: Näherungsweise Bestimmung des Spektrums mit Hilfe von endlich vielen Beobachtungen $X_{t_1}(w), \ldots, X_{t_n}(w)$ (z.B. Sonnenflecke).

Oft ist es vorteilhaft komplexwertige Schwingungen zu betrachten:

$$Z_t := \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot e^{\imath\, u_j \cdot t} \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{1.1}$$

wobei c_j komplexwertige Zufallsgrößen $(j = 1, \ldots, n)$. Schreiben wir c_j in der Form $c_j = |c_j| \cdot e^{\imath\,\varphi_j}$ wobei φ_j eine reelle Zufallsgröße ist, so gilt

$$\operatorname{Re} Z_t = \sum_{j=1}^{n} |c_j| \cdot \cos(u_j \cdot t + \varphi_j)$$

$$\operatorname{Im} Z_t = \sum_{j=1}^{n} |c_j| \cdot \sin(u_j \cdot t + \varphi_j)$$

(iii). Polynome mit zufälligen Koeffizienten:

$$X_t = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot t^j \qquad (t \in \mathbb{R} = T)$$

wobei a_j reell- oder komplexwertige Zufallsgrößen $(j = 0, \ldots, n)$ sind. Die Trajektorien sind Polynome höchstens n-ten Grades.

(iv). Einschaltvorgang zum zufälligen Zeitpunkt: Sei τ eine nichtnegative Zufallsgröße und

$$X_t(w) := 1_{[\tau(w), \infty)}(t) \qquad (t \in [0, \infty) = T, w \in \Omega)$$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass X_t eine Zufallsgröße ist und bestimmen Sie ihre Verteilung.

1.3.4 Aufgabe

Wenn wir bei Beispiel 1.3.3(iii) [Polynome] eine Trajektorie an $(n+1)$ Stellen kennen, dann kennen wir sie überall. Wie ist es bei den Beispielen 1.3.3(iv) und bei 1.3.3(ii)(1.1)?

1.3.5 Definition

- Seien Z ein Zufallsfeld auf T und $t_1, \ldots, t_n \in T$. Dann ist $(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n})$ eine Zufallsvariable mit Werten in $(S^n, \mathcal{B}^n)$ und besitzt folglich eine Verteilung. Verteilungen dieser Form heißen endlich-dimensionale Verteilungen des Feldes. Ist Z reell oder komplex und sind alle endlich-dimensionalen Verteilungen Gauß'sch, so nennt man Z auch Gauß'sch.

- Beispiel für Gauß'schen Prozess: Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von normalverteilten unabhängigen Zufallsgrößen. Dann ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Gauß'sche Zeitreihe. ($(X_1, \ldots, X_n)$ ist Gauß'scher Zufallsvektor, z.B. Beweis über charakteristische Funktion

$$f(t) = e^{\imath (m,t) - \frac{1}{2}(Ct,t)} \qquad (t \in \mathbb{R}^d)$$

möglich, wobei $m \in \mathbb{R}^d$ Erwartungsvektor, $C \in \mathbb{R}^{d \times d}$ Kovarianzmatrix.)

- In Anwendungen fordert man bei der Modellbildung auf Grund allgemeiner Überlegungen oder Beobachtungen Verteilungseigenschaften (z.B. Gauß'sch) sowie Eigenschaften der Pfade (Monotonie, Stetigkeit) eines Prozesses.

1.3.6 Satz: Kolmogorov

Sei $T \neq \varnothing$ eine beliebige Menge und $d \in \mathbb{N}$. Für jede Menge $\{t_1, \ldots, t_k\} \subseteq T$ sei $\mu_{t_1,\ldots,t_k}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d)^k$. Nehmen wir an, dass diese Maße die folgenden sogenannten Konsistenzbedingungen erfüllen:

(i). Für jede Permutation π von $\{1, \ldots, k\}$ und alle Borelmengen $B_1, \ldots, B_k \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt

$$\mu_{t_1,\ldots,t_k}(B_1 \times \ldots \times B_k) = \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(k)})}(B_{\pi(1)}, \ldots, B_{\pi(k)})$$

(ii). Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Borelmengen $B_1, \ldots, B_k \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\mu_{t_1,\ldots,t_k}(B_1 \times \ldots \times B_k) = \mu_{t_1,\ldots,t_k,t_{k+1},\ldots,t_{k+n}}(B_1 \times \ldots \times B_k \times \underbrace{\mathbb{R}^d \times \ldots \mathbb{R}^d}_{\text{n-mal}})$$

Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und d-dimensionale Zufallsvektoren X_t auf Ω für $t \in T$, sodass $\mu_{t_1,\ldots,t_k}$ die Verteilung des Zufallsvektors $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ ist für alle $\{t_1, \ldots, t_k\} \subseteq T$.

Beweis: siehe z.B. *Wengenroth, J.:Wahrscheinlichkeitstheorie*, Satz 7.3 oder *Gihmann, I. I., Skorohod, A. V.: Introduction to Theory of Stochastic Processes*, Abschnitt 3.2.

1.3.7 Folgerung

Für eine beliebige Familie $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ von d-dimensionalen Verteilungen existiert eine Familie $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ von unabhängigen Zufallsvektoren so, dass μ_α die Verteilung von X_α ($\alpha \in A$) ist.

Beweis: Definiere $\mu_{t_1,\ldots,t_k} := \bigotimes_{j=1}^k \mu_{t_j}$ und wende Satz 1.3.6 an.

1.3.8 Bemerkung

Sei $\mu_{t_1,\ldots,t_k}$ wie in 1.3.6 und bezeichne $f_{t_1,\ldots,t_k}$ die zugehörige charakteristische Funktion. Dann Konsistenzbedingungen:

$$f_{t_1,\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_k) = f_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(k)}}(x_{\pi(1),\ldots,x_{\pi(k)}})$$
$$f_{t_1,\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_k) = f_{t_1,\ldots,t_k,t_{k+1},\ldots,t_{k+n}}(x_1, \ldots, x_k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\text{n-mal}})$$

Aufgabe: Äquivalenz der Konsistenzbedingungen aus 1.3.6 und 1.3.8.

1.3.9 Aufgabe

Seien X und Y Prozesse auf T_X bzw. T_Y, die Grundräume können unterschiedlich sein. Dann existieren unabhängige Prozesse $\tilde{X}$ bzw. $\tilde{Y}$ auf T_X bzw. T_Y mit demselben Grundraum, sodass $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ dieselben endlich-dimensionalen Verteilungen besitzen wie X bzw. Y.

Bemerkung:

- Zwei Felder X und Y auf T heißen unabhängig, wenn $X(t)$ und $Y(s)$ für alle $s, t \in T$ unabhängig sind.

Im weiteren führen wir einige Klassen von Prozessen ein, die wir später näher untersuchen werden.

1.3.10 Definition

Sei X ein Prozess auf einem Intervall $T \subseteq \mathbb{R}$ oder $T \subseteq \mathbb{Z}$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}^d$. Man sagt, X besitzt unabhängige Zuwächse, falls die Zufallsvariablen $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $t_j \in T$ mit $t_0 < \ldots < t_n$, unabhängig sind.

Beispiel:

(i). Sei $T = \mathbb{N}$ und $X_n = Y_1 + \ldots + Y_n$ mit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig. Dann hat X unabhängige Zuwächse.

(ii). Brownsche Bewegung

1.3.11 Definition

- Ein komplexes Zufallsfeld zweiter Ordnung Z auf T ist eine Abbildung $Z : T \mapsto \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Die Zufallsgrößen Z_t haben also eine endliche Varianz. Notation: $\mathcal{L}^2_r(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ anstatt von $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, falls Z ein reelles Zufallsfeld ist.
- Die Funktion $C : T \times T \to \mathbb{C}$, die durch

$$C(x, y) := \mathbb{E}(Z(x) \cdot \overline{Z(y)})$$

  definiert ist, heißt Korrelationsfunktion von Z.
- Die Kovarianz-Funktion ist durch

$$\sigma(x, y) := \mathbb{E}\big((Z(x) - M(x) \cdot \overline{(Z(y) - M(y))}\big)$$

  definiert, wobei $M(x) = \mathbb{E}(Z(x))$ für $x \in T$. Leicht zu zeigen:

$$\sigma(x, y) = C(x, y) - M(x) \cdot \overline{M(y)}$$

  Ist $M = 0$, dann $\sigma = C$.

Beispiel:

(i). Sei $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $f : T \to \mathbb{C}$ beliebig. Dann ist

$$Z(t) := f(t) \cdot X \qquad (t \in T)$$

ein Feld zweiter Ordnung mit Korrelationsfunktion

$$C(x, y) = f(x) \cdot \overline{f(y)} \cdot \mathbb{E}(|X|^2) \qquad (x, y \in T)$$

1.3.12 Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Kovarianzfunktion und die Korrelationsfunktion positiv semidefinit sind, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x_j \in T, c_j \in \mathbb{C} : \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C(x_i, x_j) \cdot c_i \cdot \bar{c}_j \geq 0$$

1.3.13 Definition

- Ein Feld Z zweiter Ordnung auf $T \subseteq \mathbb{R}^d$ mit Werten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt stationär im weiteren Sinne (oder stationär), wenn $M := \mathbb{E}(Z(x))$ $(x \in T)$ nicht von x abhängt und eine Funktion C existiert mit
$$\mathbb{E}(Z(x) \cdot \overline{Z(y)}) = C(x - y) \qquad (x, y \in T)$$
- Wir werden auch diese Funktion C wie in Definition 1.3.11 die Korrelationsfunktion von Z nennen. Die Funktion C ist auf der Menge $T - T = \{x - y; x, y \in T\}$ definiert. Leicht zu zeigen:
$$\mathbb{E}\big((Z(x) - M) \cdot \overline{(Z(y) - M)}\big)$$
ist auch eine Funktion von $x - y$. Wir bezeichnen diese Funktion als Kovarianzfunktion σ. Es gilt:
$$\sigma(h) = C(h) - |M|^2$$
- Ein beliebiges Feld Z auf T heißt stationär im engeren Sinne, falls die Zufallsvektoren $(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_k})$ und $(Z_{t_1+h}, \dots, Z_{t_k+h})$ für alle $t_1, \dots, t_k \in T$ und $h \in \mathbb{R}^d$ mit $t_j + h \in T$ für alle $j = 1, \dots, k$ dieselbe Verteilung besitzen.

1.3.14 Bemerkung

(i). Ist Z stationär im engeren Sinne und von zweiter Ordnung, dann ist Z auch stationär im weiteren Sinne.

(ii). Sind die Zufallsgrößen $Z(x)$ unabhängig und identisch verteilt, so ist Z stationär im engeren Sinne. Im weiteren Sinne jedoch nur dann, wenn Z von zweiter Ordnung ist.

1.3.15 Definition

Ein Feld zweiter Ordnung auf T heißt weißes Rauschen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 $(\sigma > 0)$, wenn die Zufallsgrößen $Z(x), x \in T$ unkorreliert sind und $\mu = \mathbb{E}(Z(x))$, $\sigma^2 = \mathbb{V}(Z(x))$. Bezeichnung: $Z \sim \mathrm{WN}(\mu, \sigma^2)$ (white noise).

Bemerkung:

(i). Weißes Rauschen ist stationär im weiteren Sinne:

- $\forall x \in T : \mu = \mathbb{E}(Z(x))$
- $\forall x \neq y \in T : \mathbb{E}(Z(x) \cdot \overline{Z(y)}) = \mathbb{E}(Z(x)) \cdot \mathbb{E}(\overline{Z(y)}) = |\mu|^2$

Damit Kovarianzfunktion:
$$C(h) = \begin{cases} \sigma^2 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases}$$

(ii). Spezialfall: Sind die Zufallsgrößen $Z(x)$ unabhängig und identisch verteilt, so schreiben wir $Z \sim IID(\mu, \sigma^2)$. Solche Felder sind stationär im engeren Sinne.

1.3.16 Aufgabe

(i). Seien $X_1, \dots, X_n$ ein orthogonales System in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}X_j = 0$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass
$$Z(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{\imath (a_j, t)} \cdot X_j \qquad (t \in \mathbb{R}^d)$$
stationär ist und bestimmen Sie die Kovarianz- und Korrelationsfunktion.

(ii). Welche Eigenschaft muss die Funktion $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ haben, damit
$$Z(t) = g(t) \cdot X \qquad (t \in \mathbb{R}^d)$$
stationär ist, wobei $X \neq 0$, $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$?

1.3.17 Aufgabe

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$X(t) := A \cdot \cos(\alpha t) + B \cdot \sin(\alpha t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

wobei A und B unkorrelierte Zufallsgrößen mit $\mathbb{E}A = \mathbb{B} = 0$, $\mathbb{V}A = \mathbb{V}B = 1$ seien.

(i). Zeigen Sie, dass X stationär ist und berechnen Sie die Korrelationsfunktion.

(ii). Ist X stationär im engeren Sinne?

1.3.18 Definition

Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall oder $T \subseteq \mathbb{Z}$. Ein reellwertiger Prozess X auf T heißt ein Markovscher Prozess, wenn

$$\mathbb{P}(X_{t_n} \leq a_n | \forall j = 1, \ldots, n-1 : X_{t_j} = a_j) = \mathbb{P}(X_{t_n} = a_n | X_{t_{n-1}} = a_{n-1})$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$, für $\mu_{(X_1,\ldots,X_n)}$-fast alle $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $t_j \in T$ mit $t_1 < \ldots < t_n$.
Mit anderen Worten: Wenn die Vergangenheit $X_{t_1}, \ldots, X_{t_{n-2}}$ und die Gegenwert $X_{t_{n-1}}$ gegeben sind, dann hängt die Zukunft X_{t_n} nur von der Gegenwart ab. Später werden wir eine allgemeinere Definition angeben.

Bemerkung:

(i). Die Bedingungen können Null-Ereignisse sein, siehe Anhang über bedingte Erwartung/Wahrscheinlichkeit.

Beispiel:

(i). Das zufällige Wandern eines Teilchens auf $\mathbb{Z}$, wobei das Teilchen bei jedem Schritt mit der Wahrscheinlichkeit p nach rechts und mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ nach links verschoben wird. $Z(n)$ sei die Position nach dem n-ten Schritt.

(ii). Physikalische Prozesse:

- Beim radioaktiven Zerfall die Anzahl der zur Zeit t noch vorhandenen radioaktiven Atome.
- Bei der Brownschen Bewegung die Position des Partikels.

1.3.19 Aufgabe

Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda|_{[0,1]})$ und definieren den Prozess X durch

$$X_t(w) := t \cdot w \qquad (t \in \mathbb{R} =: T, w \in [0,1])$$

Bestimmen Sie die endlich-dimensionalen Verteilungen des Prozesses und die Kovarianzfunktion.

1.3.20 Aufgabe

Seien Z und Θ unabhängige Zufallsgrößen so, dass Z die Dichte

$$p(z) = 1_{[0,\infty)}(z) \cdot z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad (z \in \mathbb{R})$$

besitzt und Θ gleichmäßig verteilt in $[0, 2\pi)$. Dann ist

(i). der Zufallsvektor $(Z \cdot \cos\Theta, Z \cdot \sin\Theta)$ Gauß-verteilt.

(ii). $X_t := \cos(2\pi t + \Theta) \cdot Z$ $(t \in \mathbb{R})$ ein Gauß-Prozess mit Werten in $\mathbb{R}$.

2 Allgemeine Eigenschaften

2.1 Separabilität und Messbarkeit

- Die Definition eines Prozesses X verlangt die Messbarkeit von
$$w \mapsto X(t,w)$$
für festes $t \in T$, es wird jedoch keine Bedingung an die Abbildung
$$t \mapsto X(t,w)$$
für festes $w \in \Omega$ gestellt.
- Ist z.B. $T(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ $(a < b)$, also nicht abzählbar, so hat man gelegentlich auch mit überabzählbar vielen Ereignissen zu tun, was zu Schwierigkeiten führen kann. Beispiele:
  (i). Die Menge
  $$\{w \in \Omega; \forall t \in T : X_t(w) \geq 0\} = \bigcap_{t \in T} \{w \in \Omega; X_t(w) \geq 0\}$$
  ist im Allgemeinen kein Ereignis.
  (ii). $Y = \sup_{t \in T} X_t$ braucht keine Zufallsvariable zu sein, da
  $$[Y \leq y] = \bigcap_{t \in T} [X_t \leq y]$$
  (iii). $\lim_{s \to t} X_s(w)$ ist im Allgemeinen keine Zufallsgröße, ebenso $\int_c^d X_t(w)\, dt$.

2.1.1 Definition

Sei X ein S-wertiger Prozess auf T, wobei S und T topologische Räume sind. X heißt separabel, wenn eine abzählbare Teilmenge $T_0 \subseteq T$ und ein Nullereignis $A \in \mathcal{A}$ mit der folgenden Eigenschaft existiert:
Für eine beliebige abgeschlossene Menge $F \subseteq S$ und für eine beliebige offene Menge $O \subseteq T$ unterscheiden sich die Mengen
$$\{w \in \Omega; \forall t \in O : X_t(w) \in F\}$$
und
$$\{w \in \Omega; \forall t \in O \cap T_0 : X_t(w) \in F\} (\in \mathcal{A})$$
nur in einer Teilmenge von A (d.h. ihre symmetrische Differenz ist in A enthalten). T_0 wird separierende Menge oder Separabilitäts-Menge für X genannt.

2.1.2 Bemerkung

Ein kleines Problem bleibt noch: Teilmengen von Nullmengen sind im Allgemeinen keine Ereignisse. Dieses Problem lässt sich beheben, indem man den Grundraum vervollständigt.

2.1.3 Aufgabe

Der betrachtete Wahrscheinlichkeitsraum sei vollständig. Seien $(X_t)_{t\in T}$ ein reellwertiger und separabler Prozess, $T \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $O \subseteq \mathbb{R}$ offen. Zeigen Sie, dass folgende Ausdrücke Zufallsgrößen sind:

$$\sup_{t\in T\cap O} X_t \qquad \inf_{t\in T\cap O} X_t \qquad \limsup_{s\to t} X_s \qquad \liminf_{s\to t} X_s \qquad \lim_{s\to t} X_s$$

letzterer falls existent.

2.1.4 Aufgabe

Besitzt X stetige Pfade und ist T separabel, so ist auch X separabel. Eine beliebige abzählbare dichte (=totale) Teilmenge $T_0 \subseteq T$ ist eine Separabilitäts-Menge für X.

2.1.5 Aufgabe

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda\big|_{[0,1]})$ und $X_t(w) := \delta_{t,w}$, $t \in T := [0,1]$. Dann ist X nicht separabel. Der Prozess Y,

$$Y(t,w) := 0 \qquad (t, w \in [0,1])$$

ist separabel und $\mathbb{P}[X_t = Y_t] = 1$ für alle $t \in [0,1]$.

2.1.6 Definition

Wir nennen zwei S-wertige Prozesse X und Y auf T (mit demselben Grundraum) Modifikationen voneinander, wenn $\mathbb{P}[X_t = Y_t] = 1$ für alle $t \in T$.

Bemerkung:

- Für beliebige $t_1, \ldots, t_n$ gilt dann $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ fast sicher, d.h. X und Y besitzen dieselben endlich-dimensionalen Verteilungen.

2.1.7 Satz

Seien S und T metrische Räume, wobei T separabel und S kompakt. Für jeden S-wertigen Prozess X auf T existiert ein separabler S-wertiger Prozess Y auf T, sodass $\mathbb{P}[X_t = Y_t] = 1$ für alle $t \in T$.

ohne Beweis

2.1.8 Definition

Sei X ein S-wertiger Prozess auf T, wobei (S,d) ein metrischer Raum und T ein topologischer Raum sind. X heißt stetig in Wahrscheinlichkeit (stochastisch stetig) in $t_0 \in T$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{t\to t_0} \mathbb{P}[d(X_t, X_{t_0}) > \varepsilon] = 0$$

(Die Menge $\{w; d(X_t(w), X_{t_0}(w)) > \varepsilon\}$ ist ein Ereignis, denn: (X_t, X_{t_0}) ist eine $S \times S$-wertige Zufallsvariable, $d : S \times S \to \mathbb{R}$ ist stetig, daher folgt Messbarkeit der Komposition.)

2.1.9 Satz

Sei X ein reellwertiger, in Wahrscheinlichkeit stetiger Prozess auf einem endlichen Intervall $T \subseteq \mathbb{R}$. Dann besitzt X eine separable Modifikation Y mit den folgenden Eigenschaften:

(i). Jede totale Teilmenge $T_0 \subseteq T$ ist eine Separabilitäts-Menge für Y.

(ii). Der Prozess Y ist messbar, d.h. die Abbildung

$$(t,w) \mapsto Y(t,w)$$

ist $(\mathcal{L} \times \mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-messbar, wobei $\mathcal{L}$ die σ-Algebra der lebesgue-messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Ohne Beweis. Satz wird später nicht verwendet.

2.1.10 Bemerkung

Seien X ein reellwertiger messbarer Prozess auf $\mathbb{R}$ und $A \subseteq \mathbb{R}$ eine lebesgue-messbare Menge. Aus der Maßtheorie bekannt: $t \mapsto X(t,w)$ lebesgue-messbar für alle $w \in \Omega$. Gilt

$$\int_A \mathbb{E}|X_t|\,dt = \int_A \int_\Omega |X(t,w)|\,d\mathbb{P}(w)\,dt < \infty$$

so ist nach dem Satz von Fubini die Abbildung

$$w \mapsto \int_A X(t,w)\,dt$$

eine Zufallsgröße.

2.1.11 Aufgabe

Wenn die Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße X in ihren Stetigkeitspunkten nur die Werte 0 oder 1 annimmt, dann ist X fast sicher konstant.

2.1.12 Aufgabe

Ist ein reellwertiger Prozess X_t $(t \in [0,1])$ stochastisch stetig und sind die Zufallsgrößen X_t unabhängig, so sind sie fast sicher konstant:

$$X_t = f(t) \quad \text{f.s.}$$

mit einer stetigen Funktion f.

Hinweis: Berechnen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}[X_t > a+\varepsilon, X_s < a-\varepsilon] + \mathbb{P}[X_s > a+\varepsilon, X_t < a-\varepsilon] \le \mathbb{P}[|X_t - X_s| > \varepsilon]$$

mit Hilfe der Verteilungsfunktionen F_t und F_s. Zeigen Sie, dass F_t in den Stetigkeitspunkten nur die Werte 0 oder 1 annehmen kann. Dann Aufgabe 2.1.11.

2.1.13 Aufgabe

Sei X eine standard-normalverteilte Zufallsgröße,

$$X_t := X + t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Dann:

(i). Für jede totale Teilmenge $T_0 \subseteq T$ gilt

$$\mathbb{P}[\exists t \in T_0 : X_t = 0] = 0$$

(ii). Die Menge $\{w \in \Omega; \exists t \in [0,1] : X_t(w) = 0\}$ ist ein Ereignis mit positiver Wahrscheinlichkeit.

2.2 Stetige Modifikationen

2.2.1 Satz: Kolmogorov

Sei X ein Prozess auf $T = \mathbb{R}$ oder $T = [0,\infty)$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}^d$. Existieren Konstanten $a,b,c > 0$, sodass

$$\forall t,s \in T : \mathbb{E}\big(\|X_t - X_s\|^a\big) \le c \cdot |t-s|^{1+b} \tag{2.1}$$

dann besitzt X eine Modifikation mit stetigen Pfaden.

Beweis:

(i). Wir konstruieren zunächst eine stetige Modifikation auf $[0,1]$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $D_n := \left\{\frac{k}{2^n}; k = 0,\dots,2^n\right\}$. Wir definieren die Prozesse X_t^n durch

$$X_t^n := \begin{cases} X_t & t \in D_n \\ \lambda \cdot X_{\frac{k}{2^n}} + (1-\lambda)\cdot X_{\frac{k-1}{2^n}} & \exists \lambda \in (0,1) : t = \lambda \cdot \frac{k}{2^n} + (1-\lambda)\cdot \frac{k-1}{2^n} \end{cases}$$

Dann sind die Pfade von X_t^n stückweise linear und stetig. Weiterhin gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : X_0^n = X_0 \qquad X_1^n = X_1 \tag{2.2}$$

Für $s \in D_n$ und $t \in [0,1]$ mit $|t-s| \le \frac{1}{2^n}$ gilt

$$\|X_t^n - X_s\| \le \max_{1\le k\le 2^n} \left\|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}\right\| =: Z_n \tag{2.3}$$

Sei nun $t \in [0,1]$ beliebig, $m \in \mathbb{N}$. Für $j \le m$ sei s_j das kleinste Element aus D_j das $\ge t$ ist. Dann gelten

$$0 \le s_j - t < \frac{1}{2^j} \qquad 0 \le s_j - s_{j+1} \le \frac{1}{2^{j+1}}$$

Wegen (2.3) und der Dreiecksungleichung folgt für $n < m$:

$$\begin{aligned}\|X_t^n - X_t^m\| &\le \|X_t^n - X_{s_n}\| + \sum_{j=n}^{m-1} \|X_{s_{j+1}} - X_{s_j}\| + \|X_{s_m} - X_t^m\| \\ &\le \sum_{j=n}^{m} Z_j + Z_n \le 2\sum_{j=n}^{\infty} Z_n\end{aligned}$$

(Beachte: Rechte Seite von t unabhängig.)

Wir zeigen, dass die rechte Seite fast sicher gegen 0 konvergiert. Dazu genügt es zu zeigen, dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ fast sicher konvergiert. Sei $\gamma \in \left(0, \frac{b}{a}\right)$ beliebig. Wegen monotoner Konvergenz:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (\underbrace{2^{\gamma\cdot n}\cdot Z_n}_{\ge 0})^a\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\gamma\cdot n\cdot a}\mathbb{E}(Z_n^a) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\gamma\cdot n\cdot a}\cdot \mathbb{E}\left(\max_{s\in D_n\setminus\{0\}} \|X_s - X_{s-2^{-n}}\|^a\right) \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\gamma\cdot n\cdot a}\cdot \sum_{s\in D_n\setminus\{0\}} \mathbb{E}(\|X_s - X_{s-2^{-n}}\|^a) \\ &\overset{(2.1)}{\le} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\gamma\cdot n\cdot a} \sum_{s\in D_n\setminus\{0\}} c\cdot \underbrace{|s-2^{-n}-s|^{(1+b)}}_{2^{-n\cdot(1+b)}} \\ &= c\cdot\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n\cdot(\gamma\cdot a - b)} < \infty\end{aligned}$$

Damit: Die Reihe auf der linken Seite konvergiert fast sicher, insbesondere konvergiert $2^{\gamma \cdot n} \cdot Z_n$ fast sicher gegen 0, woraus die fast sichere Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} Z_n$ folgt.

Wir haben gezeigt, dass $(X^n(\cdot, w))_{n \in \mathbb{N}}$ für fast alle $w \in \Omega$ eine Cauchy-Folge in $C([0,1], \mathbb{R}^d)$ bzw. $C([0,1], \mathbb{C}^d)$ (Banachraum!) ist. Daher besitzt $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen fast sicheren Grenzwert Y mit stetigen Pfaden.

Wir zeigen: $Y_t = X_t$ fast sicher für alle $t \in [0,1]$. Für $t \in D_m$ und $n \geq m$ gilt $X_t^n = X_t$ und daher $Y_t = X_t$ fast sicher für $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_m$. Ist nun $t \in [0,1]$ beliebig, so gibt es $s_n \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_m$ mit $s_n \to t$. Daher

$$\mathbb{P}[\|X_t - X_{s_n}\| \geq \varepsilon] \overset{\text{Markov}}{\leq} \varepsilon^{-a} \cdot \mathbb{E}(\|X_t - X_{s_n}\|^a) \overset{(2.1)}{\to} 0 \, (n \to \infty)$$

d.h. $Y_{s_n} = X_{s_n} \to X_t$ in Wahrscheinlichkeit. Wegen der Stetigkeit von Y gilt aber $Y_{s_n}(w) \to Y_t(w)$ für alle $w \in \Omega$, damit auch $Y_{s_n} \to Y_t$ in Wahrscheinlichkeit. Also $X_t = Y_t$ fast sicher.

(ii). Allgemeiner Fall: Wie auf $[0,1]$ konstruieren wir Modifikationen auf den Intervallen $[k, k+1]$ für $k \in \mathbb{Z}$ bzw. $k \in \mathbb{N}$ und verwenden (2.2).

2.2.2 Definition

Ein reellwertiges Feld X auf einem topologischen Raum T heißt

(i). stetig in Wahrscheinlichkeit (stochastisch stetig) in $t \in T$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{s \to t} \mathbb{P}[|X_t - X_s| > \varepsilon] = 0$$

(ii). L^p-stetig in $t \in T$, wenn für alle $s \in T$ gilt $\mathbb{E}(|X_s|^p) < \infty$ und

$$\lim_{s \to t} \mathbb{E}(|X_s - X_t|^p) = 0$$

(iii). fast sicher Pfad-stetig in $t \in T$, wenn

$$\mathbb{P}\left(\left\{w \in \Omega; \lim_{s \to t} |X_s(w) - X_t(w)| \neq 0\right\}\right) = 0$$

(iv). fast sicher Pfad-stetig, wenn

$$\bigcup_{t \in T} \left\{w \in \Omega; \lim_{s \to t} |X_s(w) - X_t(w)| \neq 0\right\}$$

ein Null-Ereignis ist.

(v). Pfad-stetig oder stetig, wenn alle Pfade stetig sind.

3

Zufällige Felder zweiter Ordnung

3.1 Korrelationsfunktion

3.1.1 Erinnerung

Ist Z ein Feld zweiter Ordnung auf T, so heißt

$$C(x,y) = \mathbb{E}(Z(x) \cdot \overline{Z(y)}) \qquad (x,y \in T)$$

die Korrelationsfunktion von Z. Die Kovarianzfunktion ist durch

$$\sigma(x,y) = \mathbb{E}((Z(x) - M(x)) \cdot \overline{(Z(y) - M(y))}) \qquad (x,y \in T)$$

definiert, wobei $M(x) = \mathbb{E}(Z(x))$.

3.1.2 Satz

Eine komplexwertige (reellwertige) Funktion $K : T \times T \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) ist genau dann die Kovarianz- oder Korrelationsfunktion eines komplexen (reellen) Feldes 2. Ordnung, wenn für beliebige $x_1, \dots, x_n$ die Matrix $(K(x_i,x_j))_{i,j=1}^n$ positiv semidefinit (positiv semidefinit und symmetrisch) ist.

Beweis:

- „ $\Rightarrow$“ (Aufgabe 1.3.12)

  Sei K die Kovarianzfunktion eines komplexen Feldes Z. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n K(x_i,x_j) \cdot a_i \cdot \bar{a}_j &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}((Z(x_i) - M(x_i)) \cdot \overline{(Z(x_j) - M(x_j))}) \cdot a_i \cdot \bar{a}_j \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot (Z(x_i) - M(x_i))\right) \cdot \overline{\left(\sum_{j=1}^n a_j \cdot (Z(x_j) - M(x_j))\right)}\right) \\
&= \mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n a_i \cdot (Z(x_i) - M(x_i))\right|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

  für alle $a_j \in \mathbb{C}, x_j \in T$. Analog für Korrelationsfunktion. Symmetrie für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist klar.

- „$\Leftarrow$“: Folgt aus Satz 3.1.4

3.1.3 Lemma

Sei $C = (c_{jk})_{j,k=1}^n$ eine positive semidefinite Matrix und $A = (a_{jk})_{j,k=1}^n := \operatorname{Re} C$, $B = (b_{jk})_{j,k=1}^n := \operatorname{Im} C$. Dann ist die $(2n) \times (2n)$-Matrix

$$D = (d_{jk})_{j,k=1}^n := \begin{pmatrix} A & -B \\ B & a \end{pmatrix}$$

positiv semidefinit im komplexen Sinne.

Beweis:

- Es gilt $A^T = A$ und $B^T = -B$ (wegen $c_{jk} = \bar{c}_{kj}$, siehe Anhang), also $D = D^T$. Für alle $r_1, \ldots, r_{2n}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk} \cdot (r_j - \imath \cdot r_{n+j}) \cdot (r_k + \imath \cdot r_{n+k}) \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{jk} \cdot (r_j \cdot r_k + r_{n+j} \cdot r_{n+k})}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{-\imath \cdot \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk} \cdot (r_{n+j} \cdot r_k - r_j \cdot r_{n+k})}_{\in\imath\mathbb{R}} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot (r_j \cdot r_k + r_{n+j} \cdot r_{n+k}) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{jk} \cdot (r_{n+j} \cdot r_k - r_{n+k} \cdot r_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{jk} \cdot r_j \cdot r_k
\end{aligned}
$$

3.1.4 Satz

Sei $M : T \to \mathbb{C}$ beliebig und $K : T \times T \to \mathbb{C}$ so, dass für beliebige $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ die Matrix

$$(K(x_i, x_j))_{i,j=1}^n \tag{1}$$

positiv semidefinit ist. Dann existiert ein Gauß-Feld auf T mit

$$\mathbb{E}(Z(x)) = M(x) \tag{2}$$

$$\mathbb{E}(Z(x) \cdot \overline{Z(y)}) - M(x) \cdot \overline{M(y)} = K(x,y) \tag{3}$$

$$\mathbb{E}(Z(x) \cdot Z(y)) = M(x) \cdot M(y) \tag{4}$$

für alle $x, y \in T$. Sind M und K reellwertig, so existiert ein reelles Gauß-Feld Z, sodass (2) und (3) gelten.

Bemerkung: Wenn ein Feld Z die Gleichungen (2) und (4) erfüllt, dann ist

$$\mathbb{E}((Z(x) - M(x))^2) = 0$$

und folglich $Z(x) = M(x)$ fast sicher, wenn Z reell ist.

Beweis:

(i). Seien M und K reellwertig und $x_1, \ldots, x_n \in T$. Nach (E.2) existiert eine Gauß-Verteilung auf $\mathbb{R}^n$ mit Erwartungsvektor $(M(x_1), \ldots, M(x_n))$ und Kovarianzmatrix (1). Diese Verteilungen erfüllen die Konsistenzbedingungen von Kolmogorov (1.3.8). Satz von Kolmogorov gibt Behauptung.

(ii). Seien M und K komplexwertig. Definiere $\tilde{T} := T \times \{1,2\}$, $\tilde{M}(x,1) := \operatorname{Re} m(x)$, $\tilde{M}(x,2) := \operatorname{Im} M(x)$ und $\tilde{K} : \tilde{T} \times \tilde{T} \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{K}((x,1),(y,1)) = \tilde{K}((x,2),(y,2)) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Re} K(x,y)$$

$$\tilde{K}((x,1),(y,2)) = -\tilde{K}((x,2),(y,1)) = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{Im} K(x,y)$$

Aus Lemma 3.1.3 folgt, dass $\tilde{K}$ positiv semidefinit auf $\tilde{T} \times \tilde{T}$. Nach (i) existiert ein reelles Feld $\tilde{Z}$ auf $\tilde{T}$ so, dass (2) und (3) für $\tilde{M}, \tilde{K}, \tilde{Z}$ gelten. Wir definieren

$$Z(x) := \tilde{Z}(x,1) + \imath \cdot \tilde{Z}(x,2)$$

Dann ist Z ein komplexes Gaußsches Feld. Kurze Rechnung: (2)-(4) erfüllt.

3.1.5 Aufgabe

Seien K, K_1, K_2 Kovarianzfunktionen auf $T \times T$. Die folgenden Funktionen sind Kovarianz-Funktionen auf $T \times T$:

(i). $p_1 \cdot K_1 + p_2 \cdot K_2$ für $p_1, p_2 \geq 0$

(ii). $K_1 \cdot K_2$

(iii). punktweise Grenzwert von Kovarianzfunktionen auf $T \times T$

(iv). $(t,s) \mapsto f(t-s)$ wobei f eine charakteristische Funktion auf $\mathbb{R}^d$ ist. Insbesondere sind

$$\cos(t-s) \qquad e^{-|t-s|^\alpha} \qquad \frac{1}{1+|t-s|^\alpha}$$

für $\alpha \in (0,2]$, $t,s \in \mathbb{R}$ Kovarianzfunktionen.

(v). $\varphi(K)$ wenn $|K| < \varrho$ mit $\varrho > 0$ und

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n \qquad (a_n \geq 0)$$

und die Reihe absolut konvergent auf $\{z \in \mathbb{C}; |z| < \varrho\}$. Insbesondere sind e^K und $\frac{1}{d-K}$ für beliebige $d \geq K$ Kovarianzfunktionen.

3.1.6 Lemma

Die Kerne

$$K_1(x,y) := \min\{x,y\} \qquad (x,y \in [0,\infty))$$
$$K_2(x,y) := \frac{1}{2} \cdot \big(|x| + |y| - |x-y|\big) \qquad (x,y \in \mathbb{R})$$

sind positiv semidefinit.

Beweis:

(i). Seien $x_1, \ldots, x_n \in [0,\infty)$. Zu zeigen: $A = (\min(x_i,x_j))_{i,j=1}^n$ ist positiv semidefinit. Wir dürfen annehmen, dass $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Dann ist

$$\det A(x_1,\ldots,x_n) =: D_n(x_1,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & \ldots & x_1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{vmatrix}$$
$$\overset{(*)}{=} x_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \ldots & x_2 - x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \end{vmatrix}$$
$$= x_1 \cdot D_{n-1}(x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1)$$

Zu $(*)$: Wir subtrahieren die erste Zeile von den anderen Zeilen und entwickeln die Determinante nach der ersten Spalte.

Mit vollständiger Induktion folgt:

$$D_n(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \cdot (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1)$$

also $\det A(x_1,\ldots,x_n) \geq 0$. Die Unterdeterminanten von A haben dieselbe Struktur, sie sind also auch nicht-negativ. Die Aussage folgt aus (C.9).

(ii). $K_2(x,y) = 0$ falls x und y verschiedene Vorzeichen haben. $K_2(x,y) = K_1(|x|,|y|)$ sonst. Die Matrix $(K_2(x_i,x_j))_{i,j=1}^n$ mit $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ hat also eine Diagonal-Blockform mit positiv semidefiniten Blöcken. Behauptung folgt mit Lemma 3.1.3.

3.1.7 Satz

Auf $T = \mathbb{R}$ existiert ein stetiger reeller Gauß-Prozess X mit $\mathbb{E}(X(t)) = 0$ und

$$\mathbb{E}(X(t) \cdot X(s)) = \frac{1}{2}\Big(|s| + |t| - |t-s|\Big) \qquad (t, s \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

Für $t, s \in [0, \infty)$ gilt speziell

$$\mathbb{E}(X(t) \cdot X(s)) = \min\{t, s\} \tag{2}$$

Beweis:

- Die Existenz ohne stetige Pfade zu fordern folgt aus Lemma 3.1.6 und Satz 3.1.4.
- Stetige Pfade: Ziel ist Anwendung des Satzes von Kolmogorov. X ist Gauß-Prozess, also $X_t - X_s$ normalverteilt mit $\mathbb{E}(X_t - X_s) = 0$ und

$$\begin{aligned}\forall s \le t : \mathbb{V}(X_t - X_s) &= \mathbb{E}((X_t - X_s)^2) = \mathbb{E}(X_t^2 - 2X_t \cdot X_s + X_s^2)\\ &= |t| - (|s| + |t| - |t-s|) + |s| = |t-s| = t - s\end{aligned}$$

  d.h. $X_t - X_s \sim N(0, |t-s|)$. Also $X_t - X_s \overset{d}{=} \sqrt{t-s} \cdot X_1$. Damit folgt:

$$\mathbb{E}((X_t - X_s)^4) = \sqrt{t-s}^{\,4} \cdot \mathbb{E}(X_1^4) = (t-s)^2 \cdot \underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{X}_1^4)}_{3=:c<\infty}$$

  Satz 2.2.1 mit $a = 4, b = 1, c = \mathbb{E}(X_1^4)$ sichert die Existenz der stetigen Modifikation (funktioniert für jedes $a > 2$).

3.1.8 Bemerkung

- Ein Prozess mit den obigen Eigenschaften heißt Wiener Prozess oder Brownsche Bewegung. Oft werden die Einschränkungen auf $[0, \infty)$ oder $[0, a]$ betrachtet. Einige Autoren fordern nur die Stetigkeit von $\mathbb{P}$-fast allen Pfaden. Ohne Stetigkeitsforderung: schwacher Wiener Prozess.
- Für $s \le 0 \le t$ sind X_t und X_s unkorreliert. Da X ein Gauß-Prozess ist, folgt hieraus die Unabhängigkeit ((E.8)).

3.1.9 Bemerkung

Es gibt auch andere Konstruktionsmöglichkeiten des Wiener Prozesses.

(i). Sei $T > 0$ beliebig und

$$X(t) := \sqrt{2T} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi \cdot t}{T}\right)}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi} \cdot X_n^T$$

für $0 \le t \le T$, wobei X_n^T unabhängig und standardnormalverteilt.

Diese Reihe konvergiert in L^2 (Im Hilbertraum H: $\sum_j c_j e_j$ konvergent in $H \Leftrightarrow \sum_j |c_j|^2 < \infty$), sogar fast sicher (siehe (A.5)) und X besitzt die Kovarianzfunktion $\min\{t, s\}$. Man kann zeigen, dass alle Pfade stetig sind.

(ii). Sei $C = C([0,1])$ der lineare Raum aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$, versehen mit der Supremumnorm

$$\|f\| := \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

Dann ist $d(f, g) := \|f - g\|$ eine Metrik. Mit dieser Metrik ist C vollständig und separabel, sogar separabler Banachraum. Mit $\mathcal{B}(C)$ bezeichnen wir (wie üblich) die Borel-σ-Algebra auf C. Bei dieser Konstruktion zeigt man (ursprgl. von Wiener): Auf $(C, \mathcal{B}(C))$ existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das sogenannte Wiener-Maß, mit der folgenden Eigenschaft

$$W_t(w) := w(t) \qquad (t \in [0,1], w \in C =: \Omega)$$

ist ein Wiener-Prozess auf $[0,1]$. Bemerkung: Die Pfade sind nach Konstruktion automatisch stetig. Die Abbildung $w \mapsto w(t)$ sind Gaußsche Zufallsgrößen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(C, \mathcal{B}(C)) = (\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Skizze: Seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, \mathbb{P}_0)$. Wir setzen $S_0 := 0$, $S_k := X_1 + \ldots + X_k$ für $k \in \mathbb{N}$,

$$W_t^n(w) := \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(S_{\lfloor n \cdot t \rfloor}(w) + (nt - \lfloor n \cdot t \rfloor) \cdot X_{\lfloor n \cdot t \rfloor + 1} \right)$$

für $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1], w \in \Omega_0$. Für festes n und w ist $t \mapsto W_t^n(w)$ stetig und linear auf $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \subseteq [0,1]$. Für jedes n können wir $W_\cdot^n$ als C-wertige Zufallsvariable auf $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, \mathbb{P}_0)$ betrachten. Man kann zeigen, dass die Verteilungen dieser Zufallsvariablen schwach gegen eine Verteilung konvergiert, nämlich gegen das Wiener Maß.

3.1.10 Aufgabe

Sei W ein Wiener Prozess auf $[0, \infty)$ und $0 < t_1 < \ldots < t_n$.

(i). Der Zufallsvektor $V := (W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$ besitzt die Dichte

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot (t_j - t_{j-1})}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}} \right)$$

wobei $t_0 = x_0 = 0$. Hinweis: (E.7), die Determinante der Kovarianzmatrix wurde bereits in 3.1.6 berechnet. Vermutung für $n = 3$, Gauß-Jordan-Verfahren.

(ii). Berechnen Sie die Dichte des Zufallsvektors

$$\Delta V := (W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$$

mit Hilfe von (F.6). Zeigen Sie mit Hilfe dieser Dichte, dass die obigen Zuwächse unabhängig sind.

3.1.11 Aufgabe

(i). Sei W ein Wiener Prozess auf $[0, \infty)$. Bestimmen Sie die Funktionen f und g, letztere nichtnegativ und monoton wachsend, sodass der (zentrierte Gauß-)Prozess

$$X_t := f(t) \cdot W_{g(t)} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

die Kovarianzfunktion $C(t,s) = e^{-|t-s|}$ $(t, s \in \mathbb{R})$ bestitz. (Dieser Kern ist also positiv semidefinit.)

(ii). Lässt sich ein beliebiger zentrierter Gauß-Prozess X auf $\mathbb{R}$ mit der Kovarianzfunktion aus (i) schreiben als

$$X_t = f(t) \cdot W_{g(t)} \qquad \text{f.s.}$$

mit einem Wiener Prozess W auf $[0, \infty)$?

3.1.12 Eigenschaften der Gamma-Funktion

$$\Gamma(a) := \int_0^\infty x^{a-1} \cdot e^{-x} \, dx \qquad (a > 0)$$

(i). $0 < \Gamma(a) < \infty$

(ii). $\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a)$

(iii). $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$

(iv). $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(v). Γ ist stetig.

3.1.13 Aufgabe

Sei $X \sim N(0, \sigma^2)$. Zeigen Sie, dass für alle $a \in (0, \infty)$

$$\mathbb{E}(|X|^a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot (\sqrt{2} \cdot \sigma)^a \cdot \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)$$

Bemerkung:

$$\mathbb{E}(X^k) = \begin{cases} 0 & k = 1 \mod 2 \\ \mathbb{E}(|X|^k) & k = 0 \mod 2 \end{cases}$$

Speziell ist $\mathbb{E}(X^4) = 3 \cdot \sigma^4$.

3.1.14 Aufgabe

Es gibt unkorrelierte Gauß'sche Zufallsgrößen, die nicht unabhängig sind.

Beispiel:

$$h(x) := \sqrt{2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
$$p(x,y) := \frac{1}{2\pi} \cdot \left(h(x) \cdot e^{-y^2} + h(y) \cdot e^{-x^2}\right) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

Zeigen Sie: p ist eine Dichte. Ist $Z = (X, Y)$ ein zwei-dimensionaler Zufallsvektor mit Dichte p, so sind X und Y standardnormalverteilt, unkorreliert und nicht unabhängig.

3.2 Eigenschaften des Wiener Prozesses

3.2.1 Satz

Sei W ein Wiener Prozess auf $[0, \infty)$. Dann gilt:

(i). $W_t \in N(0,t)$, insbesondere gilt $W_0 = 0$ und $W_t \stackrel{d}{=} \sqrt{t} \cdot W_1$.

(ii). $W_t - W_s \in N(0, |t-s|)$

(iii). $\mathbb{P}[|W_t - W_s| \geq \varepsilon] \leq \frac{|t-s|}{\varepsilon^2}$, insbesondere ist W stochastisch stetig.

(iv). W besitzt unabhängige Zuwächse.

(v). Für jedes $h > 0$ ist der Prozess

$$X^h(t) := W(t+h) - W(t) \qquad (t \in [0, \infty))$$

ein stationärer Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion

$$C^h(s,t) = \max\{0, h - |s-t|\}$$

(vi). W ist ein Markov-Prozess.

(vii). W ist ein Martingal, d.h.

$$\forall s \le t : \mathbb{E}(W_t|\mathcal{F}_s) = W_s \qquad \text{f.s.}$$

wobei $\mathcal{F}_s := \sigma(W_r; r \le s)$.

(viii). $\mathbb{E}((W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s) = t - s$ für $s \le t$

Beweis:

(i). Aus Satz 3.1.7 bekannt.

(ii). Aus Beweis von Satz 3.1.7 bekannt.

(iii). Aus (ii) mit Tschebysheff-Ungleichung.

(iv). (Siehe auch 3.1.10, hier andere Möglichkeit) Sei C die Kovarianzfunktion von W. Für $0 \le t_1 \le t_2 \le s_1 \le s_2$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((W_{t_2} - W_{t_1}) \cdot (W_{s_2} - W_{s_1})) &= C(t_2, s_2) - C(t_2, s_1) - C(t_1, s_2) + C(t_1, s_1)\\ &= t_2 - t_2 - t_1 + t_1 = 0\\ &= \mathbb{E}(W_{t_2} - W_{t_1}) \cdot \mathbb{E}(W_{s_2} - W_{s_1})\end{aligned}$$

Die Zuwächse sind also unkorreliert. Da W ein Gauß-Prozess ist, ist die gemeinsame Verteilung der Zuwächse Gauß-verteilt ((E.4)). Nach (E.8) sind die Zuwächse unabhängig.

(v). (Wir zeigen später, dass jeder Prozess mit unabhängigen Zuwächsen ein Markov-Prozess ist. Für den Wiener Prozess können wir das mit den bedingten Dichten explizit machen.)

Für $0 < t_1 < \ldots < t_n$ besitzt $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$ gemäß 3.1.10 die Dichte

$$p(x_1, t_1, \ldots, x_n, t_n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot (t_j - t_{j-1})}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}\right)$$

mit $x_0 = t_0 = 0$. Markov-Eigenschaft: Sei $n > 1$, dann

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(W_{t_n} \le x_n | \forall j = 1, \ldots, n : W_{t_j} = x_j)\\ &= \int_{-\infty}^{x_n} \frac{p(x_1, t_1, \ldots, x_{n-1}, t_{n-1}, x, t_n)}{p(x_1, t_1, \ldots, x_{n-1}, t_{n-1})}\, dx\\ &= \int_{-\infty}^{x_n} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot (t_n - t_{n-1})}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}}\right) dx\\ &= \int_{-\infty}^{x_n} \frac{p(x_{n-1}, t_{n-1}, x, t_n)}{p(x_{n-1}, t_{n-1})}\, dx = \mathbb{P}(W_{t_n} \le x_n | W_{t_{n-1}} = x_{n-1})\end{aligned}$$

(vi). $\mathbb{E}(X^h(t)) = 0$ offenbar unabhängig von t. Für $s \le t$ gilt

$$\begin{aligned}C^h(s,t) &= \mathbb{E}(X^h(s) \cdot X^h(t)) = \mathbb{E}((W(s+h) - W(s)) \cdot (W(t+h) - W(t)))\\ &= C(s+h, t+h) - C(s+h, t) - C(s, t+h) + C(s,t)\\ &= s + h - \min\{s+h, t\} - s + s = \max\{0, h - t + s\}\end{aligned}$$

Analog: $C^h(s,t) = \max\{0, h + t - s\}$ für $s \ge t$. Also $C^h(s,t) = \max\{0, h - |t-s|\}$, d.h. X^h ist stationär.

(vii). Zuwächse sind unabhängig, also $W_t - W_s$ unabhängig von $W_r = W_r - W_0$ für $r \le s \le t$. Daher $W_t - W_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$. Damit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(W_t - W_s + W_s|\mathcal{F}_s) = \underbrace{\mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s)}_{\mathbb{E}(W_t - W_s) = 0} + \underbrace{\mathbb{E}(W_s|\mathcal{F}_s)}_{W_s}\\ &= W_s\end{aligned}$$

(viii). Wegen $W_t - W_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ und $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ folgt

$$\mathbb{E}((W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((W_t - W_s)^2) = t - s$$

3.2.2 Satz

Sei W ein Wiener Prozess auf $[0,\infty)$ und $c > 0$. Dann sind

$$\left(c^{-\frac{1}{2}} \cdot W_{c\cdot t}\right)_{t\geq 0} \qquad\qquad (W_{t+c} - W_c)_{t\geq 0}$$

auch Wiener Prozesse. Der Prozess $(B_t)_{t\geq 0}$ mit $B_0 := 0$ und $B_t = t \cdot W_{\frac{1}{t}}$ $(t \neq 0)$ besitzt eine Modifikation, die ein Wiener Prozess ist.

Beweis: Aufgabe.

3.2.3 Bemerkung

Der Prozess (B_t) aus dem vorhergehenden Satz braucht selbst nicht stetig zu sein. Um das zu zeigen, sei W ein Wiener Prozess und A ein Nullereignis aus dem Grundraum Ω. Dann ist durch

$$\tilde{W}_t(w) := W_t(w) \cdot 1_{\Omega\setminus A}(w) + t^2 \cdot 1_A(w)$$

wieder ein Wiener Prozess definiert und

$$\tilde{B}_t(w) = t \cdot B_{\frac{1}{t}}(w) \cdot 1_{\Omega\setminus A}(w) + \frac{1}{t} \cdot 1_A(w)$$

d.h. die Pfade sind für $w \in A$ in 0 nicht stetig. Der Prozess $\tilde{W}$ hat auch Parabeln als Pfade.

Vorbemerkung: Die Zufallsgröße

$$w \mapsto \frac{W_{t+h}(w) - W_t(w)}{h} \qquad (h > 0)$$

ist normalverteilt mit Varianz $\frac{1}{h} \to \infty$ $(h \to 0)$.

3.2.4 Satz: Dvoretsky, Erdös, Kakutami

Es sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener Prozess mit vollständigem Grundraum. Dann gibt es ein Ereignis $A \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(A) = 1$, sodass die Pfade $t \mapsto W_t(w)$ für alle $w \in A$ in keinem einzigen Punkt differenzierbar sind. ($t = 0$: rechtsseitiger Grenzwert)

Beweis:

- Für $n \in \mathbb{N}$ sei

  $$A_n := \{w \in \Omega; W_\cdot(w) \text{ist an keiner Stelle} \, t \in [0,n) \, \text{differenzierbar}\}$$

  Wir zeigen, dass die A_n's fast sichere Ereignisse sind. Es folgt dann, dass

  $$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

  auch ein fast sicheres Ereignis ist.

- Es gilt $w \in \Omega\setminus A_n$ genau dann, wenn der zugehörige Pfad f für mindestens ein $t_0 \in [0,n)$ differenzierbar ist. Ist f in t_0 differenzierbar, so gibt es ein $\delta = \delta(t_0) > 0$ und ein $\ell \in \mathbb{N}$:

  $$|f(t) - f(t_0)| \leq \ell \cdot |t - t_0| \qquad (*)$$

  für alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ (f lokal lipschitz-stetig). Sei $m = m(t_0,\delta) \in \mathbb{N}$ so groß, dass für $k \geq m$ mindestens 4 Elemente des Gitters

  $$\left\{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{n\cdot k}{k}\right\} \subseteq [0,n]$$

zwischen t_0 und $t_0+\delta$ liegen. Für jedes k sei $i(k)$ die kleinste natürliche Zahl mit

$$t_0 \le \frac{i}{k} \le \frac{i+3}{k} < t_0+\delta$$

Für $j \in \{i+1, i+2, i+3\}$ gilt:

$$\begin{aligned}\left|f\left(\frac{j}{k}\right) - f\left(\frac{j-1}{k}\right)\right| &\le \left|f\left(\frac{j}{k}\right) - f(t_0)\right| + \left|f(t_0) - f\left(\frac{j-1}{k}\right)\right| \\ &\overset{*}{\le} \ell \cdot \left(\frac{j}{k} - t_0 + \frac{j-1}{k} - t_0\right) \le \ell \cdot \left(\frac{4}{k} + \frac{3}{k}\right) = \frac{7\ell}{k}\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\Omega\backslash A_n \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{k=m}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k\cdot n} \bigcap_{j=i+1}^{i+3} \left[\left|W_{\frac{j}{k}} - W_{\frac{j-1}{k}}\right| \le \frac{7\ell}{k}\right]}_{=:C_m^\ell}$$

C_m^ℓ und die rechte Seite sind Ereignisse. Wir zeigen, dass $\mathbb{P}(C_m^\ell) = 0$ für alle $m, \ell \in \mathbb{N}$; dann sind wir fertig. (Aus Vollständigkeit folgt, dass $\Omega\backslash A_n$ ein Ereignis ist.)
Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$C_m^\ell \subseteq \bigcup_{i=1}^{k\cdot n} \bigcap_{j=i+1}^{i+3} \left[\left|W_{\frac{j}{k}} - W_{\frac{j-1}{k}}\right| \le \frac{7\ell}{k}\right]$$

Die obigen Zuwächse sind unabhängig und verteilt wie $W_{\frac{1}{k}}$, daher folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_m^\ell) &\le \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k\cdot n} \bigcap_{j=i+1}^{i+3} \left[\left|W_{\frac{j}{k}} - W_{\frac{j-1}{k}}\right| \le \frac{7\ell}{k}\right]\right) \\ &\le \sum_{i=1}^{k\cdot n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=i+1}^{i+3} \left[\left|W_{\frac{j}{k}} - W_{\frac{j-1}{k}}\right| \le \frac{7\ell}{k}\right]\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k\cdot n} \mathbb{P}\left[|W_{\frac{1}{k}}| \le \frac{7\ell}{k}\right]^3 = k\cdot n\cdot \mathbb{P}\left[\sqrt{k}\cdot|W_{\frac{1}{k}}| \le \frac{7\ell}{\sqrt{k}}\right]^3 \\ &= k\cdot n\cdot \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{\frac{7\ell}{\sqrt{k}}} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\le 1}\, dx\right)^3 \to 0 \qquad (k\to\infty)\end{aligned}$$

also $\mathbb{P}(C_m^\ell) = 0$.

3.2.5 Beispiel

(i). Sei φ die 2-periodische Funktion mit $\varphi(x) := 1 - |x|$ für $x \in [-1, 1]$. Wir zeigen, dass

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \varphi(4^n \cdot x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

in keinem Punkt differenzierbar ist. (f ist stetig.)

Beweis:

- Sei $x \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_m := \pm\frac{4^{-m}}{2}$, wobei das Vorzeichen so gewählt wird, dass zwischen $4^m \cdot x$ und $4^m \cdot (x+\varepsilon_m)$ keine ganze Zahl liegt.
- Wir setzen
$$d_{nm} := \frac{\varphi(4^n\cdot(x+\varepsilon_m)) - \varphi(4^n \cdot x)}{\varepsilon_m}$$

Es gilt $|\varphi(s)-\varphi(t)| \le |s-t|$ für $t,s \in \mathbb{R}$ beliebig. Damit $|d_{nm}| \le 4^n$ und $|d_{mm}| = 4^m$, da keine ganze Zahl zwischen $4^m \cdot x$ und $4^m \cdot (x+\varepsilon_m)$ liegt. Wenn $n > m$, dann $d_{nm} = 0$, da $4^n \cdot \varepsilon_m$ gerade ganze Zahl (Periodizität).

$$\begin{aligned} 4\left|\frac{f(x+\varepsilon_m)-f(x)}{\varepsilon_m}\right| &= \left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot d_{nm}\right| \ge 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n \\ &= \frac{1}{2}\cdot(3^m+1) \to \infty \qquad (m\to\infty) \end{aligned}$$

also f nicht differenzierbar in x (wegen $\varepsilon_m \to 0$ für $m \to \infty$).

(ii). Weierstraß:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\cdot\cos(3^n\cdot x) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

ist in keinem Punkt differenzierbar.

3.2.6 Satz

Sei W ein Wiener Prozess auf $T=[0,\infty)$ und $[a,b]\subseteq T$. Für eine beliebige Zerlegungsfolge $a = t_0^n < \ldots < t_{k_n}^n = b$ mit

$$\delta_n := \max_{0\le k\le k_n-1}(t_{k+1}^n - t_k^n) \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

konvergiert die zugehörige Folge der sogenannten quadratischen Variationen

$$Q_n := \sum_{k=0}^{k_n-1}(W_{t_{k+1}}^n - W_{t_k}^n)^2$$

im quadratischen Mittel gegen die Konstante $b-a$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\big((Q_n-(b-a))^2\big) = 0$$

Beweis:

- Es gilt:

$$\begin{aligned} (Q_n-(b-a))^2 &= \left(Q_n - \sum_{k=0}^{k_n-1}(t_{k+1}^n - t_k)\right)^2 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{k_n-1}\underbrace{(W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n})^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)}_{=:X_k}\right)^2 \end{aligned}$$

Die Zufallsgrößen X_k sind unabhängig und $\mathbb{E}X_k = 0$. Wir erhalten

$$\mathbb{E}\big((Q_n-(b-a))^2\big) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=0}^{k_n-1}X_k\right)^2\right) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \sum_{k=0}^{k_n-1}\mathbb{E}(X_k^2)$$

Aus $W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k}^n \sim N(0, t_{k+1}^n - t_k^n)$ und aus 3.1.13 folgt

$$\mathbb{E}(X_k^2) = 2\cdot(t_{k+1}^n - t_k^n)^2$$

Damit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big((Q_n-(b-a))^2\big) &= \sum_{k=0}^{k_n-1}2(t_{k+1}^n - t_k^n)^2 \le 2\delta_n\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{k_n-1}(t_{k+1}^n - t_k^n)}_{b-a} \\ &= 2\delta_n\cdot(b-a) \to 0 \qquad (n\to\infty) \end{aligned}$$

3.3 Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Korrelationsfunktion

3.3.1 Erinnerung

Ein Feld Z zweiter Ordnung auf $T \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt L^2-stetig (oder stark stetig, im quadratischen Mittel) in $x_0 \in T$, wenn

$$\lim_{x \to x_0} \mathbb{E}(|Z(x) - Z(x_0)|^2) = 0$$

Das ist äquivalent zu

$$\lim_{x \to x_0} \|Z(x) - Z(x_0)\|_2 = 0$$

wobei $\|.\|_2$ die Norm im Hilbertraum $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ bezeichne,

$$\|X\|_2^2 = (X, X) = \int_\Omega |X|^2 \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}(|X|^2)$$

$(\cdot, \cdot)$ bezeichne das Skalarprodukt

$$(X, Y) = \int_\Omega X \cdot \bar{Y} \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}(X \cdot \bar{Y})$$

für $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Bemerkungen:

(i). $\mathbb{E}(X) = (X, 1)$

(ii). Im Fall $d = 1$ definiert man analog die starke Stetigkeit von links bzw. rechts.

(iii). Ein Feld Z heißt schwach stetig in x_0, wenn

$$\forall g \in L^2 : \lim_{x \to x_0} (Z(x) - Z(x_0), g) = 0$$

gilt. Im Weiteren nicht verwendet.

Wegen

$$|(Z(x) - Z(x_0), g)| \le \|Z(x) - Z(x_0)\|_2 \cdot \|g\|_2$$

folgt aus der starken Stetigkeit die schwache Stetigkeit. Umkehrung ist falsch: Sei $(e_n)_n$ eine Orthonormalbasis eines Hilbertraums H, dann $\|e_j\| = 1$, $e_n \to 0$ schwach ($g = \sum_n c_n \cdot e_n$ und $\sum_n |c_n|^2 < \infty$, also $c_n = (g, e_n) \to 0$).

3.3.2 Satz

Ein Feld Z zweiter Ordnung auf $T \subseteq \mathbb{R}^d$ ist genau dann stark stetig in $t \in T$, wenn die Korrelationsfunktion C in (t, t) stetig ist. Ist die Funktion C stetig in (t, t) und in (s, s), so ist sie stetig in (t, s) und (s, t).

Beweis:

- Für alle $t \in T$, $h \in \mathbb{R}^d$ mit $t + h \in T$ gilt:

$$\|Z(t+h) - Z(t)\|_2^2 = C(t+h, t+h) - C(t+h, t) - C(t, t+h) + C(t, t)$$

(i). Ist also C stetig in (t, t), so ist Z stark stetig in t.

(ii). Sei nun zusätzlich $\varepsilon \in \mathbb{R}^d$ mit $t + \varepsilon \in T$. Dann

$$\begin{aligned} C(t+h, t+h) - C(t, t) &= \mathbb{E}\Big((Z(t+h) - Z(t)) \cdot \overline{(Z(t+\varepsilon) - Z(t))} \Big) \\ &\quad + \mathbb{E}\Big((Z(t+h) - Z(t)) \cdot \overline{Z(t)} \Big) \\ &\quad + \mathbb{E}\Big(\overline{Z(t+\varepsilon) - Z(t)} \cdot Z(t) \Big) \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned}|C(t+h,t+h)-C(t,t)| \leq\ &\|Z(t+h)-Z(t)\|_2 \cdot \|Z(t+\varepsilon)-Z(t)\|_2\\ &+\|Z(t+h)-Z(t)\|_2 \cdot \|Z(t)\|_2\\ &+\|Z(t+\varepsilon)-Z(t)\|_2 \cdot \|Z(t)\|_2\end{aligned}$$

Aus der starken Stetigkeit von Z in t folgt also die Stetigkeit von C in t_0.

- Sei C stetig in (s,s) und (t,t). Dann ist Z stark stetig in t und s und aus

$$C(t,s) = (Z(t), Z(s))$$

und der Stetigkeit des Skalarprodukts in beiden Komponenten folgt die Stetigkeit von C in (t,s).

3.3.3 Beispiele

(i). Seien $T = \mathbb{R}^d$, X_n reelle oder komplexe unkorrelierte Zufallsgrößen mit $\mathbb{E}X_n = 0$, $\|X_n\|_2 \leq 1$ (dann $X_n \perp X_m$ für $n \neq m$), $a_n \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 < \infty$, $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ stetig mit $|f_n| \leq K$ für ein $K \geq 0$. Dann ist das Feld

$$Z(t) := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot f_n(t) \cdot X_n \qquad (t \in \mathbb{R}^d)$$

stark stetig.

Beweis: Sei $t_0 \in$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $N = N_\varepsilon$ so, dass

$$\sum_{n=N+1}^\infty |a_n|^2 < \varepsilon^2$$

Danach wählen wir $\delta > 0$ so, dass

$$\sum_{n=1}^N |a_n \cdot (f_n(t) - f_n(t_0))|^2 < \varepsilon^2$$

für alle $|t-t_0| < \delta$. Dann gilt für $t \in T$ mit $|t-t_0| < \delta$:

$$\begin{aligned}\|Z_t - Z_{t_0}\|_2 &= \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot (f_n(t) - f_n(t_0)) \cdot X_n\right\|_2\\ &\leq \underbrace{\left\|\sum_{n=1}^N a_n \cdot (f_n(t) - f_n(t_0)) \cdot X_n\right\|_2}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left\|\sum_{n=N+1}^\infty a_n \cdot (f_n(t) - f_n(t_0)) \cdot X_n\right\|_2}_{<2\varepsilon\cdot K}\\ &\leq \varepsilon \cdot (1+2K)\end{aligned}$$

Beispiel: $d = 1$, $a_n = \frac{1}{n}$, $f_n(t) = \cos(n \cdot t)$

(ii). Sei $T = \mathbb{R}$, $I_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, f_n stetig auf $\mathbb{R}$, $\operatorname{spt} f_n \subseteq I_n$ und $f_n(I_n) = [0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $\|X_n\|_2 = 1$, so ist das Feld

$$Z(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \cdot X_n \qquad (t \in \mathbb{R})$$

in 0 nicht stark stetig. (Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist höchstens ein Summand $\neq 0$.)

Um das zu zeigen, wählen wir t_k so, dass $f_k(t_k) = 1$. Dann ist $Z(t_k) = X_k$ und $t_k \to 0$ $(k \to \infty)$. Da $\|X_k\|_2 = 1$ konvergiert $Z(t_k)$ nicht gegen $Z(0) = 0$.

3.3.4 Definition

Sei Z ein Prozess zweiter Ordnung auf $T = (a,b)$ mit $-\infty \le a < b \le \infty$. Z heißt stark differenzierbar (oder: im quadratischen Mittel differenzierbar), falls für jedes $t \in (a,b)$ der Grenzwert

$$L^2 - \lim_{h\to 0} \frac{Z(t+h) - Z(t)}{h}$$

existiert. (Auch: $l.i.m.$ - bezeichnet Konvergenz im quadratischen Mittel).
Dieser Grenzwert wird mit $Z'(t)$ bezeichnet.

Bezeichnung: Für eine Funktion f von 2 Variablen sei

$$(\Delta^2 f)(t,s,\varepsilon,h) := f(t+\varepsilon, s+h) - f(t+\varepsilon, s) - f(t, s+h) + f(t,s)$$

Anschaulich: Sei f die Verteilungsfunktion eines Zufallsvektors in $\mathbb{R}^2$, dann $\Delta^2 f$ Wahrscheinlichkeit in dem Rechteck mit obigen Eckpunkten zu landen.

3.3.5 Satz

Ein Prozess zweiter Ordnung auf (a,b) ist genau dann stark differenzierbar, wenn für die Korrelationsfunktion C der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon,h\to 0} \frac{\Delta^2 C(t,t,\varepsilon,h)}{\varepsilon \cdot h}$$

für jedes $t \in (a,b)$ existiert.
Ist Z stark differenzierbar, so existiert

$$D(t,s) := \lim_{\varepsilon,h\to 0} \frac{\Delta^2(t,s,\varepsilon,h)}{\varepsilon \cdot h}$$

für alle $t,s \in (a,b)$ und D ist die Korrelationsfunktion von Z'. Weiterhin gilt:

$$\frac{d}{dt}(Z(t),v) = (Z'(t),v) \tag{1}$$

für alle $v \in L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ und folglich

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}(Z(t)) = \mathbb{E}(Z'(t)) \tag{2}$$

mit $v = 1$.
Beweis:

- Kriterium von Cauchy: Eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem Hilbertraum ist genau dann konvergent (in der Norm), wenn der Grenzwert

  $$\lim_{m,n\to\infty} (X_n, X_m)$$

  existiert.

- Nach diesem Kriterium ist Z genau dann stark differenzierbar, wenn der Grenzwert

  $$\lim_{\varepsilon,h\to 0}\left(\frac{Z(t+\varepsilon)-Z(t)}{\varepsilon}, \frac{Z(t+h)-Z(t)}{h}\right) = \lim_{\varepsilon,h\to 0} \frac{\Delta^2 C(t,t,\varepsilon,h)}{\varepsilon \cdot h}$$

  existiert. Somit erste Aussage bewiesen.

- Ist Z stark differenzierbar, so gilt

$$\begin{aligned}(Z'(t), Z'(s)) &= \left(\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{Z(t+\varepsilon)-Z(t)}{\varepsilon}, \lim_{h\to 0} \frac{Z(t+h)-Z(t)}{h}\right)\\ &= \lim_{\varepsilon,h\to 0} \left(\frac{Z(t+\varepsilon)-Z(t)}{\varepsilon}, \frac{Z(t+h)-Z(t)}{h}\right)\\ &= \lim_{\varepsilon,h\to 0} \frac{\Delta^2 C(t,s,\varepsilon,h)}{\varepsilon\cdot h} = D(t,s)\end{aligned}$$

(1) folgt daraus, dass die starke Konvergenz die schwache nach sich zieht:

$$\begin{aligned}\left(\lim_{h\to 0} \frac{Z(t+h)-Z(t)}{h}, v\right) &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{Z(t+h)-Z(t)}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(Z(t+h),v)-(Z(t),v)}{h}\end{aligned}$$

3.3.6 Bemerkung

Ist C zweimal stetig differenzierbar auf $(a,b)\times(a,b)$, so gilt

$$D = \frac{\partial^2 C}{\partial t\partial s} = \frac{\partial^2 C}{\partial s\partial t}$$

(Bekannt aus Analysis)

3.3.7 Aufgabe

Ist $Z:(a,b)\to L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ ein differenzierbarer Gauß-Prozess, so ist auch Z' ein Gauß-Prozess.

3.4 Der Poisson-Prozess

Zur Erinnerung: Eine Zufallsgröße $X:\Omega\to\mathbb{N}_0$ heißt Poisson-verteilt mit dem Parameter $\lambda>0$, wenn

$$\mathbb{P}[X=k] = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} \qquad (k\in\mathbb{N}_0)$$

$X:\Omega\to\mathbb{R}$ heißt exponentialverteilt mit dem Parameter α, wenn sie die Dichte

$$\mathbb{R}\ni x\mapsto 1_{[0,\infty)}(x)\cdot\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot x}$$

besitzt.

3.4.1 Aufgabe

(i). Berechnen Sie die charakteristischen Funktionen der Poisson-Verteilung und der Exponentialverteilung.

(ii). Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der obigen Verteilungen mit Hilfe der charakteristischen Funktion.

3.4.2 Definition

Ein stochastischer Prozess $N=N_t$ auf $T=[0,\infty)$ heißt Poisson-Prozess mit Intensität $\alpha>0$, wenn

(i). jede Realisierung n ist eine monoton wachsende, rechtsseitig stetige Funktion mit Werten in $\mathbb{N}_0$, für die $n(0)=0$, $n(t)-n(t-0)\in\{0,1\}$ für alle $t\in[0,\infty)$ und

$$\lim_{t\to\infty} n(t)=\infty$$

(ii). N besitzt unabhängige Zuwächse.

(iii). Die Zuwächse $N_t - N_s$ $(0 \le s \le t)$ sind poisson-verteilt mit dem Parameter $a \cdot (t-s)$.

Bemerkung: Aus (i) folgt, dass die Pfade stückweise konstant sind, die Sprunghöhen stets 1 betragen und in endlichen Intervallen nur endlich viele Sprungstellen sind (da nur Werte in $\mathbb{N}_0$ angenommen werden, nicht ∞).

3.4.3 Aufgabe

Für einen Poisson-Prozess N gilt

$$\mathbb{E}(N_t) = \mathbb{V}(N_t) = a \cdot t$$

und die Kovarianzfunktion C ist gegeben durch

$$C(s,t) = a \cdot \min\{s,t\} \qquad (s,t \in [0,\infty))$$

Bemerkung: Für $a = 1$ hat also der Poisson-Prozess dieselbe Kovarianzfunktion wie der Wiener Prozess. (Sie sind nicht unterscheidbar hinsichtlich Eigenschaften 2.Ordnung, obwohl die Pfade ganz unterschiedlich sind.)

3.4.4 Definition

Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_t$ auf $T = [0,\infty)$ heißt ein Zählprozess, wenn er die Eigenschaft (i) aus Definition 3.4.2 besitzt. Die Eintrittszeiten $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und die Aufenthaltszeiten $(u_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ werden durch

$$\begin{aligned} s_k(w) &:= \inf\{t \in T; X_t(w) = k\} \qquad (w \in \Omega, k \in \mathbb{N}) \\ s_0(w) &:= 0 \\ u_n(w) &:= s_{n+1}(w) - s_n(w) \qquad (w \in \Omega, n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

definiert.

3.4.5 Aufgabe

Sei X ein Zählprozess auf $T = [0,\infty)$.

(i). Für beliebige $t \in T$ und $n,k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} [X_t \ge n] &= [s_n \le t] \\ [X_t = n] &= [s_n \le t < s_{n+1}] \\ s_k &= \sum_{n=0}^{k-1} u_k \end{aligned}$$

(ii). Zeigen Sie, dass s_k und u_k Zufallsgrößen sind.

(iii). $s_1(w) < s_2(w) < \ldots$ fast sicher und $\lim_{n\to\infty} s_n(w) = \infty$ für alle $w \in \Omega$.

(iv). Es gilt

$$X_t(w) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[s_k \le t]}(w) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[0,t]}(s_k(w))$$

3.4.6 Aufgabe

Seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige, nichtnegative identisch verteilte Zufallsgrößen so, dass $\mathbb{P}[u_1 > 0] > 0$. Wir definieren X_t durch

$$X_t(w) := \sup\left\{n \in \mathbb{N}_0; \sum_{j=1}^{n} u_j(w) \le t\right\}$$

(Die Summe soll 0 sein für $n = 0$.) Dann sind die Realisierungen n monoton wachsende, rechtsseitig stetige Funktionen mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und

$$\lim_{t\to\infty} n(t) = \infty \qquad \text{fast sicher}$$

Wenn $\mathbb{P}[U_1 > 0] = 1$, dann ist X, bis auf eine Modifikation, ein Zählprozess. Die u's sind dann die Aufenthaltszeiten.

3.4.7 Satz

Ein Zählprozess N ist genau dann ein Poisson-Prozess, wenn

$$\mathbb{P}[N_{t_1} = k_1, \ldots, N_{t_n} = k_n] = \prod_{\ell=1}^{n} \frac{(a\cdot(t_\ell - t_{\ell-1}))^{k_\ell - k_{\ell-1}}}{(k_\ell - k_{\ell-1})!} \cdot e^{-a\cdot(t_\ell - t_{\ell-1})} \tag{1}$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_1 < t_2 \leq< t_n$, $t_j \in [0,\infty)$, $0 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_n$, $k_j \in \mathbb{N}$ wobei $t_0 := k_0 := 0$.

Beweis:

- „$\Rightarrow$“: Sei N ein Poisson-Prozess. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[N_{t_1} = k_1, \ldots, N_{t_n} = k_n] \\
&= \mathbb{P}[N_{t_1} = k_1, N_{t_2} - N_{t_1} = k_2 - k_1, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1}] \\
&\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}[N_{t_\ell} - N_{t_{\ell-1}} = k_\ell - k_{\ell-1}]
\end{aligned}$$

  mit $N_{t_\ell} - N_{t_{\ell-1}} \sim \mathrm{Poi}(a\cdot(t_\ell - t_{\ell-1}))$.

- „$\Leftarrow$“: Nehmen wir an, dass (1) gilt. Für $n = 2$, $0 \leq t_1 = s < t_2 = t$ und $k \in \mathbb{N}_0$ erhalten wir aus (1):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[N_t - N_s = k] &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{P}[N_t - N_s = k, N_s = \ell] = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{P}[N_t = \ell + k, N_s = \ell] \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(a\cdot s)^\ell}{\ell!} \cdot e^{-a\cdot s} \cdot \frac{(a\cdot(t-s))^k}{k!} \cdot e^{-a\cdot(t-s)} \\
&= \frac{(a\cdot(t-s))^k}{k!} \cdot e^{-a\cdot(t-s)}
\end{aligned}$$

  also $N_t - N_s \sim \mathrm{Poi}(a\cdot(t-s))$. Unabhängigkeit der Zuwächse:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[N_{t_1} = k_1, N_{t_2} - N_{t_1} = k_2 - k_1, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1}] \\
&= \mathbb{P}[N_{t_1} = k_1, N_{t_2} = k_2, \ldots, N_{t_n} = k_n] \\
&\overset{(1)}{=} \prod_{\ell=1}^{n} \frac{(a\cdot(t_\ell - t_{\ell-1}))^{k_\ell - k_{\ell-1}}}{(k_\ell - k_{\ell-1})!} \cdot e^{-a\cdot(t_\ell - t_{\ell-1})} \\
&= \prod_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}[N_{t_\ell} - N_{t_{\ell-1}} = k_\ell - k_{\ell-1}]
\end{aligned}$$

3.4.8 Aufgabe

(i). Zeigen Sie, dass

$$\int_A 1\,dx = \frac{t^n}{n!} \qquad (t \in [0,\infty))$$

wobei

$$A = A_t^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \forall k : x_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n} x_k \leq t \right\}$$

(ii). Zeigen Sie, dass

$$\int_B 1\,dx = \frac{(t-s)^n}{n!} \qquad (0 \le s \le t)$$

wobei

$$B = B^n_{t,s} := A^n_t \cap \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 \ge s\}$$

(iii). Seien $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ mit $t_k \in \mathbb{R}$, $0 = m_0 \le m_1 < \ldots < m_n$ mit $m_k \in \mathbb{N}_0$. Sei

$$\begin{aligned} B := B^{m_1,\ldots,m_n}_{t_1,\ldots,t_n} := \Bigg\{ &(x_1,\ldots,x_{m_n}) \in \mathbb{R}^{m_n}; \forall k : x_k \ge 0, \forall k \le n : \sum_{j=1}^{m_k} \le t_k, \\ &\forall k \le n-1 : \sum_{j=1}^{m_{k+1}} x_j > t_k \Bigg\} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\int_B 1\, d(x_1,\ldots,x_{m_n}) = \prod_{\ell=1}^{n} \frac{(t_\ell - t_{\ell-1})^{k_\ell - k_{\ell-1}}}{(k_\ell - k_{\ell-1})!}$$

Hinweis:

(i). vollständige Induktion

(ii). durch Substitution auf (i) zurückführen

(iii). vollständige Induktion, der Fall $n = 1$ ist (ii)

3.4.9 Satz: Existenzsatz

Sei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen, die exponentialverteilt mit dem Parameter $a > 0$ sind. Dann wird durch

$$N_t(w) := \sup\left\{ n \in \mathbb{N}; \sum_{j=1}^{n} U_j(w) \le t \right\} \qquad (t \in [0,\infty), w \in \Omega)$$

ein Poisson-Prozess mit der Intensität a definiert.

Beweis:

- Nach Aufgabe 3.4.6 ist N ein Zählprozess, sodass nur noch 3.4.2(ii),(iii) zu zeigen sind. Die U's sind die Aufenthaltszeiten. Seien

  $$s_k := \sum_{j=1}^{k} U_j$$

  die zugehörigen Ersteintrittszeiten. Der Zufallsvektor $U := (U_1,\ldots,U_n)$ besitzt die Dichte

  $$\begin{aligned} p_U(u_1,\ldots,u_n) &= \prod_{j=1}^{n} a \cdot e^{-a\cdot u_j} \cdot 1_{[0,\infty)}(u_j) \\ &= a^n \cdot \exp\left(-a \cdot \sum_{j=1}^{n} u_j\right) \cdot \prod_{j=1}^{n} 1_{[0,\infty)}(u_j) \end{aligned} \tag{3.1}$$

  Seien nun $0 < k_1 < \ldots < k_n$ ($k_j \in \mathbb{N}$) und $0 < t_1 < \ldots < t_n$ ($t_j \in \mathbb{R}$),

  $$A := \left\{ (u_1,\ldots,u_{k_n+1}); \forall \ell = 1,\ldots,n : \sum_{j=1}^{k_\ell} u_j \le t_\ell \le \sum_{j=1}^{k_\ell+1} u, \forall j = 1,\ldots,u_{k_n+1} : u_j \ge 0 \right\}$$

Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
P_k^t &:= \mathbb{P}[N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n] = \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=1}^{n} [s_{k_\ell} \le t_\ell \le s_{k_\ell+1}]\right) \\
&= \mathbb{P}[U \in A] = \int_A p_U(u_1, \dots, u_{k_n+1}) d(u_1, \dots, u_{k_n+1}) \\
&= \int_B \left(\int_{u_{k_n+1} = t_n - \sum_{j=1}^{k_n} u_j} p_U(u_1, \dots, u_{k_n+1})\, du_{k_n+1} \right) d(u_1, \dots, u_{k_n})
\end{aligned}
$$

wobei

$$
B := \left\{ (u_1, \dots, u_{k_n}); \forall \ell = 1, \dots, n-1 : \sum_{j=1}^{k_\ell} u_j \le t_\ell < \sum_{j=1}^{k_\ell+1} u_j, \sum_{j=1}^{k_n} u_j \le t_n, \forall j = 1, \dots, k_n : u_j \ge 0 \right\}
$$

Aus (1) folgt, dass das innere Integral gleich $a^{k_n} \cdot e^{-a \cdot t_n}$. Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
P_k^t &= a^{k_n} \cdot e^{-a \cdot t_n} \cdot \int_B 1 d(u_1, \dots, u_{k_n}) \\
&\overset{3.4.8(iii)}{=} a^{k_n} \cdot e^{-a \cdot t_n} \cdot \prod_{\ell=1}^{n} \frac{(t_\ell - t_{\ell-1})^{k_\ell - k_{\ell-1}}}{(k_\ell - k_{\ell-1})!} \\
&= \prod_{\ell=1}^{n} \frac{(a \cdot (t_\ell - t_{\ell-1}))^{k_\ell - k_{\ell-1}}}{(k_\ell - k_{\ell-1})!} \cdot e^{-a \cdot (t_\ell - t_{\ell-1})}
\end{aligned}
$$

wobei $t_0 := k_0 := 0$. Nach Satz 3.4.7 ist N ein Poisson-Prozess mit der Intensität a.

3.4.10 Bemerkung

- Eine Zufallsgröße X besitzt eine Gamma-Verteilung mit den Parametern $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, wenn sie die Dichte
$$
p(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot 1_{[0,\infty)}(x)
$$
besitzt. Die charakteristische Funktion ist
$$
f(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\imath t}{\alpha}\right)^\lambda} \qquad (t \in \mathbb{R})
$$
(Ohne Beweis, Funktionentheorie) Spezialfälle:
  (i). $\lambda = 1$: Exponentialverteilung
  (ii). $\lambda \in \mathbb{N}$: Erlang-Verteilung
  (iii). $\lambda = \frac{n}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\alpha = \frac{1}{2}$: χ^2-Verteilung
- Die Ersteintrittszeiten des Poisson-Prozesses aus Satz 3.4.9 sind Erlang-verteilt, da die Aufenthaltszeiten exponentialverteilt sind.
- Wir zeigen (vielleicht) später, dass die Aufenthaltszeiten eines beliebigen Poisson-Prozesses exponentialverteilt sein müssen.

3.5 Integration bzgl. endlicher Maße

In diesem Abschnitt: $T \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Borel-Menge, $Z : T \to L^2(\mathbb{P}) := L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ stark stetig. C sei die Korrelationsfunktion von Z (Ist stetig, da Z stark stetig.). μ sei ein endliches Borelmaß auf T.

Bemerkung:

(i). μ kann auch ein signiertes Maß oder sogar ein komplexes Maß sein (siehe Anhang). Für diese Vorlesung reichen nichtnegative Maße. In einigen Sätzen werden wir $|\mu|$ werden, damit sie auch für signierte bzw. komplexe Maße gelten.

Wir wollen Integrale der folgenden Form definieren:

$$\int_T Z(t)\, d\mu(t) \in L^2$$

zum Beispiel

$$\int_a^b Z(t)\, dt$$

für $d = 1$.

3.5.1 Definition

Nehmen wir an, dass die Funktion

$$t \mapsto (Z(t), h)$$

für jedes $h \in L^2(\mathbb{P})$ bzgl. μ integrierbar ist. Existiert ein Element $I(Z) \in L^2(\mathbb{P})$ mit

$$\int_T (Z(t), h)\, d\mu(t) = (I(Z), h) \tag{1}$$

so heißt Z integrierbar bzgl. μ oder μ-integrierbar.

Bezeichnungen:

(i).

$$I(Z) = \int_T Z(t)\, d\mu(t) = \int Z\, d\mu$$

Es gilt also

$$\int_T (Z(t), h)\, d\mu(t) = \left(\int_T Z(t)\, d\mu, h \right) \tag{2}$$

für alle $h \in L^2(\mathbb{P})$.

(ii). Ist $S \subseteq T$ eine Borel-Menge, so sei

$$\int_S Z(t)\, d\mu(t) := \int_T 1_S(t) \cdot Z(t)\, d\mu(t)$$

(iii). Ist f eine lebesgue-messbare Funktion auf T, so sei

$$\int_T Z(t) \cdot f(t)\, dt := \int_T Z(t)\, d\mu(t)$$

wobei $d\mu(t) := f(t)\, dt$.

3.5.2 Lemma

Unter der Annahme, dass die Integrale existieren, gilt:

(i). $\int_T (aX + bY)\, d\mu = a \int_T X\, d\mu + b \int_T Y\, d\mu$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$

(ii). $\int Z\, d(\mu + \nu) = \int_T Z\, d\mu + \int_T Z\, d\nu$

(iii). $\int_{S_1 \dot\cup S_2} Z\, d\mu = \int_{S_1} Z\, d\mu + \int_{S_2} Z\, d\mu$, wenn $S_1, S_2 \subseteq T$ disjunkte Borelmengen sind.

(iv). Ist $Z(t) = h_0$ für alle t, so ist

$$\int_T Z(t)\, d\mu(t) = \mu(T) \cdot h_0$$

Beweis: Folgt aus der Definition.

3.5.3 Satz

Das Feld Z ist genau dann μ-integrierbar, wenn $t \mapsto (Z(t), h)$ für jedes $h \in L^2(\mathbb{P})$ bzgl. μ integrierbar ist und eine Konstante K existiert mit

$$\forall h \in L^2(\mathbb{P}) : \left| \int_T (Z(t), h)\, \mu(dt) \right| \le K \cdot \|h\|_2 \tag{1}$$

existiert. Gilt

$$\int_T \|Z(t)\|_2 \, d|\mu|(t) < \infty \tag{2}$$

so ist Z bzgl. μ integrierbar und

$$\left\| \int_T Z(t)\, d\mu(t) \right\|_2 \le \int_T \|Z(t)\|_2 \, d\|\mu|(t) \tag{3}$$

Beweis:

- „$\Rightarrow$“: Ist Z μ-integrierbar, so gilt (1) mit $K := \|\int Z\, d\mu\|_2$. Das folgt aus der Definition des Integrals und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.
- „$\Leftarrow$“: Nehmen wir jetzt an, dass (1) gilt. Dann ist

  $$h \mapsto \int_T (h, Z(t))\, d\bar{\mu}(t)$$

  ein beschränktes lineares Funktional auf $L^2(\mathbb{P})$. Nach dem Satz von Darstellungssatz von Riesz-Fréchet (G.8) gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $I \in L^2(\mathbb{P})$, sodass

  $$\int_T (h, Z(t))\, d\bar{\mu}(t) = (h, I) \qquad (h \in L^2(\mathbb{P}))$$

  d.h.

  $$\int_T (Z(t), h)\, d\mu(t) = (I, h)$$

- Sei schließlich (2) erfüllt. Dann gilt:

  $$\left| \int_T (Z(t), h)\, d\mu(t) \right| \le \int |(Z(t), h)|\, d|\mu|(t) \overset{\text{CSU}}{\le} \|h\|_2 \cdot \int_T \|Z(t)\|_2 \, d|\mu|(t)$$

  Nach dem ersten Teil des Beweises ist Z μ-integrierbar. Die linke Seite der obigen Ungleichung ist

  $$\left| \left(\int Z\, d\mu, h \right) \right|$$

  Wir setzen $h = \int Z\, d\mu$, dann folgt (3).

3.5.4 Beispiele

(i). Sei $\mu := \sum_{j=1}^n c_j \cdot \delta_{t_j}$ mit $c_j \in \mathbb{C}$, $t_j \in T$ ein diskretes Maß mit endlichem Träger. (Anmerkung: Dann beliebiges $f : T \to \mathbb{C}$ μ-integrierbar und

$$\int f\, d\mu = \sum_{j=1}^n c_j \cdot f(t_j)$$

Dann ist

$$\int_T (Z(t), h)\, d\mu(t) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot (Z(t_j), h) = \Bigg(\underbrace{\sum_{j=1}^n c_j \cdot Z(t_j)}_{\in L^2(\mathbb{P})}, h \Bigg)$$

$$\Rightarrow \int_T Z(t)\, d\mu(t) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot Z(t_j)$$

Weiterhin gilt:

$$\left\| \int Z\,d\mu \right\|_2^2 = \left\| \sum_{j=1}^n c_j \cdot Z(t_j) \right\|_2^2 = \left(\sum_{j=1}^n c_j \cdot Z(t_j), \sum_{k=1}^n c_k \cdot Z(t_k) \right)$$
$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \cdot \bar{c}_k \cdot C(t_j, t_k) \tag{1}$$

(ii). Sei $Z(t) = f(t) \cdot X$ für $t \in T := [a,b]$, wobei f eine stetige Funktion auf T ist und $X \in L^2(\mathbb{P})$. Dann ist Z stark stetig und es gilt

$$\int_a^b (Z(t), h)\,d\mu(t) = \int_a^b (f(t) \cdot X, h)\,d\mu(t) = (X, h) \cdot \int_a^b f(t)\,d\mu(t)$$
$$= \left(\int_a^b f(t)\,d\mu(t) \cdot X, h \right)$$
$$\Rightarrow \int_a^b Z(t)\,d\mu(t) = X \cdot \int_a^b f(t)\,dt$$

Allgemeiner:

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^n f_j(t) \cdot X_j \right) d\mu(t) \overset{3.5.2(i)}{=} \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(t) \cdot X_j\,d\mu(t)$$
$$= \sum_{j=1}^n \left(\int_a^b f_j(t)\,d\mu(t) \right) \cdot X_j$$

3.5.5 Satz

Ist Z bzgl. μ und ν integrierbar, so ist C auf $T \times T$ bzgl. $\mu \times \bar{\nu}$ integrierbar und es gilt

$$\left(\int_T Z\,d\mu, \int_T Z\,d\nu \right) = \int_{T\times T} C(t,s)\,d(\mu \times \bar{\nu})(t,s) \tag{1}$$

Insbesondere ist

$$\left\| \int Z\,d\mu \right\|_2^2 = \int_{T\times T} C(t,s)\,d(\mu \times \bar{\mu})(t,s) \tag{2}$$

Das Integral auf der rechten Seite ist also nichtnegativ.

Beweis:

- 3.5.1(2) mit $h = \int Z\,d\nu$:

$$\left(\int_T Z\,d\mu, \int_T Z\,d\nu \right) = \int_T \left(Z(t), \int_T Z\,d\nu \right) d\mu(t) \tag{*}$$

Dieselbe Gleichung zeigt mit $h = Z(t)$ (die Integrationsvariable wird durch s ersetzt):

$$\left(Z(t), \int_T Z(s)\,d\nu(s) \right) = \overline{\int_T (Z(s), Z(t))\,d\nu(s)} = \int_T C(t,s)\,d\bar{\nu}(s)$$

In $(*)$ folgt:

$$\left(\int_T Z\,d\mu, \int_T Z\,d\nu \right) = \int_T \int_T C(t,s)\,d\bar{\nu}(s)\,d\mu(t)$$
$$\overset{\text{Fub}}{=} \int_{T\times T} C(t,s)\,d(\mu \times \bar{\nu})(t,s)$$

also (insbesondere) Integrierbarkeit bzgl. $\mu \times \bar{\nu}$.

3.5.6 Satz

Das Feld Z ist genau dann μ-integrierbar, wenn C auf $T \times T$ $\mu \times \bar{\mu}$-integrierbar ist.

Beweis:

- „$\Rightarrow$“: Satz 3.5.5
- „$\Leftarrow$“: Nehmen wir an, dass C bzgl. $\mu \times \bar{\mu}$ integrierbar ist. Sei $h \in L^2(\mathbb{P})$, $h \neq 0$. Wir setzen

$$\begin{aligned} f_h(t) &:= (Z(t), h) \\ Z_h(t) &:= Z(t) - \frac{f_h(t)}{\|h\|_2^2} \cdot h \qquad (t \in T) \end{aligned}$$

Dann ist $(Z_h(t), h) = 0$ und somit

$$\begin{aligned} C(t,s) = (Z(t), Z(s)) &= \left(Z_h(t) + \frac{f_h(t)}{\|h\|_2^2} \cdot h, Z_h(s) + \frac{f_h(s)}{\|h\|_2^2} \cdot h \right) \\ &= (Z_h(t), Z_h(s)) + \frac{1}{\|h\|_2^2} \cdot f_h(t) \cdot \overline{f_h(s)} \end{aligned}$$

Sei $\varnothing \neq S \subseteq T$ kompakt. Wegen der Stetigkeit sind

$$t \mapsto \|Z(t)\|_2 t \mapsto \|Z_h(t)\|_2$$

beschränkt auf S. Die Einschränkungen von Z und Z_h auf S sind also integrierbar bzgl. eines beliebigen endlichen Maßes nach 3.5.3. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \int_S \int_S C(t,s)\, d\mu(t)\, d\bar{\mu}(s) &= \underbrace{\int_S \int_S (Z_h(t), Z_h(s))\, d\mu(t)\, d\bar{\mu}(s)}_{\overset{3.5.5}{\geq} 0} \\ &\quad + \frac{1}{\|h\|_2^2} \int_S \int_S f_h(t) \cdot \overline{f_h(s)}\, d\mu(t)\, d\bar{\mu}(s) \\ &\geq \frac{1}{\|h\|_2^2} \cdot \left| \int_S f_h(t)\, d\mu(t) \right|^2 \\ \Rightarrow \left| \int_S f_h(t)\, d\mu(t) \right| &\leq \left(\int_{T \times T} |C(t,s)|\, d(\mu \times \bar{\mu})(t,s) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|h\|_2 \end{aligned}$$

Aus (H.15) folgt hieraus, dass f_h auf T bzgl. μ integrierbar ist und die obige Ungleichung erhalten bleibt, wenn S durch T ersetzt wird. Nach 3.5.3 ist Z integrierbar.

3.5.7 Satz

Ist Z μ-integrierbar, so existiert eine Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Maßen mit endlichem Träger, die schwach gegen μ konvergiert, und

$$\int_T Z\, d\mu = L^2 - \lim_{n \to \infty} \int_T Z\, d\mu_n \tag{1}$$

Bemerkung:

$$\begin{aligned} \mu_n \to \mu \text{ schwach} &:\Leftrightarrow \forall f \in C_b : \int f\, d\mu_n \to \int f\, d\mu \\ &\overset{\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} F_n(x) \to F(x) \text{ in jedem Stetigkeitspunkt von F} \end{aligned}$$

Beweis:

- Nach (H.4) existiert eine Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Maßen mit endlichem Träger ($\subseteq T$), die schwach gegen μ konvergieren.

(i). Ist T kompakt, so ist die (stetige) Funktion C beschränkt und damit integrierbar bzgl. eines beliebigen endlichen Maßes auf $T \times T$. Nach 3.5.5(2):

$$\begin{aligned}\left\| \int Z\, d\mu - \int Z\, d\mu_n \right\|_2^2 &= \left\| \int Z\, d(\mu - \mu_n) \right\|_2^2 \\ &= \int_{T\times T} C\, d(\mu - \mu_n) \times \overline{(\mu - \mu_n)}\end{aligned}$$

Nach (H.10) konvergiert $(\mu - \mu_n) \times \overline{(\mu - \mu_n)}$ schwach gegen 0, d.h. die rechte Seite konvergiert gegen 0, da $C \in C_b(T \times T)$.

(ii). Ist T nicht kompakt, so können wir für jedes $\varepsilon > 0$ T zerlegen als $T = T_b \dot\cup T_u$ mit T_b kompakt und

$$\int_{T_u \times T_u} C d(\mu \times \bar\mu) < \varepsilon$$

(Integral nichtnegativ wegen 3.5.5(2)) Wir erhalten

$$\left\| \int_T Z\, d\mu - \int_{T_b} Z\, d\mu \right\|_2^2 = \left\| \int_{T_u} Z\, d\mu \right\|_2^2 = \int_{T_u \times T_u} C\, d(\mu \times \bar\mu) < \varepsilon$$

Da wir die Aussage für T_b gezeigt haben, gilt sie somit auch für T.

3.5.8 Folgerung

Ist Z ein μ_j-integrierbares Gauß-Feld für $j = 1, \ldots, d$, so ist

$$\left(\int Z\, d\mu_1, \ldots, \int Z\, d\mu_d \right)$$

ein Gaußscher Zufallsvektor.

Beweis: Aufgabe. (Hinweis: 3.5.7)

3.5.9 Satz: Newton-Leibnitz-Formel für Felder

Sei $T = (a, b)$ mit $-\infty \le a < b \le \infty$ und $t_0 \in (a, b)$.

(i). Ist C zweimal stetig differenzierbar, so gilt

$$Z(t) = Z(t_0) + \int_{t_0}^t Z'(s)\, ds \qquad (t \in (a, b))$$

(ii). Ist C stetig, so gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t Z(s)\, ds = Z(t) \qquad (t \in (a, b))$$

Beweis:

(i). Nach 3.3.5 und 3.3.6 ist Z stark differenzierbar und Z' ist stark stetig. Wegen der Stetigkeit ist Z' bzgl. des Lebegue-Maßes auf $[t_0, t]$ integrierbar. Für jedes $h \in L^2(\mathbb{P})$ ist die Funktion $t \mapsto (Z(t), h)$ stetig differenzierbar (s. 3.3.5), die klassische Newton-Leibnitz-Formel also anwendbar:

$$\begin{aligned}(Z(t), h) &= (Z(t_0), h) + \int_{t_0}^t \underbrace{\frac{d}{ds}(Z(s), h)}_{\overset{3.3.5}{=}(Z'(s), h)}\, ds \\ &= (Z(t_0), h) + \left(\int_{t_0}^t Z'(s)\, ds, h \right) = \left(Z(t_0) + \int_{t_0}^t Z'(s)\, ds, h \right) \\ \Rightarrow Z(t) &= Z(t_0) + \int_{t_0}^t Z'(s)\, ds\end{aligned}$$

(ii). Sei $t \in (a,b)$. Wir zeigen, dass

$$\frac{1}{h} \cdot \left(\int_{t_0}^{t+h} Z(s)\,ds - \int_{t_0}^{t} Z(s)\,ds \right) = \frac{1}{h} \int_{t}^{t+h} Z(s)\,ds$$

gegen $Z(t)$ konvergiert für $h \to 0$.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} Z(s)\,ds - Z(t) \right\|_2 &= \frac{1}{|h|} \cdot \left\| \int_t^{t+h} (Z(s) - Z(t))\,ds \right\|_2 \\ &\leq \frac{1}{|h|} \cdot \int_{[t,t+h]} \|Z(s) - Z(t)\|_2\,ds \\ &\leq \sup_{s \in [t,t+h]} \|Z(s) - Z(t)\|_2 \to 0 \qquad (h \to 0) \end{aligned}$$

da $s \mapsto Z(s)$ stetig in t.

3.5.10 Aufgabe

Seien Z und $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stark stetige Felder auf $T \subseteq \mathbb{R}^d$ so, dass

$$\forall t \in T : L^2 - \lim_{n \to \infty} Z_n(t) = Z(t)$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig auf T ist. Dann gilt:

$$L^2 - \lim_{n \to \infty} \int Z_n(t)\,d\mu(t) = \int Z(t)\,d\mu(t)$$

3.5.11 Aufgabe

Sei $Z(t) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot X_n$ das stark stetige Feld aus 3.3.3(i) mit $a_n = 1$. Es gelte

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty \cdot \|X_n\|_2 < \infty$$

Zeigen Sie, dass

$$\int Z(t)\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n\,d\mu(t) \right) \cdot X_n$$

Hinweis: Aufgabe 3.5.10

3.5.12 Bemerkungen

(i). Sei $Z : T \to \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein messbares Zufallsfeld, d.h.

$$(t,w) \mapsto Z(t,w)$$

ist messbar bzgl. $(\mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$. Ist

$$\int_T \int_\Omega |Z(t,w)|\,d\mathbb{P}(w)\,dt < \infty$$

dann sind nach dem Satz von Fubini $\mathbb{P}$-fast alle Trajektorien von Z Lebesgue-integrierbar und

$$w \mapsto \int_T Z(t,w)\,dt$$

ist eine Zufallsgröße. (Wo das Integral nicht existiert, setzen wir den Wert z.B. auf 0.) In diesem Fall kann man das Integral als diese Zufallsgröße definieren.

(ii). Das Integral $\int_T Z(t)\,d\mu(t)$ lässt sich auch so einführen wie das Lebesgue- oder Riemann-Integral für skalare Funktionen.

3.6 Orthogonale Reihenentwicklung

In diesem Abschnitt: $I = [a,b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$. $\mathcal{L}^2(a,b)$ Raum der quadrat-integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$, $L^2(a,b)$ der zugehörige Hilbertraum.

3.6.1 Definition

Sei $C : I \times I \to \mathbb{C}$ ein stetiger Kern und $\lambda \in \mathbb{C}$. Eine Funktion $\varphi \in \mathcal{L}^2(a,b)$ heißt Eigenfunktion von C zum Eigenwert λ, wenn $\varphi \neq 0$ und

$$\forall t \in [a,b] : \int_a^b C(t,s) \cdot \varphi(s), ds = \lambda \cdot \varphi(t)$$

Aufgabe: Eine Eigenfunktion φ ist stetig, wenn $\lambda \neq 0$.

3.6.2 Satz von Mercer

Sei $C : I \times I \to \mathbb{C}$ ein stetiger positiv semidefiniter Kern. Dann existiert eine orthonormale Basis $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{L}^2(a,b)$, die aus Eigenfunktionen von C besteht. Die zugehörigen Eigenwerte λ_n sind nichtnegativ und φ_n stetig, wenn $\lambda \neq 0$. Weiterhin gilt:

$$C(t,s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \cdot \varphi_n(t) \cdot \overline{\varphi_n(s)} \qquad (t,s \in I)$$

wobei die Reihe auf $I \times I$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Ohne Beweis (Funktionalanalysis)

3.6.3 Satz: Karhunen-Loève-Zerlegung

Es sei $Z : I \to L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein stark stetiges Feld mit Korrelationsfunktion C. Dann besitzt Z die Zerlegung

$$Z(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{\lambda_n} \cdot \varphi_n(t) \cdot X_n \qquad (t \in I) \tag{1}$$

wobei

(i). Die Zahlen λ_n sind die von 0 verschiedenen Eigenwerte von C, die Funktionen φ_n die zugehörigen Eigenfunktionen der Norm 1.

(ii).
$$X_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot \int_a^b Z(s) \cdot \overline{\varphi_n(s)}\, ds$$

(iii). Die X_n's bilden ein orthonormiertes System in $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

(iv). Die Reihe (1) konvergiert gleichmäßig auf I.

Umgekehrt: Sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lambda_n > 0$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein orthonormiertes System in $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Weiterhin sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein orthonormiertes System von stetigen Funktionen in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ so, dass die Reihe in (1) gleichmäßig konvergiert. Dann definiert diese Reihe ein Feld zweiter Ordnung, die Funktion φ_n ist eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ_n der zugehörigen Korrelationsfunktion $(n \in \mathbb{N})$.

Beweis:

- Ist X_n durch (ii) definiert (Satz von Mercer: Existenz + Orthonormiertheit der Eigenfunktionen), so gilt nach 3.5.5:

$$\begin{aligned}
(X_n, X_m) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n \cdot \lambda_m}} \cdot \left(\int_a^b Z(t) \cdot \overline{\varphi_n(t)}\, dt, \int_a^b Z(s) \cdot \overline{\varphi_n(s)}\, ds \right) \\
&\overset{3.5.5}{=} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n \cdot \lambda_m}} \cdot \int_a^b \int_a^b C(t,s) \cdot \overline{\varphi_n(t)} \cdot \varphi_m(s)\, ds\, dt \\
&\overset{3.6.1}{=} \frac{\lambda_m}{\sqrt{\lambda_n \cdot \lambda_m}} \cdot \underbrace{\int_a^b \overline{\varphi_n(t)} \cdot \varphi_m(t)\, dt}_{\delta_{nm}} = \delta_{nm}
\end{aligned}$$

  also (iii) gezeigt.

- Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
(Z(t), X_n) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot \left(Z(t), \int_a^b Z(s) \cdot \overline{\varphi_n(s)}\, ds \right) \\
&\overset{3.5.1(2)}{=} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot \overline{\int_a^b (Z(s), Z(t)) \cdot \overline{\varphi_n(s)}\, ds} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot \int_a^b C(t,s) \cdot \varphi_n(s)\, ds = \sqrt{\lambda_n} \cdot \varphi_n(t)
\end{aligned}$$

  Daraus folgt:

$$\left\| Z(t) - \sum_{n=1}^{k} \sqrt{\lambda_n} \cdot \varphi_n(t) \cdot X_n \right\|_2^2 = C(t,t) - \sum_{n=1}^{k} \lambda_n \cdot |\varphi_n(t)|^2$$

  Nach Satz 3.6.2 gilt deshalb (iv).

- Umkehrung: Nehmen wir jetzt an, dass (1) gilt. Dann ist die Korrelationsfunktion C gegeben durch

$$C(t,s) = (Z(t), Z(s)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \cdot \varphi_n(t) \cdot \overline{\varphi_n(s)}$$

  wobei die Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert.

$$\begin{aligned}
\int_a^b C(t,s) \cdot \varphi_k(s)\, ds &= \int_a^b \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \cdot \varphi_n(t) \cdot \overline{\varphi_n(s)} \cdot \varphi_k(s)\, ds \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \cdot \varphi_n(t) \cdot \underbrace{\int_a^b \overline{\varphi_n(s)} \cdot \varphi_k(s)\, ds}_{\delta_{nk}} = \lambda_k \cdot \varphi_k(t)
\end{aligned}$$

3.6.4 Bemerkung

- Ist Z ein Gauß-Feld, so sind die X_n's normalverteilt nach 3.5.8 und unabhängig (da unkorreliert).
- Ist $\mathbb{E}Z(t) = 0$ für alle t, so ist auch $\mathbb{E}X_n = (X_n, 1) = 0$. Das folgt aus 3.6.3(ii) und den Eigenschaften des Integrals. In diesem Fall konvergiert die Reihe 3.6.3(1) nach (A.5) sogar fast sicher:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{V}(\sqrt{\lambda_n} \cdot \varphi_n(t) \cdot X_n) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \cdot (\varphi_n(t) \cdot X_n, \varphi_n(t) \cdot X_n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \cdot |\varphi_n(t)|^2 = C(t,t) < \infty
\end{aligned}$$

- Die Bestimmung von Eigenfunktionen und Eigenwerten ist im Allgemeinen nicht einfach.

3.6.5 Beispiel

- Wir betrachten einen Wiener Prozess W auf dem Intervall $I = [0,T]$. Dann ist $C(t,s) = \min\{t,s\}$. Eigenfunktionen von C:

$$\int_0^T C(t,s)\cdot\varphi(s)\,ds \overset{!}{=} \lambda\cdot\varphi(t) \qquad (0 \le t \le T, \lambda \neq 0)$$

  C einsetzen:

$$\int_0^t s\cdot\varphi(s)\,ds + t\cdot\int_t^T \varphi(s)\,ds \overset{!}{=} \lambda\cdot\varphi(t)$$

  also $\varphi(0) = 0$.

- Die linke (und damit auch die rechte) Seite ist nach t differenzierbar (Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung). Ableiten:

$$t\cdot\varphi(t) + \int_t^T \varphi(s)\,ds - t\cdot\varphi(t) \overset{!}{=} \lambda\cdot\varphi'(t)$$

$$\Rightarrow \int_t^T \varphi(s)\,ds \overset{!}{=} \lambda\cdot\varphi'(t)$$

  also $\varphi'(T) = 0$. Erneute Differentiation nach t:

$$-\varphi(t) \overset{!}{=} \lambda\cdot\varphi''(t)$$

  Differentialgleichung 2. Ordnung, linear mit konstanten Koeffizienten.

- Lösung mit $\varphi(0) = 0$:

$$\varphi(t) = A\cdot\sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

  Aus $\varphi'(T) \overset{!}{=} 0$ folgt:

$$\frac{A}{\sqrt{\lambda}}\cdot\cos\left(\frac{T}{\sqrt{\lambda}}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{T^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\pi^2} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

- Schließlich setzen wir $A = \sqrt{\frac{2}{T}}$, dann gilt $\|\varphi_n\|_2 = 1$. Also:

$$\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cdot\sin\left(\frac{t}{T}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi\right)$$

  Damit folgt:

$$W(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{2T}\cdot\frac{\sin\left(\frac{t}{T}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi}\cdot W_n^T \qquad (0 \le t \le T)$$

  wobei W_n^T unabhängig und standardnormalverteilt sind. Die Reihe konvergiert fast sicher.

3.6.6 Beispiel

Seien $Y_1,\dots,Y_n \in L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ unkorrelierte Zufallsgrößen mit $\mathbb{E}Y_j = 0$ und Standardabweichung $\sigma_j^2 > 0$. Weiterhin seien $k_1,\dots,k_n \in \mathbb{N}$ mit $k_i \neq k_j$ für $i \neq j$. Definiere

$$Z(t) := \sum_{j=1}^n e^{\imath\,t\cdot k_j}\cdot Y_j \qquad (t \in [0,2\pi])$$

Korrelationsfunktion:

$$\begin{aligned} C(t,s) = (Z(t), Z(s)) &= \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 \cdot e^{\imath\, t\cdot k_j} \cdot e^{-\imath\, s\cdot k_j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 \cdot e^{\imath\, k_j \cdot (t-s)} \qquad (t \in [0, 2\pi]) \end{aligned}$$

Bestimmung der Eigenwerte/Eigenfunktionen von C: Die Funktionen

$$\varphi_j(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\imath\, t\cdot k_j} \qquad (t \in [0, 2\pi])$$

bilden ein orthonormiertes System in $L^2(0, 2\pi)$. Wir setzen $X_j := \frac{Y_j}{\sigma_j}$, dann ist $(X_j)_{j=1,\ldots,n}$ ein orthonormiertes System in $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und es gilt

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{2\pi} \cdot \sigma_j \cdot \varphi_j(t) \cdot X_j$$

φ_j ist Eigenfunktion von C zum Eigenwert $2\pi \cdot \sigma_j^2$ (s. Satz 3.6.3).

3.7 Reguläre und singuläre Felder

In diesem Abschnitt: Z ein Feld zweiter Ordnung auf $T = \mathbb{R}$, $T = [0, \infty)$, $T = \mathbb{Z}$ oder $T = \mathbb{N}_0$. (Ordnung auf T notwendig.)

3.7.1 Definition

Mit $H(Z,t)$, $t \in T$, bezeichnen wir den Unterraum von $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, der durch die Zufallsgrößen $Z_s, s \leq t$, erzeugt wird. Kurz:

$$H(Z,t) = \operatorname{clsp}\{Z(s); s \leq t\}$$

Weiterhin sei

$$H(Z, -\infty) := \bigcap_{t\in T} H(Z,T)$$

Bemerkungen:

(i). clsp: closed linear span

(ii). Anschaulich: $H(Z,t)$ enthält alle Informationen über die Vergangenheit von Z bis zum Zeitpunkt t. $H(Z,-\infty)$ enthält die Informationen aus der „unendlich fernen Vergangenheit“ von Z.

(iii). Offenbar gilt

$$\{0\} \subseteq H(Z,-\infty) \subseteq H(Z,s) \leq H(Z,t) \subseteq H(Z)$$

für $s, t \in T$, $s \leq t$.

Extremfälle:

- Im Fall $H(Z,-\infty) = H(Z)$ heißt Z deterministisch oder singulär. Anschaulich: Jede Information ist bereits in unendlich ferner Vergangenheit enthalten.
- Im Fall $H(Z,-\infty) = \{0\}$ heißt Z vollständig nicht deterministisch oder regulär. Anschaulich: Jede Information entsteht als Innovation zu einem bestimmten Zeitpunkt.

Bemerkung:

(i). Im Fall $Z = 0$, und nur dann, ist $H(Z) = \{0\}$. Also Z regulär und singulär.

3.7.2 Satz von Cramér

Der Prozess Z lässt sich in der Form

$$Z(t) = X(t) + Y(t) \qquad (t \in T) \tag{1}$$

darstellen, wobei

(i). X und Y sind orthogonale Prozesse auf T.

(ii). $X(t), Y(t) \in H(Z,t)$ für alle $t \in T$

(iii). X ist singulär und Y ist regulär.

Die Zerlegung (1) ist durch (i)-(iii) eindeutig bestimmt.

Beweis:

- Wir betrachten die Zerlegung

$$H(Z) = H(Z,-\infty) \oplus H(Z,-\infty)^{\perp}$$

und sei (1) die zugehörige Zerlegung von $Z(t)$ mit $X(t) \in H(Z,-\infty)$, $Y(t) \in H(Z,-\infty)^{\perp}$ für $t \in T$.

(i). Folgt aus der Definition von X, Y

(ii). Wegen $X(t) \in H(Z,-\infty) \subseteq H(Z,t)$ folgt $Y(t) = Z(t) - X(t) \in H(Z,t)$.

(iii). Letztere Beziehung zeigt, dass $H(Y,t) \subseteq H(Z,t)$, also $H(Y,-\infty) \subseteq H(Z,-\infty)$. Andererseits ist $Y(t) \in H(Z,-\infty)^{\perp}$ nach Definition, also $H(Y,-\infty) \subseteq H(Z,-\infty)^{\perp}$. Es folgt $H(Y,-\infty) = \{0\}$, d.h. Y regulär.

Wegen $Z(t) = X(t) + Y(t)$ ist $H(Z,t) \subseteq H(X,t) \oplus H(Y,t)$. Aus (ii): $H(X,t) \oplus H(Y,t) \subseteq H(Z,t)$, also

$$H(Z,t) = H(X,t) \oplus H(Y,t)$$
$$\Rightarrow \forall t \in T : H(Z,-\infty) \subseteq H(X,t) \oplus H(Y,t)$$

Da aber $H(Y,t) \perp H(Z,-\infty)$ muss $H(X,t) \subseteq H(Z,-\infty)$ gelten, somit $H(X,t) = H(Z,-\infty)$. Folglich ist

$$H(X,t) = H(X) = H(X,-\infty) = H(Z,-\infty)$$

d.h. X ist deterministisch.

- Eindeutigkeit: Sei $Z(t) = X(t) + Y(t)$ eine Zerlegung mit (i)-(iii). Genauso wie im ersten Teil des Beweises zeigen wir, dass

$$H(Z,t) = H(X,t) \oplus H(Y,t) \qquad (t \in T)$$

Aus X deterministisch folgt

$$H(Z,t) = H(X,-\infty) \oplus H(Y,t) \tag{*}$$

Wegen Y regulär folgt mit $(*)$, (G.9):

$$H(X,-\infty) = H(Z,-\infty)$$

Wir erhalten

$$H(Z,t) = H(Z,-\infty) \oplus H(Y,t)$$

$X(t)$ ist also die orthogonale Projektion von $Z(t)$ auf $H(Z,-\infty)$. Die Komponente $X(t)$ und damit auch $Y(t)$ sind also eindeutig bestimmt.

3.7.3 Aufgabe

Sei Z ein Wiener-Prozess bzw. ein Poisson-Prozess auf $T = \mathbb{R}$ bzw. $T = [0, \infty)$. Was kann man über Regularität oder Irregularität aussagen?

Hinweis: Die Prozesse besitzen orthogonale Zuwächse.

3.8 Orthogonale zufällige Maße

In diesem Abschnitt: $T \neq \varnothing$ eine beliebige Menge, $(W, \mathcal{B})$ Meßraum.

3.8.1 Definition

Eine Abbildung $\zeta : \mathcal{B} \to L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ heißt ein zufälliges orthogonales Maß auf $\mathcal{B}$, wenn

(i). $\forall B, D \in \mathcal{B}$ mit $B \cap D = \varnothing$: $(\zeta(B), \zeta(D)) = 0$

(ii). Für beliebige paarweise disjunkte Mengen $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ gilt:

$$\zeta\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta(B_j)$$

Mit $H(\zeta)$ bezeichnen wir den Unterraum von $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, der durch die Zufallsgrößen $\zeta(B), B \in \mathcal{B}$, erzeugt wird. Die Abbildung $\sigma : \mathcal{B} \to [0, \infty)$ definiert durch

$$\sigma(B) := (\zeta(B), \zeta(B)) = \|\zeta(B)\|^2 \qquad (B \in \mathcal{B})$$

heißt das Strukturmaß von ζ.

3.8.2 Lemma

Ein beliebiges Strukturmaß σ ist ein endliches nichtnegatives Maß auf $\mathcal{B}$.

Beweis:

- $\sigma(\varnothing) = 0$ folgt aus (i) mit $B = D = \varnothing$.
- Seien $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ paarweise disjunkt. Dann sind nach 3.8.1(i) $\zeta(B_j)$ paarweise orthogonal und

$$\sigma\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \overset{\text{Def}}{=} \left\|\zeta\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)\right\|^2 \overset{3.8.1(ii)}{=} \left\|\sum_{j=1}^{\infty} \zeta(B_j)\right\|^2$$

$$\overset{\perp}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \|\zeta(B_j)\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma(B_j)$$

3.8.3 Bemerkung

- Man kann das zufällige orthogonale Maß auch so einführen, dass das Strukturmaß nicht endlich zu sein braucht. Eine mögliche Vorgehensweise ist:

  Man gibt ein beliebiges nichtnegatives Maß σ auf $\mathcal{B}$ vor. Sei $\mathcal{B}_0$ die Familie aller Mengen aus $\mathcal{B}$ mit endlichem σ-Maß. Ein zufälliges orthogonales Maß ζ auf $\mathcal{B}_0$ mit Strukturmaß σ ist nun eine Abbildung $\zeta : \mathcal{B}_0 \to L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit 3.8.1(i),(ii), wobei die auftretenden Mengen aus $\mathcal{B}_0$ sein sollen. Weiterhin fordert man, dass $\sigma(B) = (\zeta(B), \zeta(B))$ für alle $B \in \mathcal{B}_0$.

  Das zufällige Maß ζ ist nicht eindeutig, z.B. $\sigma = \delta_{x_0}$, dann

$$\zeta(B) = \begin{cases} 0 & x_0 \notin B \\ X & x_0 \in B \end{cases}$$

  für alle $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\|X\| = 1$.

3.8.4 Satz

Sei ζ ein zufälliges orthogonales Maß auf $\mathcal{B}$ mit Strukturmaß σ. Dann existiert ein isometrischer linearer Operator $I : L^2(\sigma) \to H(\zeta)$ so, dass

$$I\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot 1_{B_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \zeta(B_j)$$

gilt für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $c_j \in \mathbb{C}, B_j \in \mathcal{B}$.

Beweis:

- Für Treppenfunktionen aus $L^2(\sigma)$ definieren wir I durch die obige Gleichung. *Aufgabe*: Diese Definition ist sinnvoll, d.h. die rechte Seite hängt nicht von der speziellen Darstellung der Treppenfunktion ab.
- Es ist klar, dass I (für Treppenfunktionen) ein linearer Operator ist. Eine beliebige Treppenfunktion f lässt sich in der obigen Form mit disjunkten B_j schreiben. Dann gilt:

$$(I(f), I(f)) \overset{\perp}{=} \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \cdot \sigma(B_j) = (f, f) = \int |f|^2 \, d\sigma$$

  Die Abbildung I ist also isometrisch.
- Der Satz folgt nun daraus, dass die Treppenfunktionen einen dichten linearen Teilraum in $L^2(\sigma)$ bilden (+Isometrie von I). Fortsetzung auf $L^2(\sigma)$ ist eindeutig. (*Betrachte Folge von Treppenfunktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \to f$ in L^2. Dann existiert wegen Isometrie $I(f) := \lim I(f_n)$ und Eigenschaften von I bleiben bei Limes-Bildung erhalten.*)

3.8.5 Notation

- Im weiteren werden wir die Bezeichnung

$$\int_W f(t)\, d\zeta(t) := \int f(t)\, d\zeta(t) := \int f \, d\zeta := I(f)$$

  für $f \in L^2(\sigma)$ verwenden.
- Wegen der Isometrie gilt:

$$(I(f), I(g)) = \left(\int f\, d\zeta, \int g\, d\zeta\right) = (f, g) = \int f \cdot \bar{g}\, d\sigma \tag{1}$$

  und

$$L^2 - \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\zeta = \int L^2 - \lim_{n\to\infty} f_n \, d\zeta \tag{2}$$

  falls $L^2 - \lim_{n\to\infty} f_n$ existiert.
- Für eine beliebige Menge $A \in \mathcal{B}$ schreiben wir

$$\int_A f\, d\zeta := \int_W 1_A \cdot f\, d\zeta \qquad (f \in L^2(\sigma))$$

3.8.6 Definition

Ein Prozess zweiter Ordnung auf $T \subseteq \mathbb{R}$ heißt ein Prozess mit orthogonalen Zuwächsen, wenn

$$\forall t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4, t_j \in T : (Z(t_2) - Z(t_1), Z(t_4) - Z(t_3)) = 0$$

Beispiel: Wiener Prozess

3.8.7 Lemma

Sei Z ein von links stark stetiger, beschränkter Prozess mit orthogonalen Zuwächsen auf einem Intervall $[a,b)$ mit $a < b \leq \infty$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes zufälliges orthogonales Maß ζ auf $\mathcal{B}([a,b))$ so, dass $H(\zeta) \subseteq H(Z)$ und

$$\forall t, s \in [a,b) : \zeta([t,s)) = Z(t) - Z(s) \tag{1}$$

Beweis:

- Wir definieren die Funktion $F : [a,b) \to \mathbb{R}$ durch

  $$F(t) := \|Z(t) - Z(a)\|^2 \qquad (t \in [a,b))$$

  Die Funktion F ist von links stetig und beschränkt,

  $$F(t) = \|Z(t) - Z(s) + Z(s) - Z(a)\|^2 \overset{\perp}{=} \underbrace{\|Z(t) - Z(s)\|^2}_{\geq 0} + F(s)$$

  für $a \leq s \leq t$, also F monoton wachsend und

  $$F(t) - F(s) = \|Z(t) - Z(s)\|^2 \qquad (a \leq s \leq t)$$

- Maßtheorie: Es existiert ein nichtnegatives endliches Maß σ auf $\mathcal{B}([a,b))$ mit

  $$\forall s \leq t : \sigma([s,t)) = F(t) - F(s)$$

  Für Borel-Mengen $B \subseteq [a,b)$ der Form $[t,s)$ definieren wir $\zeta(B)$ durch (1).

- Genauso wie im Beweis von 3.8.4 definieren wir $I : L^2(\sigma) \to H(Z)$ für Treppenfunktionen, wir verwenden jedoch nur Borel-Mengen der Form $[t,s)$. Diese Funktionen sind dicht, deshalb lässt sich I zu einem isometrischen linearen Operator von $L^2(\sigma)$ nach $H(Z)$ fortsetzen. Ist nun $B \subseteq [a,b)$ eine beliebige Borel-Menge, so setzen wir $\zeta(B) := I(1_B)$.

- Die Eigenschaften (i),(ii) aus der Definition 3.8.1 folgen sofort aus der Isometrie. Die Eindeutigkeit folgt aus der Dichtheit des oben verwendeten Teilraums.

3.8.8 Definition

Seien Z und ζ wie im vorangegangenen Lemma. Wir definieren das Integral $\int_a^b f(t)\,dZ(t)$ durch

$$\int_a^b f(t)\,dZ(t) := \int_a^b f(t)\,d\zeta(t)$$

für $f \in L^2(\sigma)$, wobei σ das Strukturmaß von ζ ist.

3.8.9 Beispiele

(i). Seien $t_j \in T$ mit $t_i \neq t_j$ für $i \neq j$ und $X_j \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $j = 1, \ldots, n$, wobei X_j paarweise orthogonal. Für eine beliebige Menge $B \subseteq T$ definieren wir

$$\zeta(B) := \sum_{j : t_j \in B} X_j = \sum_{j=1}^{n} X_j \cdot \delta_{t_j}(B)$$

Dann ist ζ ein zufälliges orthogonales Maß mit Strukturmaß

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} \|X_j\|_2^2 \cdot \delta_{t_j}$$

Für eine beliebige Funktion $f : T \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int f(t)\, d\zeta(t) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j) \cdot X_j$$

(Man wähle $B_j = \{t_j\}$ in Satz 3.8.4.).

Aufgabe: Ist umgekehrt σ diskret, so ist ζ diskret.

(ii). Wir betrachten jetzt den Wiener Prozess auf $[0,T)$ mit zugehörigem zufälligen orthogonalen Maß ζ und Strukturmaß σ. Dann gilt für $B = [0,t)$ mit $t < T$:

$$\sigma(B) = (\zeta(B), \zeta(B)) = (W(t), W(t)) = t$$

Hieraus folgt aus dem Eindeutigkeitssatz für Maße, dass $\sigma = \lambda\big|_{[0,T)}$.

(iii). Sei ζ ein zufälliges orthogonales Maß auf dem Meßraum $(W, \mathcal{B})$ mit Strukturmaß σ. Sei $g : T \times W \to \mathbb{C}$ eine Funktion so, dass $g(t,\cdot) \in L^2(\sigma)$ für alle $t \in T$. Wir definieren das Feld Z durch

$$Z(t) := \int g(t,x)\, d\zeta(x) \qquad (t \in T)$$

Nach 3.8.5(1) ist die Korrelationsfunktion von Z gegeben durch

$$C(t,s) = \int g(t,x) \cdot \overline{g(s,x)}\, d\sigma(x) \qquad (t, s \in T)$$

Spezialfall: $T = W = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und es sei $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $p(t - \cdot) \in L^2(\sigma)$ für alle $t \in \mathbb{R}^d$. Wir definieren ein Feld Z durch

$$Z(t) = \int p(t-x)\, d\zeta(x)$$

für $t \in \mathbb{R}^d$. (Wähle $g(t,x) = p(t-x)$) Dann ist

$$C(t,s) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t-x) \cdot \overline{p(s-x)}\, d\sigma(x) \qquad (t, s \in \mathbb{R}^d)$$

Ist speziell $\sigma = \lambda^d$, so gilt

$$C(t,s) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s+y) \cdot \overline{p(y)}\, dy$$

C hängt also nur von $t-s$ ab (Z stationär). Hier ist allerdings σ nicht endlich (siehe Bemerkung 3.8.3).

3.8.10 Bemerkung

- Wir können ein zufälliges orthogonales Maß auch als eine Abbildung $\zeta : \mathcal{B} \to \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definieren. Es stellt sich die Frage, ob dann $B \mapsto \zeta(B)(w)$ für festes $w \in \Omega$ ein Maß ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Reihe 3.8.1(ii) für dieses w absolut konvergent ist.

  (i). Bei 3.8.9(i) ist dies der Fall, das Maß für festes w ist

  $$\sum_{j=1}^{n} X_j(w) \cdot \delta_{t_j}$$

  Die Punkte t_j sind also fest, ihr Maß ist zufällig.

  (ii). Es ist jedoch möglich, dass $\zeta(B)(w)$ für fast alle w kein Maß ist. Beispiel: Wiener Prozess auf $[0,1)$: Die Trajektorien sind fast sicher nicht von beschränkter Variation. ($\zeta([0,t))(w) = W(t,w)$ müsste die Verteilungsfunktion sein.)

3.8.11 Satz

Seien $t > 0$, f eine absolut stetige Funktion auf $[0,t]$ und $Z : [0,t] \to L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein stark stetiger Prozess mit orthogonalen Zuwächsen. Dann gilt

$$\int_0^t f(s)\, dZ(s) = f(t) \cdot Z(t) - f(0) \cdot Z(0) - \int_0^t Z(s) \cdot f'(s)\, ds$$

Beweis:

- Wir setzen $t_{i,n} := \frac{t \cdot i}{n}$ für $i = 0, \ldots, n$ und definieren die Funktionen f_n auf $[0,t]$ durch

  $$f_n(s) := \sum_{i=0}^{n-1} 1_{[t_{i,n}, t_{i+1,n}]}(s) + f(t) \cdot 1_{\{t\}}(s)$$

  Dann konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f und damit auch in $L^2(\sigma)$, wobei σ das Strukturmaß des zu Z gehörenden zufälligen orthogonalen Maßes ζ ist.

- Es gilt:

  $$\begin{aligned}\int_0^t f(s)\, dZ(s) &= \int_0^t L^2 - \lim_{n\to\infty} f_n(s)\, dZ(s) \overset{3.8.5(2)^2}{L} - \lim_{n\to\infty} \int_0^t f_n(s)\, dZ(s)\\ &= L^2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_{i,n}) \cdot \big(Z(t_{i+1,n}) - Z(t_{i,n})\big)\\ &= f(t) \cdot Z(t) - f(0) \cdot Z(0) - \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} Z(t_{i+1,n}) \cdot \big(f(t_{i+1,n}) - f(t_{i,n})\big)}_{(*)}\end{aligned}$$

  Für letzte Gleichheit: partielle Summation

  $$\sum_{k=m}^{n} a_k \cdot (b_{k+1} - b_k) = a_{n+1} \cdot b_{n+1} - a_m \cdot b_m - \sum_{k=m}^{n} b_{k+1} \cdot (a_{k+1} - a_k)$$

  Es gilt in $(*)$:

  $$\sum_{i=0}^{n-1} Z(t_{i+1,n}) \cdot \big(f(t_{i+1,n}) - f(t_{i,n})\big) = \int_0^t Z(g_n(s)) \cdot f'(s)\, ds$$

  wobei

  $$g_n(s) := \sum_{i=1}^{n-1} t_{i+1,n} \cdot 1_{[t_{i,n}, t_{i,n+1})}(s)$$

  Mit Hilfe von $|g_n(s) - s| < \frac{1}{n}$, der Gleichung

  $$\|Z(s) - Z(g_n(s))\|_2^2 = C(s,s) - C(s, g_n(s)) - C(g_n(s), s) + C(g_n(s), g_n(s))$$

  und der gleichmäßigen Stetigkeit von C auf $[0,t] \times [0,t]$ (3.3.2, $[0,t] \times [0,t]$ kompakt) sehen wir, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq N, s \in [0,t]$:

  $$\|Z(s) - Z(g_n(s))\|_2^2 < \varepsilon$$

  Aus 3.5.3(3) folgt nun, dass

  $$\int_0^t Z(g_n(s)) \cdot f'(s) \overset{n\to\infty}{\to} \int_0^t Z(s) \cdot f'(s)\, ds \qquad \text{in } L^2$$

3.8.12 Satz von Karhunen

Sei $Z : T \to L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Feld mit Korrelationsfunktion C. Wir nehmen an, dass C die Darstellung

$$C(t,s) = \int_W g(t,x) \cdot \overline{g(s,x)}\, d\sigma(x) \qquad (t,s \in T) \tag{1}$$

besitzt, wobei

(i). σ ist ein endliches nichtnegatives Maß auf einem Meßraum $(W, \mathcal{B})$.

(ii). $g : T \times W \to \mathbb{C}$ mit $g(t,\cdot) \in L^2(\sigma)$ für alle $t \in T$.

(iii). der lineare Raum $L_g \coloneqq \operatorname{lin}\{g(t,\cdot); t \in T\}$ ist dicht in $L^2(\sigma)$.

Dann existiert ein eindeutig bestimmtes zufälliges orthogonales Maß ζ auf $(W, \mathcal{B})$ mit Werten in $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und mit Strukturmaß σ, sodass

$$Z(t) = \int g(t,x)\, d\zeta(x) \tag{2}$$

und $H(\zeta) = H(Z)$.

Beweis:

- Sei
$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot g(t_k, x) \in L_g$$
mit $t_k \in T, \in W, c_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, \ldots, n)$ eine beliebige Funktion aus L_g. Wir definieren die lineare Abbildung $I : L_g \to H(Z)$ durch
$$I(f) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} Z(t_k)$$

- Wir müssen zeigen, dass diese Definition sinnvoll ist. Aus (1) folgt, dass
$$\begin{aligned}(I(f), Z(s)) &= \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot C(t_k, s) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \int_W g(t_k, x) \cdot \overline{g(s,x)}\, d\sigma(x)\\ &= \int_W f(x) \cdot \overline{g(s,x)}\, d\sigma(x)\end{aligned}$$
für alle $s \in T$. Da $H(Z) = \operatorname{clsp}\{Z(s); s \in T\}$ folgern wir, dass $I(f)$ nur von f, aber nicht der konkreten Darstellung abhängt.

- Ähnliche Rechnung wie oben zeigt:
$$\begin{aligned}(I(f), I(f)) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_j \cdot \bar{c}_k \cdot C(t_j, t_k) = \int_W f(x) \cdot \overline{f(x)}\, d\sigma(x)\\ &= (f, f)\end{aligned}$$
also I isometrisch. Die Abbildung I lässt sich deshalb wegen (iii) zu einer isometrischen linearen Abbildung von $L^2(\sigma) = \overline{L_g}$ in $H(Z)$ fortsetzen. Wir bezeichnen diese Fortsetzung mit I und definieren ζ durch
$$\zeta(B) \coloneqq I(1_B) \qquad (B \in \mathcal{B})$$
Aus der Isometrie von I folgt, dass ζ ein zufälliges orthogonales Maß auf $(W, \mathcal{B})$ mit Strukturmaß σ ist.

- Wir definieren das Feld X durch
$$X(t) := \int_W g(t,x)\, d\zeta(x) \qquad (t \in T)$$
Zu zeigen: $X = Z$. Es gilt
$$\begin{aligned}(Z(t), \zeta(B)) &= (I(g(t,\cdot)), I(B)) = (g(t,\cdot), B)\\ &= \int_W g(t,x) \cdot 1_B(x)\, d\sigma(x) \qquad (t \in T, B \in \mathcal{B})\end{aligned}$$
Wegen Isometrie von I folgt hieraus
$$(Z(t), X(s)) = \int g(t,x) \cdot \overline{g(s,x)}\, d\sigma(x) = (Z(t), Z(s))$$
($g(s,\cdot)$ lassen sich in L^2 durch Treppenfunktionen approximieren und das Integral bzgl. ζ stellt eine isometrische Abbildung dar: *Sei $s \in T$. Dann existieren $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(\sigma)$ Treppenfunktionen mit $f_n \to g(s,\cdot)$ in L^2. Damit folgt:*
$$\begin{aligned}X(s) &= \int_W L^2 - \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, d\zeta(x) = L^2 - \lim_{n\to\infty} \int_W f_n(x)\, d\zeta(x)\\ (Z(t), X(s)) &= L^2 - \lim_{n\to\infty} (Z(t), I(f_n)) = L^2 - \lim_{n\to\infty} \int_W g(t,x) \cdot \overline{f_n(x)}\, d\sigma(x)\\ &= \int_W g(t,x) \cdot \overline{g(s,x)}\, d\sigma(x) = (Z(t), Z(s))\end{aligned}$$
Es gilt also
$$\forall s,t \in T : (Z(t), X(s)) = (Z(t), Z(s))$$
Wegen $H(Z) = \operatorname{clsp}\{Z(s); s \in T\}$ folgt hieraus $X(t) = Z(t)$.

- Die Darstellung (2) zeigt $H(Z) \subseteq H(\zeta)$ und aus der Definition von ζ (über I) folgt $H(\zeta) \subseteq H(Z)$, somit $H(Z) = H(\zeta)$.

- Eindeutigkeit: Sei η ein zufälliges orthogonales Maß auf $(W, \mathcal{B})$ mit Strukturmaß σ so, dass
$$Z(t) = \int_W g(t,x)\, d\zeta(x) = \int_W g(t,x)\, d\eta(x) \qquad (t \in T)$$
Mit (iii) gilt dann
$$\forall h \in L^2(\sigma) : \int_W h(x)\, d\zeta(x) = \int_W h(x)\, d\eta(x)$$
Wähle $h = 1_B$ für $B \in \mathcal{B}$, dann erhält man $\eta = \zeta$.

Bemerkung:

(i). Karhunen-Loève (3.6.3):
$$\begin{aligned}C(t,s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot \varphi_n(t) \cdot \overline{\varphi_n(s)}\\ \Rightarrow Z(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \cdot X_n \cdot \varphi_n(t)\end{aligned}$$
Bezug zu 3.8.12: $W = \mathbb{N}, g(t,n) = \varphi_n(t), \sigma = \lambda_n \delta_n, \zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \cdot X_n \delta_n$. („diskrete Version von Karhunen“)

3.8.13 Satz von Bochner

Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ ist genau dann positiv definit, wenn sie sich in der Form
$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\imath t \cdot x}\, d\mu(x) \qquad (t \in \mathbb{R}^d)$$
darstellen lässt, wobei μ ein nichtnegatives endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}^d$ ist. Das Maß μ ist durch f eindeutig bestimmt.

Ohne Beweis (siehe Wahrscheinlichkeitstheorie, Schilling, Satz 14.9)

3.8.14 Satz von Bochner II

Eine Funktion $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ ist genau dann positiv definit, wenn sie sich in der Form

$$f(t) = \int_{(-\pi,\pi]^d} e^{\imath n \cdot x}\, d\mu(x) \qquad (n \in \mathbb{Z}^d)$$

darstellen lässt, wobei μ ein nichtnegatives endliches Borelmaß auf $(-\pi,\pi]^d$ ist. Das Maß μ ist durch f eindeutig bestimmt.

Beweis: (hier für $d = 1$, Satz von Herglotz)

- „$\Leftarrow$“: Besitzt f die obige Darstellung, so ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_j \cdot \bar{c}_k \cdot f(j-k) &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_j \cdot \bar{c}_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath (j-k)\cdot x}\, d\mu(x) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{N} c_j \cdot e^{\imath j \cdot x} \right|^2 d\mu(x) \geq 0\end{aligned}$$

  d.h. f ist positiv definit.

- „$\Rightarrow$“: Nehmen wir jetzt an, dass f positiv definit und $f(0) = 1$. Wir setzen in der Definition von „positiv definit“ $c_j = e^{-\imath j \cdot x}$, dann:

$$P_N(x) := \underbrace{\frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} f(j-k) \cdot e^{-\imath (j-k)\cdot x}}_{\geq 0} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=-N}^{N} f(m) \cdot e^{-\imath m \cdot x} \cdot (N - |m|)$$

  Hieraus erhalten wir für alle $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath n \cdot x} \cdot P_N(x)\, dx &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-N}^{N} f(m) \cdot \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath (n-m)\cdot x}\, dx}_{2\pi \cdot \delta_{nm}} \\ &= \max\left\{0, 1 - \frac{|n|}{N}\right\} \cdot f(n)\end{aligned}$$

  Folglich ist durch

$$d\mu_N(x) := \frac{1}{2\pi} \cdot 1_{(-\pi,\pi]}(x) \cdot \underbrace{P_n(x)}_{\geq 0}\, dx$$

  ein nichtnegatives Maß auf $(-\pi,\pi]$ definiert so, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath n \cdot x}\, d\mu_N(x) = \max\left\{0, 1 - \frac{|n|}{N}\right\} \cdot f(n) \tag{1}$$

  Speziell ist $\mu_N((-\pi,\pi]) = f(0) = 1$. Nach H.9 besitzt die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die schwach gegen ein nichtnegatives Maß μ auf $(-\pi,\pi]$ konvergiert. Aus (1) und der schwachen Konvergenz folgt die gewünschte Darstellung von f.

  Eindeutigkeit: Nach dem Satz von Stone-Weierstraß lässt sich jede stetige Funktion auf $(-\pi,\pi]$ gleichmäßig durch Linearkombinationen von Funktionen $t \mapsto e^{\imath n \cdot t}$ $(n \in \mathbb{Z})$ approximieren, woraus die Eindeutigkeit von μ folgt.

3.8.15 Satz

Sei Z ein stark stetiges stationäres Feld auf $\mathbb{R}^d$ mit Korrelationsfunktion C und Spektralmaß σ. Dann existiert genau ein zufälliges orthogonales Maß ζ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mit Strukturmaß σ, so dass

$$\forall t \in \mathbb{R}^d : Z(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\imath t \cdot x} \, d\zeta(x)$$

und $H(Z) = H(\zeta)$.
Umgekehrt definiert die obige Gleichung ein stark stetiges stationäres Feld mit Spektralmaß σ, falls ζ ein zufälliges orthogonales Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mit Strukturmaß σ.

Bemerkung:

(i). Spektralmaß σ ist das eindeutig bestimmte darstellende Maß aus Satz von Bochner für Korrelationsfunktion C.

Beweis:

(i). Es gilt

$$C(t-s) = \int e^{\imath (t-s) \cdot x} \, d\sigma(x) \qquad (t, s \in \mathbb{R}^d)$$

mit Satz von Bochner (3.8.13). Damit folgt:

$$C(t-s) = \int \underbrace{e^{\imath t \cdot x}}_{=:g(t,x)} \cdot \underbrace{e^{-\imath s \cdot x}}_{\overline{g(s,x)}} \, d\sigma(x)$$

Die lineare Hülle der Funktionen $x \mapsto e^{\imath t \cdot x}$, $t \in \mathbb{R}^d$ ist dicht in $L^2(\sigma)$, denn: Sei $h \in (\mathrm{lin}\{e^{\imath t \cdot}; t \in \mathbb{R}^d\})^\perp$, dann

$$\forall t \in \mathbb{R}^d : \int e^{\imath t \cdot x} \cdot \overline{h(x)} \, d\sigma(x) = 0$$

und $d\mu(x) := \overline{h(x)} \, d\sigma(x)$ ist komplexes Maß,

$$\check{\mu} = \int e^{\imath t \cdot x} \, d\mu(x) = 0$$

und aus der Eindeutigkeit der Fourier-Transformation folgt $\mu = 0$, also $h = 0$.

Die erste Aussage des Satzes folgt deshalb aus Satz 3.8.12.

(ii). Die Umkehrung folgt aus den Eigenschaften des Integrals.

3.8.16 Satz

Sei Z ein stark stetiges stationäres Feld auf $\mathbb{Z}^d$ mit Korrelationsfunktion C und Spektralmaß σ. Dann existiert genau ein zufälliges orthogonales Maß ζ auf $((-\pi, \pi]^d, \mathcal{B}((-\pi, \pi]^d))$ mit Strukturmaß σ, so dass

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d : Z(n) = \int_{(-\pi,\pi]^d} e^{\imath n \cdot x} \, d\zeta(x)$$

und $H(Z) = H(\zeta)$.
Umgekehrt definiert die obige Gleichung ein stark stetiges stationäres Feld auf $\mathbb{Z}^d$ mit Spektralmaß σ, wobei ζ ein zufälliges orthogonales Maß auf $((-\pi, \pi]^d, \mathcal{B}((-\pi, \pi]^d))$ mit Strukturmaß σ.

Beweis: Analog zu 3.8.15 mit Bochner-Herglotz (3.8.14).

3.8.17 Beispiele

(i). Ist Spektralmaß σ von Z auf $\mathbb{R}^d$ diskret, d.h.

$$\sigma = \sum_j p_j \cdot \delta_{x_j}$$

mit $x_j \in \mathbb{R}^d$, $p_j \geq 0$, so gilt

$$\begin{aligned} C(t) &= \int e^{\imath\, t\cdot x}, d\sigma(x) = \sum_j p_j \cdot e^{\imath\, t\cdot x_j} \\ Z(t) &= \sum_j X_j \cdot e^{\imath\, t\cdot X_j} \end{aligned}$$

mit $(X_j, X_i) = p_i \cdot \delta_{ij}$ (s. 3.8.9). Ist Z ein Gauß-Feld, so sind die X_j's unabhängig.

(ii). Sei $Z \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$ ein weißes Rauschen auf $\mathbb{Z}^d$. Für die Korrelationsfunktion C gilt dann

$$\begin{aligned} C(n) &= \frac{\sigma^2}{(2\pi)^d} \cdot \int_{(-\pi,\pi]^d} e^{\imath\, n\cdot x}\, d\lambda^d(x) \qquad (n \in \mathbb{Z}^d) \\ &= \begin{cases} \sigma^2 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Die Spektraldichte ist konstant im Würfel $(-\pi, \pi]^d$. Ist umgekehrt die Spektraldichte konstant und $\mathbb{E}Z_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}^d$, so ist das Feld ein weißes Rauschen aus $\mathrm{WN}(0, \sigma^2)$ mit einem gewählten σ.

3.8.18 Aufgabe

Es seien ζ ein zufälliges orthogonales Maß auf $(W, \mathcal{B})$ mit Strukturmaß σ und $g \in L^2(\sigma)$. Wir definieren

$$\zeta_g(A) := \int_W g(t) \cdot 1_A(t)\, d\zeta(t) = \int_A g\, d\zeta$$

für $A \in \mathcal{B}$. Dann ist ζ_g ein zufälliges orthogonales Maß auf $(W, \mathcal{B})$ mit Strukturmaß σ_g, $d\sigma_g = |g|^2\, d\sigma$. Weiterhin gilt

(i). Für $f \in L^2(\sigma)$:

$$\int f\, d\zeta_g = \int f \cdot g\, d\zeta$$

(ii). Die Menge der Nullstellen von g ist eine σ_g-Nullmenge, $\frac{1}{g} \in L^2(\sigma_g)$,

$$\zeta(A) = \int_A \frac{1}{g}\, d\zeta_g \qquad (A \in \mathcal{B})$$

4 Stochastische Integration

4.1 Motivation, Vorbemerkung

(i). Brownsche Bewegung, Einstein 1905:

- Sein Ziel: Man finde eine makroskopische, messbare Wirkung von Atomen (deren Existenz damals noch nicht bewiesen war).
- Kandidat: Brownsche Bewegung. Bewegung der Partikel verursacht durch Zusammenstöße von den Atomen.
- Statistische Annahmen über die Atome führen Einstein zu der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

  (Diffusionsgleichung bzw. Wärmeleitungsgleichung) wobei $f(t,\cdot)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte des Partikels zur Zeit t ist (Start im Nullpunkt). D heißt Diffusionskoeffizient.
- Er gab die Lösung an:

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\, D \cdot t}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4D \cdot t}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

  Standardabweichung $\lambda_x := \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{2D \cdot t}$ ist proportional zu $\sqrt{t}$.
- Er gelangte zu der Formel

$$\lambda_x = \sqrt{t} \cdot \sqrt{\frac{R \cdot T}{N} \cdot \frac{1}{3\pi\, k \cdot P}} \tag{1}$$

  wo alle Größen messbar oder bekannt sind:
  - T: Temperatur
  - k: Viskosität
  - P: Radius des Partikels
  - R: Gas-Konstante
  - N: Avogadro-Zahl

  Einstein nahm Raumtemperatur und berechnete, wie groß λ_x pro Minute sein sollte, man konnte also die Richtigkeit der Formel experimentell überprüfen (Perrin).

(ii). Langevin, 1908:

- Ziel: (1) einfacher zu erhalten. Ansatz: Newtonsche Gleichung

$$m \cdot a = F$$

  für einen einzelnen Partikel hinschreiben:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -6\pi \cdot \mu \cdot a \cdot \frac{dx}{dt} + X \tag{2}$$

(Stokes-Kraft) mit a Radius des Partikels und μ Viskostität. X beschreibt den Zufall. Begründung für X: „in reality [Stokes-Kraft] is only an average and because of the irregularity of the collisions of the surrounding molecules.“.

- Lösungsmethode von Langevin: Wir multiplizieren (2) mit x:

$$\frac{m}{2} \cdot \frac{d^2 x^2}{dt^2} - m \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -3\pi \cdot \mu \cdot a \cdot \frac{dx^2}{dt} + x \cdot X$$

Erwartungswert von beiden Seiten:

$$\frac{m}{2} \cdot \frac{d^2 \overline{x^2}}{dt^2} - m \cdot \overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = -3\pi \cdot \mu \cdot a \cdot \frac{\overline{dx^2}}{dt}$$

(Langevin: $\mathbb{E}(x \cdot X) = 0$ „wegen der Irregularität von X“.) Mit Hilfe der Beziehung

$$m \cdot \overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{R \cdot T}{N}$$

erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten; deren Lösung ist

$$\frac{\overline{dx^2}}{dt^2} = \frac{R \cdot T}{N} \cdot \frac{1}{3\pi \cdot \mu \cdot a} + C \cdot \exp\left(-\frac{6\pi \cdot \mu \cdot a}{m} \cdot t\right)$$

Lässt man den letzten Term weg (klein für Standard-Werte), so erhält man (1).

- Für Mathematiker unbefriedigend: Ableitungen von x werden verwendet, obwohl x nicht differenzierbar ist (experimentell nachprüfbar).

(iii). Allgemeiner:

$$\frac{d}{dt} u(t) = a(u(t), t) + b(u(t), t) \cdot F(t)$$

Um Ableitung zu vermeiden, schreiben wir diese Gleichung mit Hilfe von Integralen:

$$u(t) - u(0) = \int_0^t a(u(s), s) + b(u(s), s) \cdot F(s)\, ds$$

4.1.1 Funktionen mit endlicher Variation

Für eine Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ und eine Zerlegung Z $0 \le t_0 < \ldots < t_{n+1} \le t$ des Intervalls $[0, t]$ $(t \ge 0)$ sei

$$V_f(t, Z) := \sum_{j=0}^{n} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|$$

$$V_f^{\pm}(t, Z) := \sum_{j=0}^{n} (f(t_{j+1}) - f(t_j))^{\pm}$$

Dann heißt

$$V_f(t) := \sup \{V_f(t, Z); Z \,\text{Zerlegung}\}$$

Variation von f zur Zeit t. Analog:

$$V_f^{\pm}(t) := \sup\{V_f^{\pm}(t, Z); Z \,\text{Zerlegung}\}$$

Positiv- und Negativvariation. Wir nennen f von endlicher Variation, falls $V_f(t) < \infty$ für alle $t \ge 0$.

Bemerkung:

(i). „von endlicher Variation“ ist etwas anderes als „von endlicher Variation auf $[0, \infty)$“. Beispiel: $f(t) = t$. Dann $V_f(t, Z) = t$ für alle Zerlegungen mit $t_0 = 0$, $t_{n+1} = t$. Also

$$V_f(t) = t \to \infty \qquad (t \to \infty)$$

Ist $(X_t)_{t \ge 0}$ ein Prozess, so definiert man $V_X(t)$ pfadweise, d.h. $V_X(t, w)$ ist die Variation von $s \mapsto X_s(w)$ auf $[0, t]$.

4.1.2 Aufgabe

(i). Alle eingeführten Variationen sind monoton wachsend als Funktionen von t.

(ii). $V_f(t) = V_f^+(t) + V_f^-(t)$

(iii). $f(t) - f(0) = V_f^+(t) - V_f^-(t)$

(iv). Gilt $V_f^\pm(t) < \infty$ für alle t, so sind mit f auch $t \mapsto V_f^\pm(t)$ stetig oder rechtsstetig.

(v). Ist f monoton, so ist $V_f(t) = |f(t) - f(0)|$

(vi). Gilt $\left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\right| \leq C$ für $t \neq s$, dann ist $V_f(t) \leq C \cdot t$.

(vii). Differenzierbare Funktionen mit beschränkter Ableitung haben die obige Eigenschaft.

(viii). Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ist nicht von endlicher Variation.

Hinweise: Mittelwertsatz,

$$|x| = x^+ + x^- \qquad\qquad x = x^+ - x^-$$

Bemerkungen:

(i). Man kann zeigen, dass Funktionen von endlicher Variation immer als Differenz zweier monotoner Funktionen darstellbar sind.

(ii). Monotone Funktionen sind Lebesgue-fast überall differenzierbar.

(iii). Aus (i),(ii) folgt: Die Pfade des Wiener Prozesses sind nicht von endlicher Variation.

(iv). Es gibt streng monoton wachsende, stetige Funktionen, deren Ableitung gleich 0 ist, wo sie existiert. Für solche Funktionen gilt also nicht

$$f(t) - f(0) = \int_0^t f'(s)\, ds$$

4.1.3 Stieltjes-Integral

- Sei $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ und h eine linksstetige Treppenfunktion

  $$h(s) = \sum_j a_j \cdot 1_{(t_j, t_{j+1}]}(s) \qquad s \in [0, \infty)$$

  mit $a_j \in \mathbb{R}$, $t_j \leq t_{j+1}$, $0 \leq t_j \leq t$. Wir definieren

  $$\int_0^t h(s)\, dx(s) := \sum_j a_j \cdot (x(t_{j+1}) - x(t_j))$$

  Diese Definition hängt nicht von der speziellen Darstellung von h ab, das Integral ist ein lineares Funktional auf dem linearen Raum solcher Treppenfunktionen. Es ist sogar linear in x bei festem h.

- Idee zur Vergrößerung der Klasse der Integranden: Funktionen gleichmäßig durch Treppenfunktionen zu approximieren. Falls die zugehörigen Integrale konvergieren, nennt man den Grenzwert das Integral der Grenzfunktion.

- Für $x(t) = t$ erhält man das Lebesgue-Integral (zumindest eine Einschränkung).

- Für diese Prozedur benötigt man die Stetigkeit des linearen Funktionals $h \mapsto \int_0^t h(s)\, dx(s)$ bzgl. der Supremum-Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf $[0, t]$.

4.1.4 Satz

Das Integral $h \mapsto \int h(s)\,dx(s)$ ist genau dann stetig bzgl. der Supremum-Norm auf $[0,t]$, wenn $V_x(t) < \infty$.

Beweis:

- „$\Leftarrow$“: Sei $V_x(t) < \infty$, dann gilt für alle $h = \sum_j a_j \cdot 1_{(t_j,t_{j+1}]}$:

$$\left|\int_0^t h(s)\,dx(s)\right| \le \sum_j |a_j| \cdot |x(t_{j+1}) - x(t_j)| \le \|h\|_\infty \cdot \underbrace{\sum_j |x(t_{j+1}) - x(t_j)|}_{\le V_x(t)}$$

$$\le \|h\|_\infty \cdot V_x(t)$$

  also $h \mapsto \int h\,dx$ stetig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

- „$\Rightarrow$“: Sei $Z : 0 \le t_0 \le \ldots \le t_{n+1} \le t$ eine beliebige Zerlegung von $[0,t]$ mit $V_x(t) \le V_x(t,Z) + \varepsilon$ für $\varepsilon > 0$. Sei h die Treppenfunktion

$$h = \sum_j a_j \cdot 1_{(t_j,t_{j+1}]}$$

  mit $a_j := \operatorname{sgn}(x(t_{j+1}) - x(t_j))$. Dann ist $\|h\|_\infty \le 1$ und

$$\int_0^t h\,dx = V_x(t.Z) \ge V_x(t) - \varepsilon$$

$$\overset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow} V_x(t) \le \sup\left\{\int_0^t h\,dx; \|h\|_\infty \le 1\right\} < \infty$$

  da $h \mapsto \int h\,dx$ stetig.

4.1.5 Übertragung auf Prozesse

- Seien X und Y reell- oder komplexwertige Prozesse zweiter Ordnung auf $[a,b]$ und demselben Grundraum. Wir wollen den Ausdruck

$$\int_a^b X_t\,dY_t$$

  wie beim Stieltjes-Integral einführen.

- Zugang von Itô:

$$I := L^2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} X_{a+i\cdot h} \cdot (Y_{a+(i+1)\cdot h} - Y_{a+i\cdot h})$$

  mit $h = \frac{b-a}{n}$, falls der Grenzwert existiert.

- Zugang von Stratonovich:

$$S := L^2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}(X_{a+i\cdot h} + X_{a+(i+1)\cdot h}) \cdot (Y_{a+(i+1)\cdot h} - Y_{a+i\cdot h})$$

  falls der Grenzwert existiert.

4.1.6 Aufgabe

Sei $[a,b] = [0,T]$ und $X_t = Y_t = W_t$, wobei W_t ein Wiener Prozess auf $[0,T]$ bezeichnet. Zu zeigen:

$$I = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{1}{2}T \qquad\qquad S = \frac{1}{2}W_T^2$$

Hinweis: Sei $B_i := W_{\frac{i\cdot T}{n}}$, dann $B_0 = 0$, $B_n = W_T$. Verwenden Sie für I die Identität

$$B_{i+1}^2 - B_i^2 = (B_{i+1} - B_i)^2 + 2B_i \cdot (B_{i+1} - B_i)$$

und Satz 3.2.6.

4.2 Filtrationen, Stoppzeiten und adaptierte Prozesse

4.2.1 Definition

- Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $T \subseteq \mathbb{R}$. Eine Familie $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ heißt eine Filtration in $\mathcal{A}$, wenn $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ für alle $s \le t$ und $\mathcal{F}_t$ eine σ-Algebra für alle $t \in T$.
- Für einen S-wertigen Prozess Y auf T definieren wir die von Y erzeugte Filtration (natürliche Filtration) $\sigma(Y)$ durch
$$\mathcal{F}_t = \sigma(\{Y_s; s \le t\}) \qquad (t \in T)$$
- Ein Prozess X auf T heißt an die Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ adaptiert, falls $\sigma(X_t) \subseteq \mathcal{F}_t$ für alle $t \in T$, d.h. X_t ist bzgl. $\mathcal{F}_t$ messbar.
- Eine Abbildung $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ heißt eine $\mathcal{F}$-Stoppzeit, falls
$$\forall t \in T : [\tau \le t] \in \mathcal{F}_t$$

4.2.2 Aufgabe

Sei X ein stetiger Prozess auf $[0,\infty)$ und $B \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Dann ist

$$\tau_B := \inf\{t \ge 0; X_t \in B\}$$

eine Stoppzeit.

4.2.3 Aufgabe

Zeigen Sie, dass die folgenden τ's Stoppzeiten bzgl. der natürlichen Filtration sind:

(i). X beliebig, τ konstant

(ii). X Poisson-Prozess, $\tau = s_n$ (n-te Sprungzeit)

(iii). X Wiener Prozess auf $[0,\infty)$, $a \ge 0$ und

$$\tau := \tau_a := \inf\{t \ge 0; W_t = a\}$$

(Zeit des ersten Erreichens des Niveaus von a)

4.2.4 Definition

Ein $\mathcal{F}$-adaptierter Prozess X mit $S = \mathbb{R}^d$ heißt ein

(i). $\mathcal{F}$-Markov-Prozess, falls

$$\forall s \le t\, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : \mathbb{P}(X_t \in B|\mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in B|X_s)$$

(ii). $\mathcal{F}$-Martingal, falls

$$\forall s \le t : \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$$

(iii). Prozess mit $\mathcal{F}$-unabhängigen Zuwächsen, falls $\sigma(X_t - X_s)$ und $\mathcal{F}_s$ unabhängig für alle $s \le t$

(iv). $\mathcal{F}$-Wiener-Prozess, wenn die Zuwächse $\mathcal{F}$-unabhängig sind und $X_t - X_s \in N(0, |t-s|)$.

4.2.5 Aufgabe

Ein $\mathcal{F}$-Wiener Prozess ist ein $\mathcal{F}$-Markov-Prozess und ein $\mathcal{F}$-Martingal. Weiterhin ist $W_t - W_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und

$$\forall s, t \in T : \mathbb{E}(|W_t - W_s|^2 | \mathcal{F}_s) = |t - s|$$

Bemerkung:

(i). Bekannt aus der Maßtheorie (optionales Stoppen): Für ein (pfadweise) rechtsstetiges $\mathcal{F}$-Martingal $X = (X_t)_{t \geq 0}$ und eine $\mathcal{F}$-Stoppzeit τ ist

$$X_t^\tau := X_{t \wedge \tau}$$

wieder ein $\mathcal{F}$-Martingal.

4.2.6 Satz

Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein (pfadweise) stetiges Martingal so, dass alle Pfade endliche Variation besitzen. Dann ist X fast sicher konstant.

Beweis: Durch Übergang von X_t zu $X_t - X_0$ können wir annehmen, dass $X_0 = 0$ ist.

(i). Nehmen wir zuerst an, dass $C \geq 0$ existiert, sodass für alle $t \geq 0$, $w \in \Omega$:

$$V_x(t, w) \leq C$$

Dann ist

$$|X_t| = |X_t - X_0| \leq V_x(t) \leq C$$

folglich ist X von zweiter Ordnung, d.h. ein L^2-Martingal. Solche Martingale haben orthogonale Zuwächse. Wir betrachten die Zerlegung

$$Z_n : t_{n,j} := \frac{j \cdot t}{n+1} \qquad 0 \leq j \leq n+1$$

dann

$$\begin{aligned} \|X_t\|^2 &= \left\| \sum_{j=0}^{n} X_{t_{n,j+1}} - X_{t_{n,j}} \right\|^2 \stackrel{\perp}{=} \sum_{j=0}^{n} \|X_{t_{n,j+1}} - X_{t_{n,j}}\|^2 \\ &\leq \mathbb{E}\left(\max_{0 \leq j \leq n} |X_{t_{n,j+1}} - X_{t_{n,j}}| \cdot V_x(t, Z_n) \right) \end{aligned}$$

Der Integrand ist $\leq C^2$. Da die Pfade auf $[0, t]$ gleichmäßig stetig sind, konvergiert der Integrand der rechten Seiten punktweise gegen 0 für $n \to \infty$. Mit dominierter Konvergenz folgt nun $\|X_t\|^2 = 0$, also $X_t = 0$ fast sicher.

(ii). Für den allgemeinen Fall definieren wir die Stoppzeiten

$$\tau_n := \inf\{t \geq 0; V_x(t) \geq n\}$$

Aufgabe: τ_n ist Stoppzeit. Es gilt $\tau_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Außerdem sind $V_{x^{\tau_n}}$ und auch X^{τ_n} auf $[\tau_n, \infty)$ konstant, woraus $V_{x^{\tau_n}} \leq n$ folgt. Da X^{τ_n} ein Martingal ist (optionales Stoppen) folgt aus dem ersten Teil des Beweises, dass $X_t^{\tau_n} = 0$ fast sicher. Wegen $\tau_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ erhalten wir

$$X_t = \lim_{n \to \infty} X_t^{\tau_n} = 0 \qquad \text{f.s.}$$

für jedes $t \geq 0$. Folglich ist

$$\mathbb{P}[\forall t \in \mathbb{Q} : X_t = 0] = 1$$

Aus der Stetigkeit folgt nun, dass $X = 0$ fast sicher.

4.2.7 Bemerkung

(i). Die Reduktion im obigen Beweis nennt man lokalisieren.

(ii). Wir nennen einen rechtsstetigen $\mathcal{F}$-adaptierten Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein lokales $\mathcal{F}$-Martingal, falls eine monotone Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $\tau_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ fast sicher, sodass die zentrierten und gestoppten Prozesse $(X_n - X_0)^{\tau_n}$ alle $\mathcal{F}$-Martingale sind. Die Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt lokalisierend.

(iii). Die Menge aller stetigen lokalen $\mathcal{F}$-Martingale bezeichnen wir mit $\mathrm{CM}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F})$.

4.2.8 Lemma

$\mathrm{CM}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F})$ ist ein linearer Raum.

Beweis:

- Seien $X, Y \in \mathrm{CM}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F})$ mit lokalisierenden Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist $\varrho_n := \tau_n \wedge \sigma_n$ eine Stoppzeit mit $\varrho_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ fast sicher und

$$(X + Y - X_0 - Y_0)^{\varrho_n} = ((X - X_0)^{\tau_n})^{\sigma_n} + ((Y - Y_0)^{\sigma_n})^{\tau_n}$$

ist $\mathcal{F}$-Martingal (optionales Stoppen). Also $X + Y \in \mathrm{CM}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F})$.

- Multiplikation mit Skalar ist leicht.

4.3 Das Itô-Integral

4.3.1 Einleitung

- In diesem Abschnitt: $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ monoton wachsende Familie von Unter-σ-Algebren von $\mathcal{A}$ (d.h. eine Filtration), $(W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ein Wiener Prozess, so dass W_t $\mathcal{F}_t$-messbar ist, $W_t - W_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ für $s \leq t$ (d.h. ein $\mathcal{F}$-Wiener-Prozess)

- Wir wollen Integrale der Form

$$\int_a^b \varphi(t, w)\, dW(t, w) \qquad (-\infty < a < b < \infty)$$

für gewisse Funktionen/Prozesse $\varphi : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ definieren.

- Hängt φ nur von t ab, so kann man Integrale nach orthogonalen zufälligen Maßen verwenden.

- Allgemeiner Fall: Zusätzliche Bedingungen an φ:

  (i). φ ist $\mathcal{L} \times \mathcal{A}$-messbar, wobei $\mathcal{L}$ die σ-Algebra der lebesgue-messbaren Mengen bezeichnet.

  (ii). $\varphi(t, \cdot)$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ $\mathcal{F}_t$-messbar (progressive Messbarkeit)

  (iii). Es sei

$$\|\varphi\|^2_{\lambda\times\mathbb{P}} := \int_a^b \mathbb{E}(|\varphi(t, \cdot)|^2)\, dt < \infty$$

- Bemerkung: Nach (i),(ii) ist der Integrand φ ein messbarer, $\mathcal{F}$-adaptierter Prozess. Nach (iii) und dem Satz von Fubini gilt:

$$\|\varphi\|^2_{\lambda\times\mathbb{P}} = \int_a^b \int_\Omega |\varphi(t, w)|^2\, dw\, dt = \int_\Omega \int_a^b |\varphi(t, w)|^2\, dt\, dw$$

4.3.2 Definition: Itô-Integral für spezielle Treppenfunktionen

Seien $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und φ_j beschränkte, $\mathcal{F}_{t_j}$-messbare Zufallsgrößen für $0 \leq j \leq n-1$. Wir definieren φ durch

$$\varphi(t, w) := \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(w) \cdot 1_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$

Aufgabe: $\varphi(\cdot, w)$ ist rechtsseitig stetig und (i)-(iii) sind erfüllt. Für solche Funktionen definieren wir das Integral I durch

$$\begin{aligned} I(\varphi) := I(\varphi, w) &:= \int_a^b \varphi(t, w)\, dW(t, w) \\ &:= \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(w) \cdot (W_{t_{j+1}}(w) - W_{t_j}(w)) \end{aligned}$$

Aufgabe: Diese Definition ist sinnvoll, d.h. $I(\varphi)$ hängt nicht von der speziellen Darstellung von φ ab.

4.3.3 Satz

Die Summanden in der Definition von $I(\varphi)$ sind paarweise orthogonal und es gilt $\|I(\varphi)\|_{\mathbb{P}} = \|\varphi\|_{\lambda\times\mathbb{P}}$ wobei $\|\cdot\|_{\mathbb{P}}$ die L^2-Norm bzgl. $\mathbb{P}$ bezeichnet.

Beweis:

- Sei
$$I(\varphi) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(w) \cdot \Delta_j W(w)$$
wobei $\Delta_j W := W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$. Es gilt
$$\mathbb{E}(|I(\varphi)|^2) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(\varphi_j \cdot \overline{\varphi_k} \cdot \Delta_j W \cdot \Delta_k W) \tag{*}$$
$\Delta_k W$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_{t_k}$ und für $k > j$ ist $\varphi_j \cdot \overline{\varphi_k} \cdot \Delta_j W$ $\mathcal{F}_{t_k}$-messbar. Damit folgt für $j \neq k$:
$$\mathbb{E}(\varphi_j \cdot \overline{\varphi_k} \cdot \Delta_j W \cdot \Delta_k W) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{E}(\varphi_j \cdot \overline{\varphi_k} \cdot \Delta_j W) \cdot \underbrace{\mathbb{E}(\Delta_k W)}_{0} = 0$$
Somit:
$$\begin{aligned} (*) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(|\varphi_k|^2 \cdot (\Delta_k W)^2) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(|\varphi_k|^2) \cdot \mathbb{E}((\Delta_k W)^2) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(|\varphi_k|^2) \cdot (t_{k+1} - t_k) = \int_a^b \int_\Omega |\varphi(t, w)|^2\, dw\, dt \\ &= \|\varphi\|^2_{\lambda\times\mathbb{P}} \end{aligned}$$

4.3.4 Satz

Für jede Funktion φ mit den Eigenschaften 4.3.1(i)-(iii) existiert eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit denselben Eigenschaften, sodass

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{\lambda\times\mathbb{P}} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

Beweis:

(i). Nehmen wir an, dass φ stark stetig ist. Sei $Z_n : a = t_0^n < \ldots < t_{n+1}^n = b$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit

$$\max_{j=0,\ldots,n} |t_{j+1}^n - t_j^n| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

Definiere

$$\varphi_n(t,w) := \sum_{j=0}^{n} 1_{[t_j^n, t_n^{j+1})}(t) \cdot \varphi(t_j^n, w)$$

Diese Funktionen haben die gewünschten Eigenschaften und wegen der starken Stetigkeit von φ konvergieren sie in $L^2(\mathbb{P})$ gegen φ für festes $t \in [a,b]$:

$$\mathbb{E}\left(|\varphi(t,\cdot) - \varphi_n(t,\cdot)|^2\right) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

Der Satz über dominierte Konvergenz zeigt, dass

$$\int_a^b \mathbb{E}\left(|\varphi(t,\cdot) - \varphi_n(t,\cdot)|^2\right) dt \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

(ii). Allgemeiner Fall: Da beschränkte Funktionen in jedem L^2-Raum dicht liegen, dürfen wir annehmen, dass φ beschränkt ist. Da die Verschiebungsoperatoren in $L^2(\lambda)$ stetig sind (vgl. PDE1; das zeigt man, indem man messbare Funktionen durch C_C-Funktionen approximiert), ist die Abbildung

$$t \mapsto g_n(t,w) := \int_0^\infty e^{-\tau} \cdot \varphi\left(t - \frac{\tau}{n}, w\right) d\tau$$

stark stetig auf $[a,b]$. Weiterhin besitzt g_n die Eigenschaften (i)-(iii) aus 4.3.1. Für die g_n's ist der erste Teil des Beweises anwendbar.

Wir zeigen jetzt, dass $\|\varphi - g_n\|_{\lambda\times\mathbb{P}} \to 0$ für $n \to \infty$. Dazu:

$$\begin{aligned}
\|\varphi - g_n\|^2_{\lambda\times\mathbb{P}} &= \int_a^b \mathbb{E}\left(|\varphi(t,\cdot) - g_n(t,\cdot)|^2\right) dt \\
&= \int_a^b \mathbb{E}\left(\left|\int_0^\infty e^{-\tau} \cdot \left(\varphi(t,\cdot) - \varphi\left(t - \frac{\tau}{n}, \cdot\right)\right) d\tau\right|^2\right) dt \\
&\overset{\text{CSU}}{\leq} \int_a^b \mathbb{E}\left(\int_0^\infty e^{-2\tau}\, d\tau \cdot \int_0^\infty \left|\varphi(t,\cdot) - \varphi\left(t - \frac{\tau}{n}, \cdot\right)\right|^2 d\tau\right) dt
\end{aligned}$$

Integrand konvergiert gegen 0 für $n \to \infty$ wegen Stetigkeit des Verschiebungsoperators. Aus dominierter Konvergenz folgt die Behauptung.

4.3.5 Folgerung

Nach dem vorhergehenden Satz lässt sich die lineare und isometrische Abbildung I eindeutig zu einer isometrischen linearen Abbildung fortsetzen, die für alle Funktionen mit 4.3.1(i)-(iii) definiert ist. Isometrisch heißt hier

$$\|I(\varphi)\|_{\mathbb{P}} = \|\varphi\|_{\lambda\times\mathbb{P}}$$

Die Fortsetzung bezeichnen wir auch mit I und nennen sie Itô-Integral. Aus der Isometrie folgt:

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b \varphi(t,\cdot)\, dW_t \cdot \int_a^b \overline{\psi(t,\cdot)\, dW_t}\right) = \int_a^b \mathbb{E}(\varphi(t,\cdot) \cdot \overline{\psi(t,\cdot)})\, dt \tag{1}$$

Leicht zu sehen:

$$\int_a^t \varphi(s,w)\, dW(s,w) = \int_a^b 1_{[a,t]}(s) \cdot \varphi(s,w)\, dW(s,w) \qquad (a \leq t \leq b)$$

4.3.6 Satz

Durch die Gleichung

$$X(t,w) := \int_a^t \varphi(s,w)\,dW(s,w) \qquad (a \le t \le b)$$

wird ein stark stetiger Prozess X zweiter Ordnung definiert, der ein $\mathcal{F}$-Martingal ist.

Bemerkung:

(i). Durch unsere Prozedur ist X_t für festes t fast sicher eindeutig definiert, d.h. der Prozess X ist nur bis auf eine Modifikation eindeutig.

Beweis:

(i). starke Stetigkeit: Nach 4.3.5(1) ist

$$\mathbb{E}\left(|X(t,\cdot) - X(t+\varepsilon,\cdot)|^2\right) = \int_a^b 1_{[t,t+\varepsilon]}(s) \cdot \mathbb{E}(|\varphi(s,\cdot)|^2)\,ds$$

Der Integrand geht gegen 0 (bis auf in t) und besitzt die integrierbare Majorante $\mathbb{E}(|\varphi(s,\cdot)|^2)$.

(ii). Martingaleigenschaft: Sei zuerst φ eine Treppenfunktion, $t > s$ und seien $t_1, \dots, t_n$ die Sprungstellen von φ zwischen s und t. Dann gilt:

$$\begin{aligned} X(t,w) - X(s,w) &= \int_s^t \varphi(\tau,w)\,dW(\tau,w) \\ &= \varphi_0 \cdot (W(t_1,w) - W(s,w)) + \sum \varphi_j \cdot (W(t_{j+1},w) - W(t_j,w)) \\ &\quad + \varphi_n \cdot (W(t,w) - W(t_n,w)) \end{aligned}$$

wobei φ_0 messbar bzgl. $\mathcal{F}_s$, φ_k messbar bzgl. $\mathcal{F}_{t_k}$ für $k = 1, \dots, n$. Hieraus folgt:

$$\mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}_{\mathcal{F}_s}\mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t_1}} \cdots \mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t_n}}(X_t - X_s) = 0$$

und folglich (da X_s messbar bzgl. $\mathcal{F}_s$) $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$.

Im allgemeinen Fall sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen, die φ im quadratischen Mittel approximiert und

$$X_n(t,w) := \int_a^t \varphi_n(s,w)\,dW(s,w) \qquad (a \le t \le b)$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist X_n ein $\mathcal{F}$-Martingal, d.h.

$$\forall s \le t : \mathbb{E}(X_n(t,\cdot)|\mathcal{F}_s) = X_n(s,\cdot)$$

Damit:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(X(t,\cdot) - X_n(t,\cdot)|\mathcal{F}_s) - \mathbb{E}(X(s,\cdot) - X_n(s,\cdot)|\mathcal{F}_s) \\ &\to 0 \qquad (n \to \infty) \end{aligned}$$

da $\mathbb{E}\left(|X(t,\cdot) - X_n(t,\cdot)|^2\right) \to 0$ für jedes $t \in [a,b]$ (I isometrisch) und die Bildung der bedingten Erwartung ein L^2-stetiger Operator ist.

4.3.7 Satz

Sei $(X_t)_{t\in[a,b]}$ ein separables L^2-Martingal. Dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \mathbb{P}\left[\sup_{a\le t\le b} |X_t| \ge \varepsilon\right] \le \frac{\mathbb{E}|X_b|^2}{\varepsilon^2}$$

Beweis: Bekannt aus Wahrscheinlichkeitstheorie

4.3.8 Satz

Ist W separabel, so besitzt der Prozess X aus 4.3.6 eine stetige Modifikation.

Beweis:

- Nach Satz 4.3.6 ist X stark stetig und nach Satz 2.1.9 können wir annehmen, dass X messbar und separabel ist. Wir zeigen, dass dann X fast sicher pfadstetig ist. Wenn φ eine Treppenfunktion ist, dann folgt das aus der Pfadstetigkeit von W.

- Im allgemeinen Fall wählen wir eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, sodass

  $$\|\varphi - \varphi_n\|_{\lambda\times\mathbb{P}} \leq \frac{1}{n^2}$$

  Mit

  $$X_n(t,w) := \int_a^t \varphi_n(s,w)\,dW(s,w)$$

  ist $X_n(t,\cdot) - X(t,\cdot)$ ein separables L^2-Martingal. Nach 4.3.7 gilt:

  $$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\sup_{a\leq t\leq b} |X_n(t,\cdot) - X(t,\cdot)| \geq \frac{1}{n}\right] &\leq \frac{\mathbb{E}(|X_n(b,\cdot) - X(b,\cdot)|^2)}{n^{-2}} \\ &= n^2 \cdot \|\varphi - \varphi_n\|^2_{\lambda\times\mathbb{P}} \leq \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

  Nach Borel-Cantelli ist

  $$\Gamma := \limsup_{n\to\infty}\left\{w;\ \sup_{a\leq t\leq b} |X_n(t,w) - X(t,w)| \geq \frac{1}{n}\right\}$$

  ein $\mathbb{P}$-Nullereignis, d.h. für alle $w \notin \Gamma$ gilt

  $$\sup_{a\leq t\leq b} |X_n(t,w) - X(t,w)| \geq \frac{1}{n}$$

  nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$. Daher

  $$\forall w \notin \Gamma : \lim_{n\to\infty} \sup_{a\leq t\leq b} |X_n(t,w) - X(t,w)| = 0$$

  also $X(\cdot,w)$ stetig als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen für $w \notin \Gamma$.